
PROJET DE MÉCANIQUE DES FLUIDES

2^{ème} Année ENSEM
Filière Mécanique
2014/2015

Ophélie CABALLINA
Alexandre LABERGUE
Nicolas LOUVET
Antonio PEREIRA

Table des Matières

I	Dynamique des Gaz Compressibles	7
1	Généralités et rappels	8
1.1	Généralités	8
1.2	Thermodynamique	9
2	Ecoulements 1D	12
2.1	Définition et hypothèses de base	12
2.2	Équations fondamentales	13
2.3	Théorème d'Hugoniot	14
2.4	État critique et vitesse limite	16
2.5	Relations isentropiques	17
2.6	Application aux tuyères	18
3	Les ondes de choc	22
3.1	Onde de choc droite	22
3.2	Onde de choc oblique	24
4	Méthode des caractéristiques	28
4.1	Introduction	28
4.2	Applications	30
5	Analogie Mach-Froude	36
5.1	Similitude des équations	36
5.2	Tableau d'analogie	37
6	Projets d'études	38
6.1	Le banc de tuyère à gaz	38
6.2	Le canal d'analogie hydraulique	40
6.3	Quelques pistes de projets possibles	40
7	Quelques références bibliographiques	42

II	Thème instabilités hydrodynamiques et turbulence	43
1	Instabilités hydrodynamiques	45
1.1	Notions	45
1.2	Les instabilités hydrodynamiques et naissances spatiale de l'ordre	50
2	Transition à la turbulence	56
2.1	Généralités	57
2.2	Description statistique des écoulements turbulents : l'équation de Reynolds. . . .	58
3	Projets d'études	61
3.1	Instabilité de Rayleigh-Bénard	61
3.2	Instabilité de Taylor-Couette	62
3.3	L'expérience de Reynolds	63
3.4	Le canal hydraulique	64
3.5	Exemples de projets réalisables	65
4	Quelques références bibliographiques	67
III	Turbomachines et éoliennes	68
1	Introduction générale	69
2	Les turbomachines	70
2.1	Présentation - Contexte	70
2.2	Classification	70
2.3	Rappels théoriques	71
2.4	Pompe centrifuge multicellulaire	74
2.5	Ventilateur	76
2.6	Les turbines	77
2.7	Références bibliographiques	80
3	Les éoliennes	81
3.1	Présentation – Contexte	81
3.2	Étude théorique	81
3.3	Les installations expérimentales	89
3.4	Objectifs de l'étude des éoliennes	93
3.5	Références bibliographiques	94
4	Propositions de conduite du projet	95
4.1	Etude des turbomachines	95
4.2	Etude des génératrices	95
4.3	Etc,...	95

IV	Aérodynamique incompressible	96
1	Rappels théoriques	98
1.1	Efforts aérodynamiques sur un objet	98
1.2	Facteurs influençant les propriétés aérodynamiques	100
2	Résultats sur les corps simples	102
2.1	Plaque plane de faible épaisseur	102
2.2	Cylindre	104
2.3	Sphère	108
2.4	Profil d'aile	109
2.5	Aile d'envergure finie	113
3	Installations expérimentales	117
3.1	Souffleries aérodynamiques	117
3.2	Mesure des vitesses	117
3.3	Mesure des efforts	118
4	Exemples	119
4.1	Objets volants	119
4.2	Véhicule	119
4.3	Construction	120
4.4	Nautique	120
4.5	Jeux de plein air	121
4.6	Interaction de corps simples	121
5	Références	122

Première partie

Dynamique des Gaz Compressibles

Chapitre 1

Généralités et rappels de thermodynamique

1.1 Généralités

La dynamique des gaz compressibles est la science qui adjoint aux équations du mouvement l'équation de l'énergie et la thermodynamique du gaz. Les effets de la compressibilité sont significatifs notamment en aérodynamique. Ainsi on peut considérer le cas de l'aérodynamique externe s'intéressant à l'écoulement autour d'un objet (aile, fuselage, habitacle,...) et l'aérodynamique interne relative à l'écoulement traversant les nacelles propulsives des avions (Figure 1.1a), ou bien produit par les systèmes propulseurs équipant les missiles et les lanceurs de satellites. A la frontière entre deux domaines, on trouve par exemple, les prises d'air pour les réacteurs d'avion et les tuyères propulsives (figure 1.1b).

L'objectif du thème est d'appréhender différents éléments de la dynamique des gaz compressibles par des expériences relativement simples à mettre à œuvre mais très riches en information sur les phénomènes liés à la compressibilité. Dans ce qui suit, nous ferons quelques rappels théoriques de thermodynamique avant d'aborder les cas des écoulements monodimensionnel et bidimensionnel en introduisant le phénomène de chocs. Ces éléments seront nécessaires à l'interprétation des études expérimentales qui pourront être menées dans le cas d'un projet sur la dynamique des

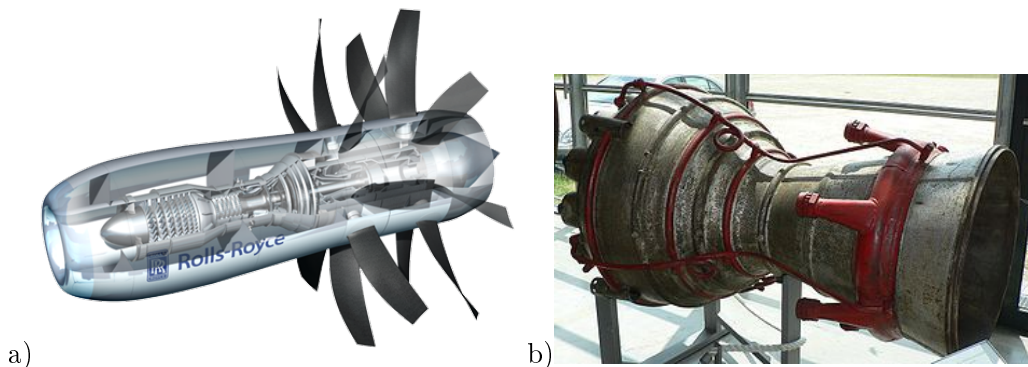


FIGURE 1.1 – Exemple d'écoulements compressibles : a) Nacelle propulsive Rolls Royce b) Lanceur d'un missile V2.

gaz compressibles.

1.2 Rappels de thermodynamique

1.2.1 Notion de système

On appelle système la portion de l'espace délimitée par une surface réelle ou fictive, où se situe la matière étudiée. Le reste de l'Univers est le milieu extérieur. Un système ouvert échange de la matière et de l'énergie avec le milieu extérieur. Un système fermé échange de l'énergie avec le milieu extérieur. Un système isolé n'échange ni matière ni énergie avec le milieu extérieur.

1.2.2 Premier principe

Nous considérons ici le cas d'un système au repos, correspondant au cas des faibles vitesses de déformation. A tout système est associée une fonction d'état U appelée **énergie interne**.

- Système fermé : Au cours d'une transformation d'un état initial 1 à un état final 2, la variation d'énergie interne est :

$$\Delta U = W + Q \quad (1.1)$$

avec W , le travail des forces de pression dans la déformation du système qui le fait passer de l'état 1 à l'état 2. La variable Q représente la quantité de chaleur reçue par le système dans sa déformation.

Pour une transformation élémentaire (dans laquelle les états 1 et 2 sont très proches), le premier principe s'écrit sous forme différentielle :

$$dU = dW + dQ = -P dV + dQ \quad (1.2)$$

C'est le principe de conservation de l'énergie.

- Système calorifiquement isolé : dans ce cas, il n'y a pas d'échange de chaleur avec l'extérieur, $dQ = 0$, et donc :

$$dU = dW = -P dV \quad (1.3)$$

1.2.3 Second principe

le deuxième principe de la thermodynamique peut être introduit, qui spécifie que dQ/T est la différentielle exacte de la fonction S , appelée entropie du système :

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (1.4)$$

où T est la température absolue du système.

Dans les transformation réelles on a $dS \geq 0$, ce qui traduit également la notion d'irréversibilité. Si $dS = 0$, la transformation est dite réversible.

1.2.4 Loi d'état

Dans tout ce développement, l'approximation des gaz parfaits sera considérée. L'équation d'état sera ainsi :

$$\frac{P}{\rho} = rT \quad (1.5)$$

où r est la constante des gaz parfaits $r = R/M$, avec $R = 8,32$ USI et M est la masse molaire ($M = 29$ gr/mol dans le cas particulier de l'air). On aura donc ainsi $r \approx 287$ USI.

