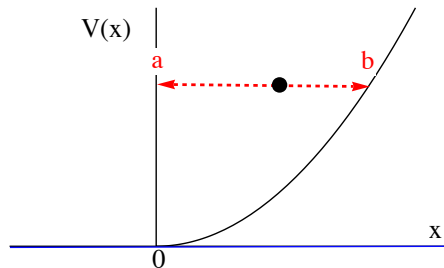


## 1. Règle de Bohr-Sommerfeld

En utilisant les règles de quantification de Bohr-Sommerfeld, nous cherchons à déterminer les niveaux d'énergie possibles pour une particule dans un potentiel harmonique unidimensionnel limité à un demi-axe :  $V(x) = \begin{cases} \frac{m\omega^2}{2}x^2 & x > 0 \\ \infty & x \leq 0 \end{cases}$ .



i) Déterminez les deux points d'inflexion  $(a, b)$  pour une particule à une énergie donnée  $E$ .

### SOLUTION

Compte tenu de la présence du potentiel infini, tout le demi-axe  $x \leq 0$  est inaccessible à la particule classique. Un des points d'inflexion de toute trajectoire classique est donc le point  $a = 0$  auquel la particule fera une collision élastique telle que sa quantité de mouvement  $-p$  deviendra  $+p$ . Le deuxième point d'inflexion sera celui où toute l'énergie de la particule est purement potentielle. À ce point, la trajectoire de la particule aura atteint sa distance maximale et elle redescendra ensuite dans le potentiel harmonique inversant la direction de son mouvement.

Pour un problème unidimensionnel, la conservation de l'énergie totale suffit à déterminer ce point d'inflexion  $b$  qui correspond alors au point  $x > 0$  tel que  $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{m\omega^2 b^2}{2}$ .

On trouve donc  $a = 0$  et  $b = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ .

ii) Calculez l'intégrale  $\int_a^b p(x)dx$  pour l'aller et pour le retour  $\int_b^a p(x)dx$  et appliquez les lois de quantification de Bohr-Sommerfeld pour déterminer les énergies permises.

**SOLUTION** Afin de calculer  $\int_a^b p(x)dx$ , il faut connaître en tout point  $x$  de la trajectoire, la valeur de la quantité de mouvement à ce point.

Encore une fois, puisque le problème est unidimensionnel, la conservation de l'énergie totale suffit à conclure qu'en tout point  $x$ , on a :

$$\begin{aligned}\frac{p(x)^2}{2m} &= E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \\ p(x) &= \pm \sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2}.\end{aligned}\quad (1)$$

Ici les deux branches de la racine sont permises, puisque l'oscillation de la particule impose nécessairement que sa quantité de mouvement soit tantôt positive tantôt négative. Lors du trajet la menant de  $a = 0$  vers  $b$  elle sera positive, tandis qu'elle sera négative lors du trajet de retour la menant de  $b$  vers  $0$ .

On peut donc calculer la contribution à l'intégrale due à l'aller ( $0 \rightarrow b$ ) comme donnée par  $\int_0^b \sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2} dx$ .

Puisque l'énergie totale  $E$  définit la valeur de  $b$  (et vice-versa), on a  $E = \frac{m\omega^2 b^2}{2}$ , et on peut réécrire l'intégrale comme :

$$\int_0^b \sqrt{2m \frac{m\omega^2 b^2}{2} - m^2\omega^2 x^2} dx = \int_0^b \sqrt{m^2\omega^2 b^2 - m^2\omega^2 x^2} dx = m\omega \int_0^b \sqrt{b^2 - x^2} dx. \quad (2)$$

Cette intégrale correspond à l'aire sous la courbe d'un quart de cercle (de rayon  $b$ ) et est donc facilement évaluée comme  $\frac{m\omega\pi b^2}{4}$ .

Le trajet retour ( $b \rightarrow 0$ ) contribue, quant à lui, à l'intégrale comme :

$$\int_b^0 \left(-\sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2}\right) dx = \int_0^b \left(+\sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2}\right) dx = \frac{m\omega\pi b^2}{4}, \quad (3)$$

puisque l'on vient tout juste de calculer cette intégrale.

Au total, on a donc, sur toute une période du mouvement oscillatoire :

$$\int p(x)dx = \frac{m\omega\pi b^2}{2} \quad (4)$$

La règle de Bohr-Sommesfeld nous dit alors que seules les trajectoires (et donc les énergies) telles que cette intégrale soit un multiple entier de  $h$  seront permises.

On trouve donc la condition :

$$\frac{m\omega\pi b^2}{2} = \frac{m\omega\pi \frac{2E}{m\omega^2}}{2} = \pi \frac{E}{\omega} = nh \quad (5)$$

et les énergies possible (maintenant quantifiées) sont données par :

$$E_n = 2n \frac{h}{2\pi} \omega = 2n\hbar\omega. \quad (6)$$

iii) Comparez ce résultat à celui de l'oscillateur harmonique unidimensionnel (complet).

### SOLUTION

En CM, nous avons démontré que les règles de Bohr-Sommerfeld menaient ici à une quantification des niveaux d'énergies possible donnée par :

$$E_n = n\hbar\omega. \quad (7)$$

En fait, dans ce problème, nous intégrons l'ellipse  $p(x)$  sur une trajectoire allant de  $-b$  à  $b$  alors qu'ici on en a que la moitié. Par conséquent, le demi-potentiel harmonique a une règle de sélection des énergies quantiques qui fait que seule la moitié (celles correspondant à un nombre quantique pair) des niveaux de l'oscillateur complet sont alors permis.

iv) Reprenez le problème avec cette fois un potentiel linéaire  $V(x) = Fx$ ,  $x > 0$  plutôt que quadratique sur le demi-axe positif.

### SOLUTION

Les points d'inflexion sont cette fois donnés par  $a = 0$  et par  $b = \frac{E}{F}$  où, encore une fois, toute l'énergie est potentielle.

La conservation de l'énergie totale  $E = \frac{p(x)^2}{2m} + Fx$  nous indique que :

$$p(x) = \pm \sqrt{2mE - 2mFx}, \quad (8)$$

encore une fois avec le signe  $+$  à l'aller ( $0 \rightarrow b$ ) et  $-$  au retour.

La contribution de l'aller à l'intégrale nous est donnée par :

$$\int_0^b dx \sqrt{2mE - 2mFx} = \int_0^b dx \sqrt{2mFb - 2mFx} = \sqrt{2mF} \int_0^b dx \sqrt{b - x}. \quad (9)$$

En définissant la variable  $y = b - x$  de sorte que  $dy = -dx$  et  $y|_{x=b} = 0$  et  $y|_{x=0} = b$ , le changement de variable d'intégration nous permet d'écrire :

$$\sqrt{2mF} \int_b^0 (-dy) y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2mF} \int_0^b dy y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2mF} \left. \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^b = \frac{2}{3} \sqrt{2mF} b^{\frac{3}{2}} \quad (10)$$

La contribution du retour est encore une fois la même puisque donnée par la branche négative de la racine mais entre des bornes d'intégration inversées et on trouve donc la loi de Bohr-Sommerfeld comme étant donnée par :

$$\frac{4}{3} \sqrt{2mF} b^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \sqrt{2mF} \left( \frac{E}{F} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{2m}}{3F} E^{\frac{3}{2}} = nh \quad (11)$$

C'est donc dire que les énergies seraient quantifiées comme :

$$E_n = \left( n \frac{3hF}{4\sqrt{2m}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (12)$$