Une hypothèse plus forte, mais couramment admise sera également effectuée, celle des gaz calorifiquement parfaits : cette hypothèse stipule que les chaleurs spécifiques C_p et C_v (respectivement à pression et volume constant) ne dépendent pas de la température et sont des constantes ne dépendant que du fluide considéré. Pour ce type de gaz, on rappelle les relations liant l'énergie interne et l'enthalpie à la température absolue T :

$$\begin{aligned} U &= C_v T \\ H &= C_p T \end{aligned} \quad (1.6)$$

En utilisant les identités thermodynamiques, on peut en déduire l'équation d'état suivante pour un gaz parfait :

$$P = e^{\left(\frac{S-S_0}{C_v}\right)} \rho^\gamma \quad (1.7)$$

On rappelle que $C_p - C_v = r$ (relation de Mayer) et que $\gamma = C_p/C_v$.

Ainsi, lors d'une transformation isentropique d'un gaz parfait, par exemple lors d'une transformation adiabatique et réversible, on obtient la loi de Laplace :

$$PV^\gamma = Cte \quad (1.8)$$

Dans le cas de l'air, on retiendra absolument les valeurs suivantes, très usuelles : $\gamma = 1,4$ $C_p = 1000$ J/kg et $r = R/M = 287$ USI.

1.2.5 Célérité du son

La célérité du son a correspond à la vitesse de propagation des ondes sonores et est définie comme :

$$a^2 = \frac{\partial P(\rho, S)}{\partial \rho} \quad (1.9)$$

Dans le cas d'un gaz idéal et pour une perturbation infinitésimale, le déplacement de l'onde est isentropique, on obtient donc les relations suivantes :

$$a^2 = \gamma r T = (\gamma - 1) H \quad (1.10)$$

1.2.6 Classification des écoulements compressibles : le nombre de Mach

Par définition le nombre de Mach est :

$$M = \frac{V}{a} \quad (1.11)$$

où V est la vitesse locale de l'écoulement. La valeur de ce nombre est fondamentale pour les écoulements compressibles. Selon qu'il est supérieur (régime supersonique) ou inférieur à 1 (régime subsonique), la nature de l'écoulement ou plus exactement le comportement du fluide va être fondamentalement différent.

Dans le cas d'un écoulement interne débouchant dans un réservoir par exemple : si en régime subsonique la pression du réservoir change la vitesse d'écoulement va varier en fonction de cette pression (augmenter si la pression diminue et vice-versa). En régime supersonique, les " ondes de pressions " qui se déplacent à la vitesse du son ne peuvent pas remonter et l'écoulement dans le tuyau reste invariable quelque soit la pression en aval (Voir l'amorçage d'une tuyère).

Chapitre 2

Écoulements monodimensionnels stationnaires

2.1 Définition et hypothèses de base

Dans cette première partie, nous allons traiter le cas simplifié des écoulements monodimensionnels. Dans cette hypothèse, l'écoulement ne dépend que d'une seule variable d'espace, x par exemple et on suppose ainsi que les propriétés de l'écoulement sont constantes dans une section $A(x)$. Dans la pratique, l'hypothèse monodimensionnelle s'applique à un écoulement dans un conduit dont la section $A(x)$ est lentement variable selon Ox (Figure 2.1), ce qui correspond en aérodynamique interne aux prises d'air, tuyères, diffuseurs, éjecteurs, etc.

L'hypothèse de l'écoulement monodimensionnel implique que la vitesse $\vec{V}$ est constante sur $A(x)$ et que $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$, avec $\vec{n}$, la normale à la surface. On traitera donc la vitesse comme un scalaire V par la suite. Les hypothèses faites sont les suivantes :

- l'écoulement est permanent (ou stationnaire)
- le fluide est non-visqueux et non-conducteur de la chaleur
- le fluide est non-réactif

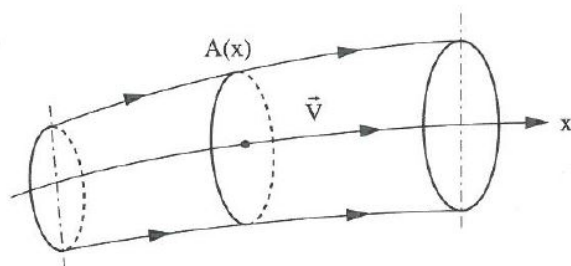


FIGURE 2.1 – Tube de courant monodimensionnel.

2.2 Équations fondamentales

La description de l'écoulement va découler des équations fondamentales : conservation de la masse, équations du mouvement et conservation de l'énergie.

— Conservation de la masse

Dans ce cas très simplifié, le principe de conservation de la matière s'écrit simplement comme :

$$q_m = \rho V A = Cste \quad (2.1)$$

où q_m représente le débit massique au travers d'une surface d'aire A . Une différentiation logarithmique de l'expression de q_m donne :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (2.2)$$

qui est une forme différentielle de l'équation de continuité en stationnaire.

— Équation du mouvement ou équation d'Euler le fluide étant considéré comme non-visqueux, son mouvement est régi par l'équation d'Euler :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} g \vec{rad} P \quad (2.3)$$

où $\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{grad} \vec{V} \cdot \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + g \vec{rad} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \wedge \vec{rot} \vec{V}$
ce qui revient à écrire l'équation d'Euler sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + g \vec{rad} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \wedge \vec{rot} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} g \vec{rad} P \quad (2.4)$$

On peut également, dans notre cas, obtenir le bilan de quantité de mouvement par un bilan macroscopique en projection sur x :

$$dF_p = -d[PA + \dot{m}V] = -PdA + AdP + d(\dot{m})V + \dot{m}dV \quad (2.5)$$

où dF_p est la composante suivant x de la force qui s'exerce sur la paroi du tube de courant. Au second ordre près, elle a pour expressions $Df_p = PdA$. Ce qui nous conduit à :

$$VdV + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (2.6)$$

Dans la relation ci-dessus, l'aire A du tube de courant a disparu. L'équation d'Euler est donc une relation locale valable sur toute ligne de courant.

— Équation de l'énergie Pour un écoulement stationnaire et sur une ligne de courant :

$\vec{V} \wedge r\vec{\text{rot}}\vec{V} = \vec{0}$. L'équation du mouvement donne donc :

$$\vec{V} \cdot \left(\vec{\text{grad}} \frac{V^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} P \quad (2.7)$$

En montrant que $\frac{1}{\rho} \vec{P} = \vec{\text{grad}} H$, on peut ainsi écrire que sur une ligne de courant :

$$\vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} + H \right) = 0 \quad (2.8)$$

Ainsi sur une ligne de courant, on peut déduire que :

$$H + \frac{V^2}{2} = H_i = \text{cte} \quad (2.9)$$

En écoulement stationnaire, les lignes de courant sont confondues avec les trajectoires de particule fluide. H_i est appelée enthalpie génératrice qui correspond à l'enthalpie d'un point de vitesse nulle sur la ligne de courant. Cette constante dépend à priori de la ligne de courant considérée.

Hypothèse : les écoulements stationnaires que nous étudierons sont à enthalpie génératrice constante, ce qui signifie en somme que « toutes les particules fluides proviennent du même réservoir ».

La relation $H + V^2/2 = H_i$ est donc valable pour tout le champ de l'écoulement. Si le gaz est calorifiquement parfait, on a :

$$C_p T + \frac{V^2}{2} = C_p T_i \quad (2.10)$$

où T_i est désignée comme la température génératrice ou température d'arrêt.

2.3 Théorème d'Hugoniot

Pour étudier l'effet d'un changement de section, nous reprenons les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement sous forme différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} &= 0 \\ V dV + \frac{dP}{\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

L'écoulement étant isentropique, on peut écrire que :

$$\frac{dP}{\rho} = a^2 \frac{d\rho}{\rho} \quad (2.12)$$

En introduisant cette relation dans l'équation de quantité de mouvement, on obtient alors :

$$a^2 \frac{d\rho}{\rho} + V^2 \frac{dV}{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad (2.13)$$

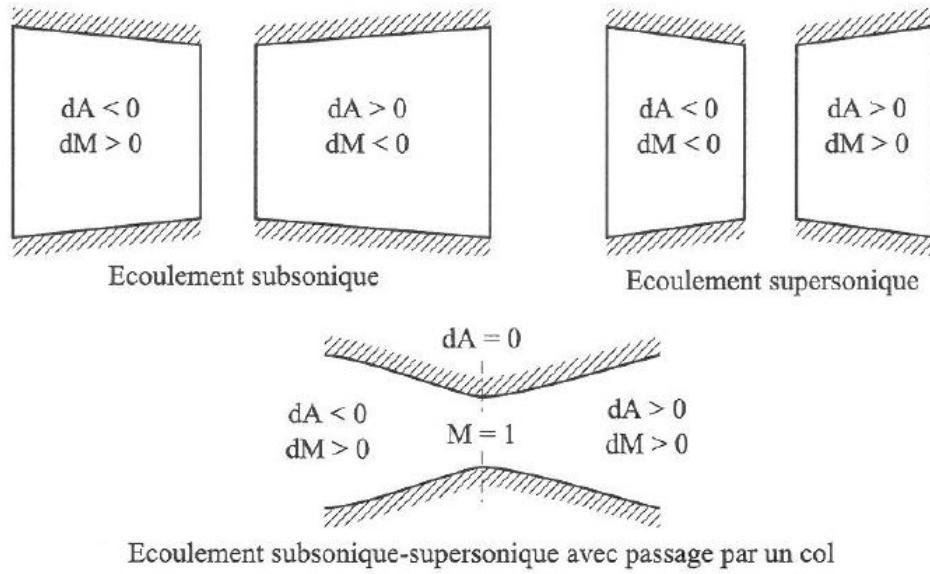


FIGURE 2.2 – Illustration du théorème d'Hugoniot.

Cette relation montre le lien entre variation relative de masse volumique et nombre de Mach. En substituant cette dernière relation dans le bilan de masse, on obtient finalement que :

$$(1 - M^2) \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (2.14)$$

Cette relation fondamentale établit une relation entre les variations de vitesse dV et les variations de section dA du tube de courant. Deux cas (Figure 2.2) peuvent ainsi être discutés en fonction du nombre de Mach M :

- **écoulement subsonique** ($M < 1$: une diminution de la section (tube de courant convergent) entraîne une augmentation de la vitesse, il y a **accélération du fluide** et inversement.
- **écoulement supersonique** ($M > 1$: une diminution de la section (tube de courant convergent) entraîne une diminution de la vitesse, il y a **décélération du fluide** et inversement.
- **cas limite de l'écoulement sonique** ($M = 1$: Si $dV \neq 0$, alors $dA = 0$, quelle que soit la valeur de dV . Comme l'accélération de l'écoulement depuis une vitesse subsonique impose une diminution de l'aire A , il s'ensuit que la condition $dA = 0$ de l'état sonique correspond à un minimum de la section droite. Cette section est appelée un **col**.

Dans les cas où $M \neq 1$, la situation $dA = 0$ entraîne $dV = 0$: la vitesse passe par un extremum.

On peut aussi établir une relation analogue pour relier changement de section et de pression. Reprenant le bilan de quantité de mouvement sous la forme :

$$\frac{dP}{p} + \frac{\rho V^2}{P} \frac{dV}{V} = 0 \quad (2.15)$$

on peut combiner cette équation avec la relation d'Hugoniot et obtenir :

$$(M^2 - 1) \frac{dP}{p} + \frac{\rho V^2}{P} \frac{dA}{A} = 0 \quad (2.16)$$

On voit ainsi que pour un écoulement subsonique, une diminution de la section s'accompagne d'une diminution de la vitesse, mais d'une augmentation de la pression. A l'inverse, en écoulement supersonique, une diminution de la section s'accompagne d'une augmentation de la vitesse, mais d'une diminution de la pression.

2.4 État critique et vitesse limite

2.4.1 État critique

L'état d'un fluide en un point où la vitesse est sonique est appelé "état critique" et est noté a . Considérant la relation d'Hugoniot, on voit que le fluide ne peut atteindre les conditions critiques qu'au point d'un col du système unidimensionnel (on a vu que $M = 1$ implique $dA = 0$). Le passage par les conditions critiques est très bien illustré par l'exemple classique de la tuyère de Laval. Dans cette configuration, l'écoulement, initialement subsonique, est accéléré dans un convergent, atteint les conditions critiques au niveau du col, passe alors en régime supersonique et continue d'être accéléré par la suite dans un divergent. D'après l'équation de l'énergie, on peut donc écrire que :

$$V_c = a_c = \sqrt{2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} H_i} \quad (2.17)$$

2.4.2 Vitesse limite

La vitesse limite d'un écoulement compressible est atteinte lorsque la détente est poussée jusqu'au vide ($P = 0$ donc $T = 0$). Si on reprend l'équation de l'énergie, cette relation montre que la vitesse du gaz tend vers une limite finie

$$V^* = \sqrt{2H_i} \quad (2.18)$$

On peut en déduire ainsi que :

$$\frac{V^*}{V_c} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \quad (2.19)$$

2.5 Relations isentropiques et loi des aires : cas du gaz calorifiquement parfait

2.5.1 Conditions génératrices locales

D'une façon générale, si nous considérons un écoulement dont les propriétés sont connues (pression, température, masse volumique, vitesse), il est possible de faire correspondre à cet écoulement un état résultant d'un arrêt isentropique du fluide. Pour cela, il suffit d'imaginer une évolution du fluide vers un état de repos où son entropie est conservée. Cette évolution, qui peut être réelle ou fictive (l'écoulement peut ne pas avoir évolué isentropiquement depuis le réservoir, par exemple s'il a traversé une onde de choc) permet de définir des conditions génératrices locales en calculant l'évolution jusqu'à $V = 0$. Ces conditions génératrices seront par la suite identifiées par un indice i .

2.5.2 Cas du gaz calorifiquement parfait

En utilisant les relations précédentes en utilisant les lois et équations d'état valables pour un gaz calorifiquement parfait, nous pouvons montrer que :

$$V^2 + \frac{2}{\gamma - 1}a^2 = Cste = \frac{2}{\gamma - 1}a_i^2 \quad (2.20)$$

connue comme l'**équation de Saint-Venant**.

De cette relation, on peut trouver l'expression de la vitesse limite pour un gaz calorifiquement parfait :

$$V_* = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}a_i \quad (2.21)$$

Nous pouvons également chercher les relations donnant les rapports T/T_i , P/P_i , ρ/ρ_i avec comme paramètre le nombre de Mach M . On obtient alors les relations isentropiques suivantes :

$$\frac{T}{T_i} = \theta(M) = \left(\frac{a^2}{a_i^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2 \right)^{-1} \quad (2.22)$$

$$\frac{P}{P_i} = \varpi(M) = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2 \right)^{-\gamma/(\gamma - 1)} \quad (2.23)$$

$$\frac{\rho}{\rho_i} = R(M) = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2 \right)^{-1/(\gamma - 1)} \quad (2.24)$$

Une section quelconque du tube de courant A peut également être comparée à la section du col A_c (indice c, section minimale où $M=1$), en écrivant la conservation du débit. On obtient ainsi

une relation appelée **Loi des aires** :

$$\frac{A}{A_c} = \Sigma(M) = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{1}{M} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (2.25)$$

Cette relation montre que pour un écoulement ayant un col amorcé (où le nombre de Mach est égal à 1 dans la section A_c), le nombre de Mach local ne dépend que du rapport des sections A/A_c . C'est le cas des tuyères supersoniques de moteur-fusée dont le nombre de Mach en sortie est déterminé par le rapport de sections $\sigma = A_E/A_c$.

2.6 Application aux tuyères

Pour accélérer un écoulement, il est nécessaire de disposer d'une tuyère convergente/divergente (dite tuyère de Laval). Dans le convergent, l'écoulement s'accélère en régime subsonique, puis sous certaines conditions passe à Mach 1 au niveau du col pour poursuivre son accélération dans le divergent en régime supersonique. On parle alors d'une tuyère amorcée.

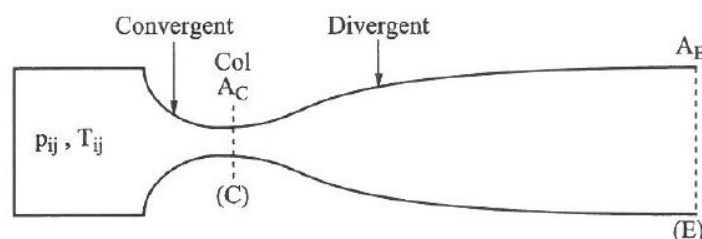


FIGURE 2.3 – Agencement d'une tuyère de Laval.

2.6.1 Fonctionnement d'une tuyère

Soit P_i la pression génératrice de l'écoulement amont. Pour faciliter la compréhension du phénomène, nous supposons que les conditions génératrices sont conservées constantes et que les conditions avalées changent. Tant que la tuyère est entièrement subsonique (non amorcée, cas 1 Figure 2.4) les conditions avalées modifient entièrement l'écoulement dans la tuyère car les ondes de pression peuvent remonter le courant. Dès que la tuyère est amorcée, les ondes de pression ne peuvent plus remonter la partie supersonique de l'écoulement qui « isole » l'amont des conditions avalées. Si l'écoulement était entièrement supersonique, la pression de sortie deviendrait inférieure à la pression ambiante : la section croissant, le nombre de Mach croîtrait aussi inéluctablement et la pression diminuerait tout au long de la tuyère vers l'aval indépendamment de la pression ambiante. Le jet se ferait alors « écraser » par la pression ambiante et une onde de choc remonterait le courant jusqu'à se stabiliser à un endroit tel que la pression de sortie soit à nouveau égale à la pression ambiante (cas 3 et 4, Figure 2.4). Contrairement aux ondes élémentaires de pression, les ondes de choc se déplacent à vitesse supersonique d'autant plus vite que la discontinuité de pression est importante. Nous verrons que l'écoulement après l'onde de choc est forcément subsonique.

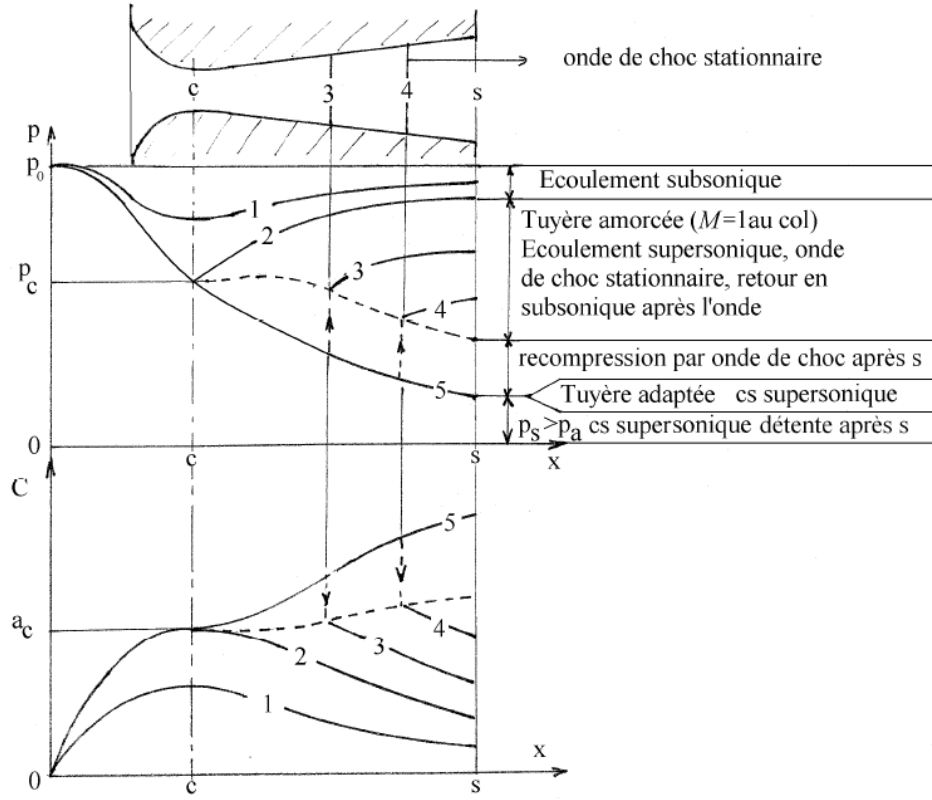


FIGURE 2.4 – Différents régimes de fonctionnement d'une tuyère convergente-divergente.

2.6.2 Débit massique

Le débit massique traversant la tuyère étant constant, il est possible de l'exprimer dans toute autre section droite, telle que le col sonique par exemple :

$$q_m = \rho V A = \rho_c V_c A_c \quad (2.26)$$

Il est maintenant possible de faire apparaître les conditions génératrices et au col :

$$q_m = \left[\frac{\rho_c}{\rho_i} \frac{P_i}{r T_i} \right] \left[\frac{a_c}{a_i} \sqrt{\gamma r T_i} \right] A_c \quad (2.27)$$

On obtient alors une relation donnant le débit massique sous la forme :

$$q_m = \frac{\delta(\gamma)}{\sqrt{C_p T_i}} P_i A_c \quad (2.28)$$

Attention : cette relation n'est valable que dans le cas d'une tuyère amorcée (Mach 1 au col) !

avec $\delta(\gamma) = \gamma(\gamma - 1)^{-1/2} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$.

Pour l'air, sachant que $\gamma = 1,4$ et $C_p = 1000 \text{ J/kg/K}$, on écrit le débit massique de la façon

suivante :

$$q_m = 0,0404 \frac{P_i A_c}{\sqrt{T_i}} \quad (2.29)$$

Dans le cas d'une tuyère non amorcée, le Mach n'est pas égal à 1 au niveau du col géométrique. On peut cependant utiliser la formule précédente en exprimant que pour une section A_s donnée, où la pression est P_s et le nombre de Mach M_s :

$$P_i = P_s / \varpi(M_s) \text{ et } A_c = A_s / \Sigma(M_s)$$

En utilisant le même raisonnement que précédemment, le débit massique s'exprime par :

$$q_m = \frac{\delta(\gamma)}{\sqrt{C_p T_i}} \frac{P_s A_s}{\varpi(M_s) \Sigma(M_s)} \quad (2.30)$$

2.6.3 Calcul de la poussée

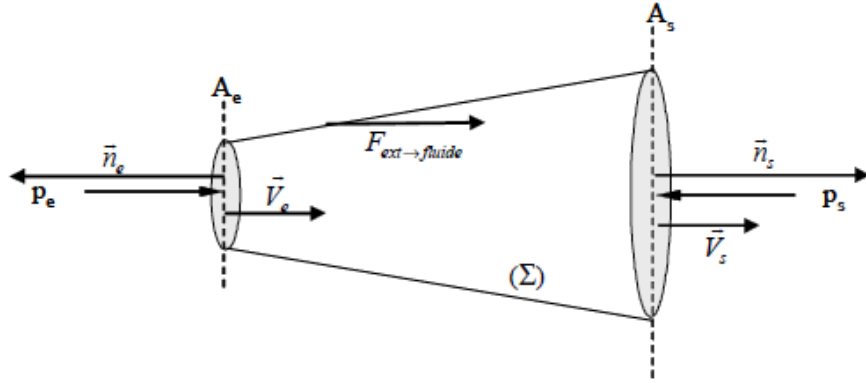


FIGURE 2.5 – Volume de contrôle pour le calcul de la poussée.

Le but est de calculer la résultante des actions sur un tube de courant de ligne moyenne rectiligne, afin d'en déduire une force de poussée (Figure 2.5). Si on applique le théorème de la quantité de mouvement à un tube de courant délimité par la section d'entrée A_e et la section de sortie A_s , en régime stationnaire, l'expression générale s'écrit :

$$\int \int_{\Sigma} \rho \vec{V} \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \Sigma \vec{F}_{ext} \quad (2.31)$$

En projection sur l'axe horizontal et en ne considérant que les forces de pression, la relation devient :

$$\rho_s V_s^2 A_s - \rho_e V_e^2 A_e = P_e A_e - P_s A_s + F_{ext \rightarrow fluide} \quad (2.32)$$

Ce qui peut se réécrire sous la forme suivante :

$$F_{ext \rightarrow fluide} = A_s (P_s + \rho_s V_s^2) - A_e (P_e + \rho_e V_e^2) \quad (2.33)$$

La quantité $D = P + \rho V^2$ est appelée dynalpie, ce qui permet d'écrire que la force extérieure

exercée sur le fluide est égale à la différence des flux de dynalpie sortant et entrant :

$$F_{ext \rightarrow fluide} = \Omega_s - \Omega_e \quad (2.34)$$

où $\Omega = D.A$ est le flux de dynalpie. Le flux de dynalpie peut aussi s'écrire :

$$\Omega = (P + \rho V^2)A = PA \left(1 + \frac{\rho V^2}{P}\right) = PA \left(1 + \frac{V^2}{rT}\right) = PA (1 + \gamma M^2) \quad (2.35)$$

soit, en faisant apparaître les conditions au col et les conditions génératrices :

$$\Omega = P_i A_c [\varpi(M) \Sigma(M) (1 + \gamma M^2)] \quad (2.36)$$

En posant $\Phi(M) = \varpi(M) \Sigma(M) (1 + \gamma M^2)$, on a : $\Omega = P_i A_c \Phi(M)$ Dans un tube de courant iso-énergétique (cas d'un gaz calorifiquement parfait), $T_i = cte$. De plus, on a $P_i A_c = cte$ qui exprime la conservation du débit massique. La force exercée sur le domaine fluide est donc exprimée par :

$$F_{ext \rightarrow fluide} = P_i A_c [\Phi(M_s) - \Phi(M_e)] \quad (2.37)$$

Chapitre 3

Les ondes de choc

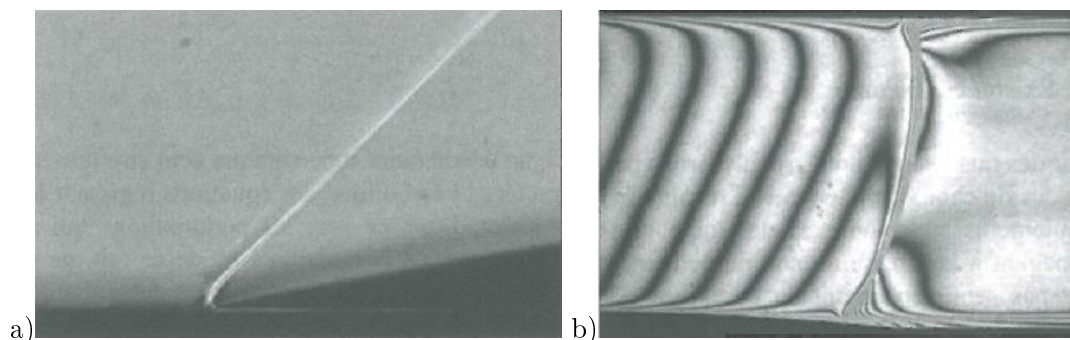


FIGURE 3.1 – Exemples de formation d'onde de choc dans des écoulements supersoniques (documents Onera. a) choc oblique induit par une rampe. b) choc droit dans un canal transsonique.

Pour des raisons que nous ne traiterons pas ici, les écoulements supersoniques peuvent être le siège d'ondes de choc. En régime supersonique, les perturbations qui se propagent à la vitesse du son ne peuvent "remonter" l'écoulement et de ce fait, ne se font pas sentir en amont du corps qui leur a donné naissance. Ainsi, un écoulement supersonique n'est pas "prévenu" de la présence d'un obstacle et doit s'adapter brusquement à la diminution de vitesse et à la variation des autres propriétés qu'il impose. Ce phénomène est appelé l'onde de choc dont l'épaisseur finie est de l'ordre de quelques libres parcours moléculaires moyens.

A titre d'exemple, on peut observer sur la figure les ondes de choc qui apparaissent dans des écoulements aérodynamiques où le changement d'orientation de la paroi provoque la création d'une onde de choc oblique (rampe de prise d'air supersonique (Figure 3.1a) ou d'une gouverne en vol supersonique) ou en sortie de tuyère sur-détendue (la pression en sortie est inférieure à la pression extérieure). Une onde de choc normale, ou droite se produit quand une contre-pression oblige un écoulement supersonique à passer en subsonique (canal transsonique (Figure 3.1b), profil transsonique, diffuseurs supersoniques,...).

3.1 Onde de choc droite

Dans ce qui suit, nous allons admettre l'existence du choc en ne considérant qu'un état avant et un état après choc. La configuration que nous étudions est représentée sur la Figure 3.2. On consi-

dère l'onde de choc comme une surface de discontinuité perpendiculaire à l'écoulement, séparant la région amont (indice (1)) d'une région aval (indice (2)). Cette onde de choc est stationnaire, c'est-à-dire immobile par rapport au référentiel du laboratoire. Les hypothèses principales utilisées sont :

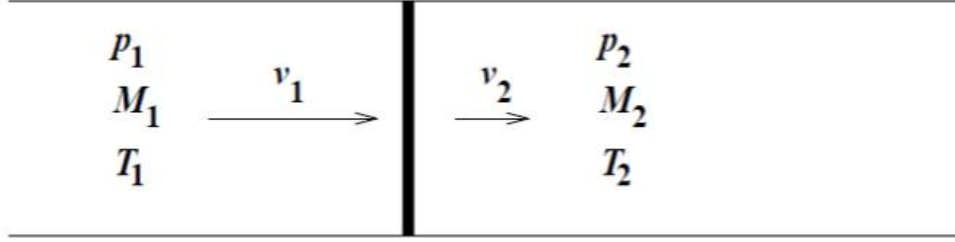


FIGURE 3.2 – Schéma de l'onde de choc droite.

- pas de forces de frottement, ni de forces de volume
- toutes les lignes de courant sont parallèles entre elles et perpendiculaires à la surface du choc
- il n'y a pas de réaction chimique ni d'apport de chaleur extérieur, et le fluide reste en équilibre thermodynamique.

Les équations de conservation appliquées à la surface de discontinuité deviennent alors :

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad (3.1)$$

en tenant compte du fait que la section reste constante $A_1 = A_2$,

$$\dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 = P_1 A_1 - P_2 A_2 \quad (3.2)$$

en considérant que le débit reste constant et que seules les forces de pression sont présentes, on a finalement pour le bilan de quantité de mouvement :

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 \quad (3.3)$$

$$H_{i1} = H_1 + \frac{V_1^2}{2} = H_2 + \frac{V_2^2}{2} = H_{i2} \quad (3.4)$$

en l'absence de travail et d'apport de chaleur. **L'enthalpie d'arrêt spécifique se conserve à la traversée d'une onde de choc. Si la gaz est calorifiquement parfait, la température génératrice se conserve.**

Nous pouvons particulariser ces équations bilans au cas du gaz parfait en y adjoignant l'équation d'état $P/\rho = rT$. Les relations de choc s'écrivent alors :

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad (3.5)$$

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 \quad (3.6)$$

$$C_p T_1 + \frac{V_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{V_2^2}{2} = C_p T_i \quad (3.7)$$

A partir de cet ensemble d'équation, on peut établir les relations suivantes :

$$V_1 V_2 = a_c^2 = \frac{2}{\gamma + 1} a_i^2 \quad (3.8)$$

c'est la relation de Prandtl qui montre que le produit des vitesses de part et d'autre d'une onde choc normale est égal au carré de la vitesse critique. La relation de Prandtl peut aussi s'écrire :

$$\frac{V_1}{a_c} \frac{V_2}{a_c} = M_1^* M_2^* = 1 \quad (3.9)$$

Or si $V/a_c < 1$, alors $M < 1$ et si $V/a_c > 1$, alors $M > 1$, on peut donc en conclure que les nombres de Mach de part et d'autre d'une onde de choc normale sont, l'un subsonique, l'autre supersonique.

L'équation bilan d'énergie devient alors :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \quad (3.10)$$

$$= \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + (\gamma-1) M_1^2}{(\gamma+1) M_1^2} \right] \quad (3.11)$$

De son côté, l'équation bilan de quantité de mouvement peut également se ramener à :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \quad (3.12)$$

L'équation d'état des gaz parfaits permet alors d'obtenir l'évolution de la masse volumique :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1) M_1^2}{2 + (\gamma-1) M_1^2} \quad (3.13)$$

Par simple manipulation, on peut ainsi obtenir la relation entre les nombres de Mach amont et aval au choc :

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}} \quad (3.14)$$

3.2 Onde de choc oblique

Lorsqu'on place un obstacle fixe dans un écoulement de gaz en régime supersonique, l'arrêt non isentropique du fluide se caractérise par l'apparition d'une onde de choc. Le choc droit étudié au

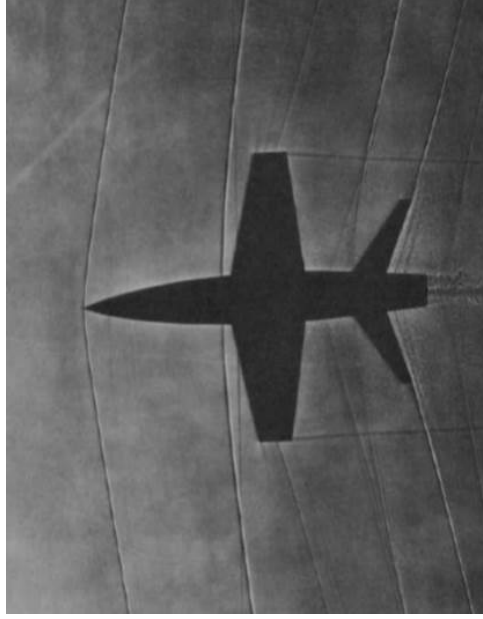


FIGURE 3.3 – Exemple de chocs obliques sur une maquette d’avion à Mach 1.1, observés par ombroscopie.

le chapitre précédent est un cas particulier d’une famille beaucoup plus large, les chocs obliques. Ceux-ci peuvent revêtir différentes formes. Ainsi, un choc oblique est créé lorsqu’un écoulement supersonique est défléchi (par un obstacle, Figure 3.3). Un écoulement supersonique de vitesse V_1 est défléchi par une rampe d’angle θ . Un choc oblique d’angle σ apparaît pour permettre à l’écoulement d’avoir une vitesse V_2 parallèle à la rampe. On décompose la vitesse V suivant la direction normale au choc V_n et la direction tangente au choc V_t (voir Figure 3.4). On choisit un volume de contrôle entourant le choc (voir Figure 3.4) et d’épaisseur fine. On intègre ensuite les équations de bilan stationnaire sur ce volume, en notant que pour la quantité de mouvement, le flux a 2 composantes. Les relations de bilan deviennent alors :

— bilan de masse :

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2} \quad (3.15)$$

— bilan de quantité de mouvement suivant la normale :

$$\rho_1 V_{n1}^2 + P_1 = \rho_2 V_{n2}^2 + P_2 \quad (3.16)$$

— bilan de quantité de mouvement suivant la tangente :

$$\rho_1 V_{n1} V_{t1} = \rho_2 V_{n2} V_{t2} \quad (3.17)$$

— conservation de l’enthalpie totale :

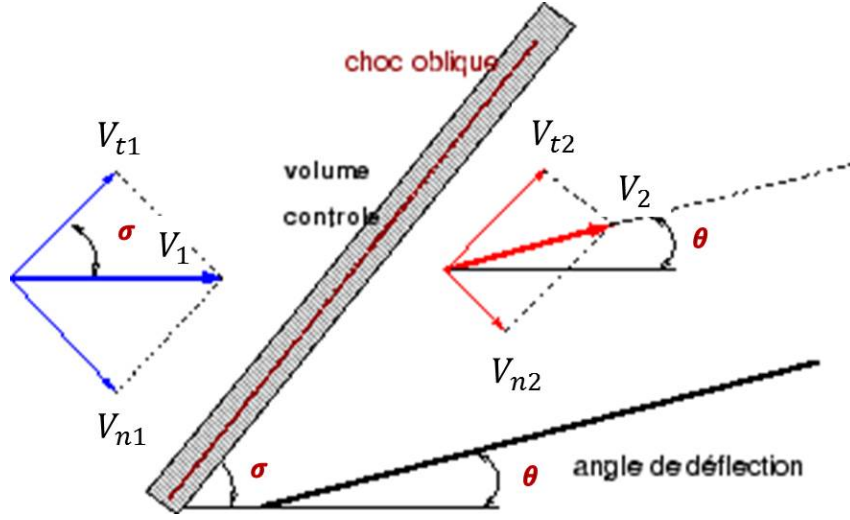


FIGURE 3.4 – Schéma de l'onde de choc oblique.

$$H_1 + \frac{V_{n1}^2 + V_{t1}^2}{2} = H_2 + \frac{V_{n2}^2 + V_{t2}^2}{2} \quad (3.18)$$

En utilisant l'équation (3.15), la relation (3.17) implique la conservation de la vitesse tangentielle $V_{t1} = V_{t2}$, et on constate alors que le système d'équation est identique à celui du choc droit, en remplaçant simplement dans les équations les vitesses V_1 et V_2 par les vitesses normales $V_{n1} = V_1 \sin \sigma$ et $V_{n2} = V_2 \sin(\sigma - \theta)$ et le nombre de Mach M_1 par le nombre de Mach "normal" $M_{n1} = \frac{V_{n1}}{a_1} = M_1 \sin \sigma$ et le nombre de Mach M_2 par le nombre de Mach "normal" $M_{n2} = \frac{V_{n2}}{a_2} = M_2 \sin(\sigma - \theta)$.

De cette analogie avec le choc droit, on en déduit que pour un choc oblique, le Mach "normal" aval M_{n2} doit être subsonique, mais l'écoulement aval peut rester supersonique (et le reste en général). L'angle de déflexion de l'écoulement θ vérifie :

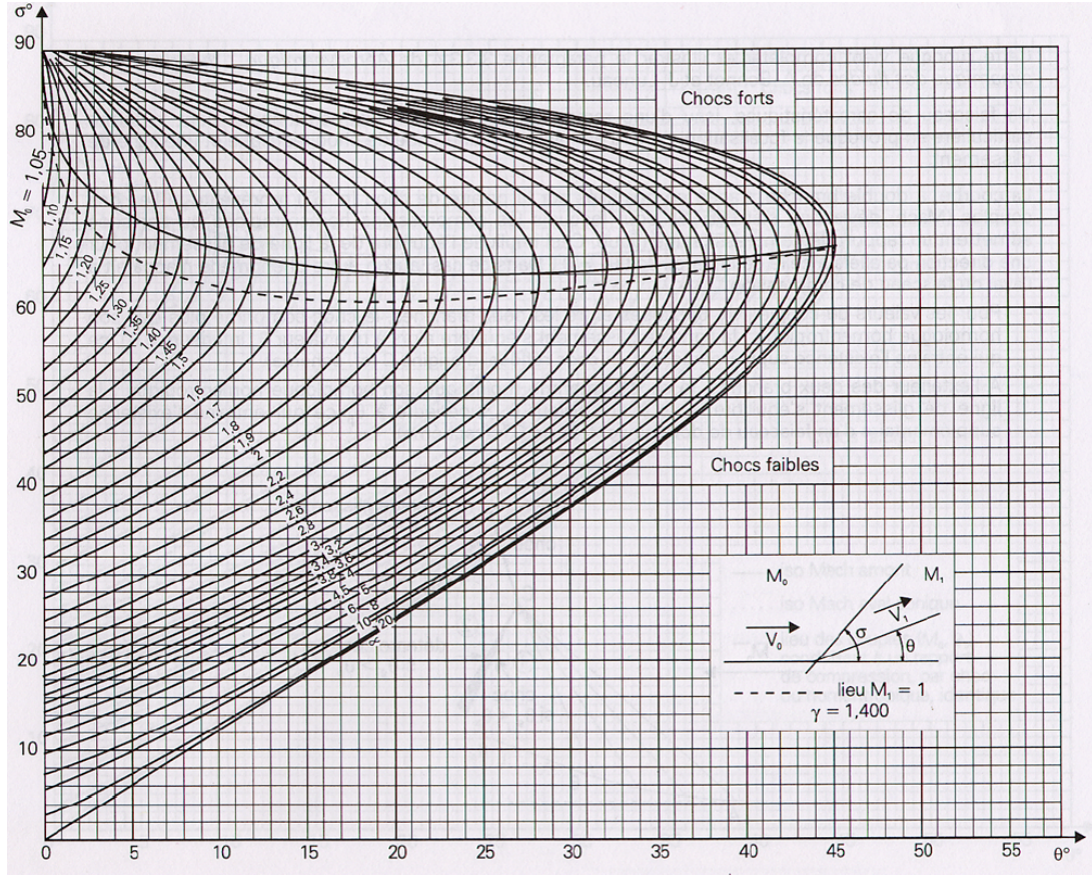
$$\frac{\tan(\sigma - \theta)}{\tan \sigma} = \frac{V_{t1}}{V_{n1}} \frac{V_{n2}}{V_{t2}} = \frac{V_{n2}}{V_{n1}} \quad (3.19)$$

En reprenant les relations obtenues pour le choc droit, sachant que $V_{n2}/V_{n1} = \rho_1/\rho_2$, on obtient la relation suivante :

$$\frac{\tan(\sigma - \theta)}{\tan \sigma} = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \left[1 + \frac{2}{(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \sigma} \right] \quad (3.20)$$

On peut ainsi tracer la polaire de choc dans le plan [angle de déflexion, angle de choc] pour un nombre de Mach amont donné (Figure 3.5). Quand le nombre de Mach tend vers l'infini, l'équation du choc oblique prend la forme limite :

$$\frac{\tan(\sigma - \theta)}{\tan \sigma} = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \quad (3.21)$$

FIGURE 3.5 – Polaire de choc pour un gaz tel que $\gamma = 1,4$.

qui définit la polaire limite du plan $[\sigma, \theta]$. Quand $\theta \rightarrow 0$, cette relation devient :

$$\tan \sigma = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \tan \sigma \quad (3.22)$$

qui est satisfaite pour $\tan \sigma = 0$, soit $\sigma = 0$ (valeur limite de l'angle de Mach quand le nombre de Mach tend vers l'infini), et $\sigma \rightarrow \infty$, soit $\sigma = \frac{\pi}{2}$ (choc droit). On peut noter également qu'un angle limite θ_{max} est obtenu pour chaque valeur de M_1 , au dessus duquel il n'y a plus de solutions. Le maximum de chaque courbe est représenté par la courbe en trait plein (Figure 3.5). Si $\theta = \theta_{max}(M_1)$, une unique solution existe, si $0 < \theta < \theta_{max}(M_1)$, deux solutions existent $\arcsin(1/M_1) \leq \sigma_- < \sigma_+ \leq \pi/2$ sont prédites. Comme P_2/P_1 , donné en (xxx) est une fonction croissante de $M_1 \sin(\sigma)$, $P_2(\sigma_-) > P_2(\sigma_+)$. On parle de choc fort pour la solution σ_+ , et de choc faible pour σ_- . En dehors, de conditions particulières imposées à l'aval, des considérations de stabilité favorisent la solution de choc faible. Sur la Figure 3.5, nous avons également reporté le lieu des points soniques de l'écoulement aval (cas où $M_2 = 1$, ligne en pointillé) et de déflexion maximale θ_{max} . On vérifie que ces deux points sont voisins, l'état aval sonique se rencontrant avant la déflexion maximale.

Chapitre 4

Ecoulements supersoniques stationnaires bidimensionnels et théorie des caractéristiques

4.1 Introduction

La méthode des caractéristiques s'applique aux écoulements stationnaires, bidimensionnel plan ou de révolution d'un fluide non-visqueux. Cet écoulement doit en plus être supersonique. Sa théorie conduit à une méthode de calcul très efficace en bidimensionnel qui permet une résolution numérique des équations d'Euler. Du point de vue pratique, la méthode des caractéristiques consiste à calculer les propriétés de l'écoulement par une construction de proche en proche à partir de données initiales et des conditions aux limites. Les hypothèses de travail sont les suivantes : le fluide est non-visqueux et non conducteur de la chaleur, l'écoulement est stationnaire et adiabatique. Nous nous limiterons au cas du gaz calorifiquement parfait.

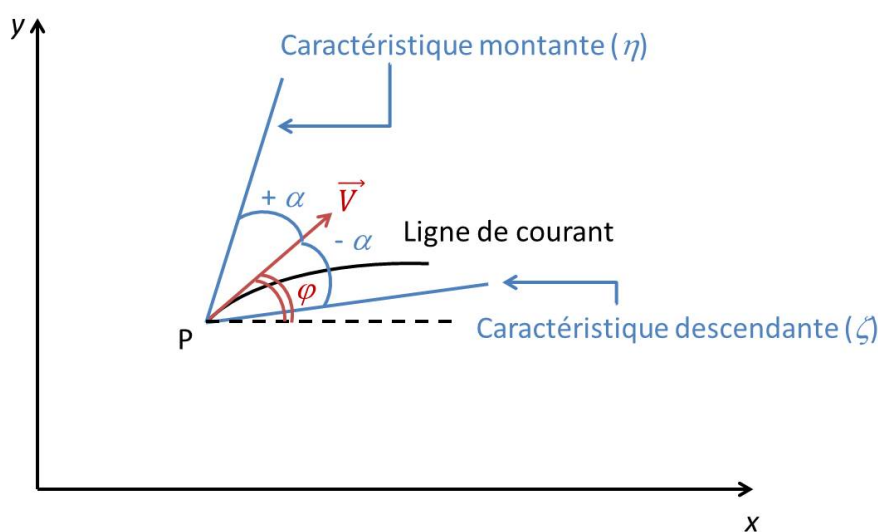


FIGURE 4.1 – Lignes caractéristiques en un point P.

En tout point P d'un écoulement supersonique, on peut définir deux directions particulières faisant les angles α et $-\alpha$ par rapport à la direction du vecteur-vitesse, α étant l'angle de Mach $\alpha = \arcsin(1/M)$. Ces deux directions de Mach $\zeta(-\alpha)$ et $\eta(+\alpha)$ sont aussi appelées caractéristiques, descendante et montante respectivement (Figure 4.1). Dans le cas d'un écoulement plan, on peut montrer que :

— sur la ligne de Mach $\zeta(-\alpha)$

$$\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\gamma M^2} \frac{dP}{P} - d\varphi = 0 \quad (4.1)$$

— sur la ligne de Mach $\eta(+\alpha)$

$$\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\gamma M^2} \frac{dP}{P} + d\varphi = 0 \quad (4.2)$$

où φ représente l'angle du vecteur vitesse par rapport à une direction fixe de référence (Figure 4.1). Ces relations doivent être satisfaites par un écoulement plan supersonique sur les lignes caractéristiques.

Si l'écoulement est isentropique :

$$\frac{P}{P_i} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \quad (4.3)$$

D'où, puisque la pression génératrice est constante :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\gamma M dM}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \quad (4.4)$$

et :

$$\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\gamma M^2} \frac{dP}{P} = -\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (4.5)$$

Introduisons la fonction $\mathbb{P}(M, \gamma)$ telle que :

$$d\mathbb{P} = -\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\gamma M^2} \frac{dP}{P} \quad (4.6)$$

Sa primitive est :

$$\mathbb{P}(M, \gamma) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1)} - \arctan \sqrt{M^2 - 1} \quad (4.7)$$

Telle qu'elle est définie ici, la fonction $\mathbb{P}(M, \gamma)$ est une fonction croissante du nombre de Mach M . Elle est nulle pour $M = 1$, sa dérivée $d\mathbb{P}/dM$ valant zéro pour $M = 1$. Elle tend vers une

limite finie quand le nombre de Mach tend vers l'infini. Cette limite est :

$$\mathbb{P}_{max}(\gamma) = \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right) \times 90^\circ = 130,45^\circ \quad \text{pour } \gamma = 1,4 \quad (4.8)$$

Cette fonction, appelée nombre de pression de Busemann ou angle de Prandtl-Mayer, est souvent fournie sous forme tabulée en fonction du nombre de Mach pour un γ donné. En définitive, les relations caractéristiques pour le cas plan et un gaz calorifiquement parfait peuvent s'intégrer pour donner les deux équations suivantes :

$$\mathbb{P}(M, \gamma) - \varphi = Cste \quad \text{sur une caractéristique montante } (\eta) \quad (4.9)$$

$$\mathbb{P}(M, \gamma) + \varphi = Cste \quad \text{sur une caractéristique descendante } (\zeta) \quad (4.10)$$

Sauf cas particuliers (écoulements uniformes ou par ondes simples), la constante varie d'une caractéristique à l'autre.

4.2 Applications de la théorie des caractéristiques

4.2.1 L'onde simple de détente

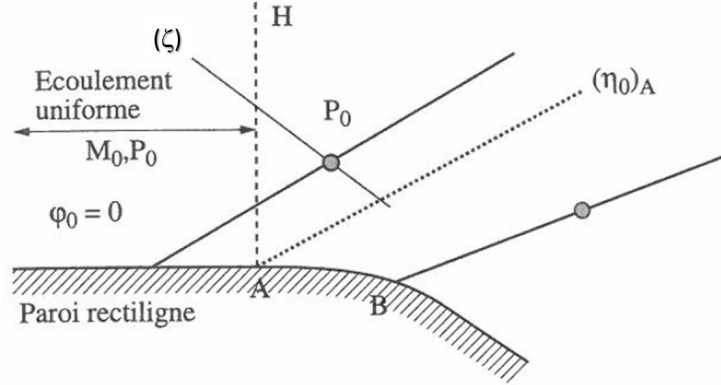


FIGURE 4.2 – Extension de la zone d'écoulement uniforme.

Nous allons considérer le cas d'une onde simple de détente (Figure 4.2). Dans la région (0), l'écoulement est supposé uniforme et supersonique. Par commodité, nous supposons que cet écoulement est horizontal tel que $\varphi_0 = 0^\circ$. A partir du point A, la paroi s'incurve, son angle φ (par rapport à l'horizontal) devient négatif comme indiqué sur la Figure 4.2. En un point B, la paroi redevient rectiligne avec une inclinaison d'angle φ_1 par rapport à l'horizontal. On va analyser ici l'écoulement s'établissant le long de cette paroi.

Si l'écoulement est isentropique, les équations du mouvement se ramènent aux deux équations caractéristiques (Eqs. 4.10). Si on considère le point P_0 situé en amont de la caractéristique montante η_0 passant par A, la caractéristique η passant par P_0 vient d'un point à la paroi, situé en amont de A, où la direction de la vitesse est $\varphi = \varphi_0$ (ici $\varphi_0 = 0^\circ$ par commodité). La ζ passant par P_0 provient quant à elle de la région en amont (0) où l'écoulement est uniforme. En

conséquence, nous pouvons écrire que :

$$\mathbb{P}(M_{P_0}, \gamma) - \varphi_{P_0} = \mathbb{P}(M_0) - \varphi_0 = \mathbb{P}(M_0) \quad (\eta) \quad (4.11)$$

$$\mathbb{P}(M_{P_0}, \gamma) + \varphi_{P_0} = \mathbb{P}(M_0) + \varphi_0 = \mathbb{P}(M_0) \quad (\zeta) \quad (4.12)$$

Ce qui conduit après manipulation à :

$$\mathbb{P}(M_{P_0}, \gamma) = \mathbb{P}(M_0) \quad (4.13)$$

$$\varphi_{P_0} = \varphi_0 = 0 \quad (4.14)$$

On peut donc en conclure que l'écoulement reste uniforme et identique à l'état (0) tant que P_0 est situé en amont (η_0), autrement dit tant que la caractéristique montante (η) passe par un point de la paroi situé en amont de A . En d'autres termes, si un écoulement est uniforme dans une section AH perpendiculaire à la paroi en A , il l'est aussi jusqu'à la caractéristique montante (η_0) issue de A . Physiquement, ce fait traduit le phénomène de propagation : une perturbation en un point A ne se fait sentir dans l'écoulement contigu qu'en aval de la caractéristique, ici montante, issue du point A , c'est-à-dire du point où la perturbation se manifeste. Tant qu'il ne rencontre pas l'onde (η_0), l'écoulement "ignore" que quelque chose vient de se passer à la paroi.

Nous savons qu'une caractéristique fait localement l'angle de Mach $+\alpha$ ou $-\alpha$ selon sa nature par rapport au vecteur-vitesse. Sa pente relativement à un axe de référence (ici l'horizontal, Figure 4.2) sera donc :

$$\Psi = \varphi + \alpha \quad \text{pour une caractéristique montante}(\eta) \quad (4.15)$$

$$\Psi = \varphi - \alpha \quad \text{pour une caractéristique descendante}(\zeta) \quad (4.16)$$

$$(4.17)$$

Dans un écoulement uniforme, les caractéristiques montantes et descendantes sont donc rectilignes et parallèles entre elles puisque α et φ ont partout la même valeur.

Si l'on considère les différents points de la Figure 4.3 : P_1 est un point tel que sa (η) passe par un point Q_1 à la paroi dans sa partie incurvée ainsi que P_2 , un point appartenant à la même caractéristique montante η que P_1 , alors on peut écrire que :

$$\mathbb{P}(M_{P_1}, \gamma) - \varphi_{P_1} = \mathbb{P}(M_{Q_1}) - \varphi_{Q_1} \quad \text{sur } (\eta_{P_1 Q_1}) \quad (4.18)$$

$$\mathbb{P}(M_{P_1}, \gamma) + \varphi_{P_1} = \mathbb{P}(M_0) + \varphi_0 = \mathbb{P}(M_0) \quad \text{sur } (\zeta_{P_1}) \quad (4.19)$$

$$\mathbb{P}(M_{P_2}, \gamma) - \varphi_{P_2} = \mathbb{P}(M_{Q_1}) - \varphi_{Q_1} \quad \text{sur } (\eta_{P_2 Q_1}) \quad (4.20)$$

$$\mathbb{P}(M_{P_2}, \gamma) + \varphi_{P_2} = \mathbb{P}(M_0) \quad \text{sur } (\zeta_{P_2}) \quad (4.21)$$

En comparant ces relations, on voit aisément que :

$$\mathbb{P}(M_{P_1}, \gamma) = \mathbb{P}(M_{P_2}, \gamma) = \mathbb{P}(M_{Q_1}, \gamma) \quad (4.22)$$

$$\varphi_{P_1} = \varphi_{P_2} = \varphi_{Q_1} \quad (4.23)$$

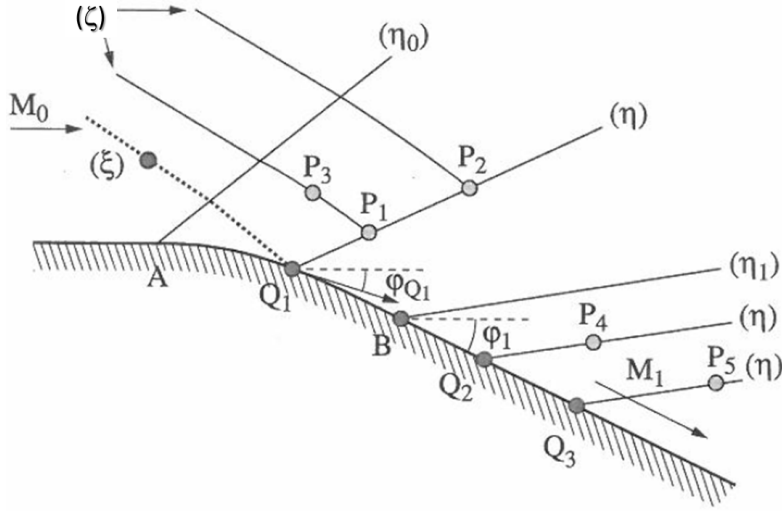


FIGURE 4.3 – Détente progressive sur une paroi convexe.

L'écoulement a donc des propriétés constantes le long des caractéristiques (η) rencontrant la paroi entre A et B (ces propriétés changent d'une (η) à l'autre). Si le nombre de Mach est constant sur une (η) , il en est de même de l'angle de Mach : donc la pente $\Psi = \alpha + \varphi$ est constante. Les caractéristiques montantes (η) sont rectilignes (ce qui n'est pas le cas des (ζ)). Un tel écoulement où une famille de caractéristiques est rectiligne est appelé une onde simple.

Dans le cas qui nous intéresse, la région d'ondes simples est limitée par la caractéristique amont (η_0) passant par le point A avec pour pente $\Psi_0 = \alpha_0 + \varphi_0 = \alpha_0$. L'onde finale (η_1) , issue du point B , a pour pente $\Psi_1 = \alpha_1 + \varphi_1$. Par ailleurs, si on considère la caractéristique descendante (ζ) aboutissant en Q_1 et provenant de la région amont uniforme, nous avons :

$$\mathbb{P}(M_{Q_1}, \gamma) = \mathbb{P}(M_0) - \varphi_{Q_1} \quad \text{sur } (\zeta_{Q_1}) \quad (4.24)$$

Comme l'angle de la paroi φ_{Q_1} est, dans le cas présenté, négatif, il s'ensuit que $\mathbb{P}(M_{Q_1}, \gamma) > \mathbb{P}(M_0)$ et donc que :

$$M_{Q_1} > M_0$$

L'écoulement se détend continûment le long de l'arc AB . Soit maintenant un point P_3 sur la même (ζ) que P_1 , mais situé sur une (η) plus en amont comme indiqué sur la Figure 4.3. Nous avons la relation :

$$\mathbb{P}(M_{P_3}, \gamma) + \varphi_{P_3} = \mathbb{P}(M_{P_1}, \gamma) + \varphi_{P_1} \quad (4.25)$$

D'où :

$$\mathbb{P}(M_{P_3}, \gamma) = \mathbb{P}(M_{P_1}, \gamma) + \varphi_{P_1} - \varphi_{P_3} \quad (4.26)$$

Or la paroi étant convexe, $\varphi_{P_1} - \varphi_{P_3}$ est négatif, il en résulte donc que $\mathbb{P}(M_{P_1}, \gamma) > \mathbb{P}(M_{P_3}, \gamma)$.

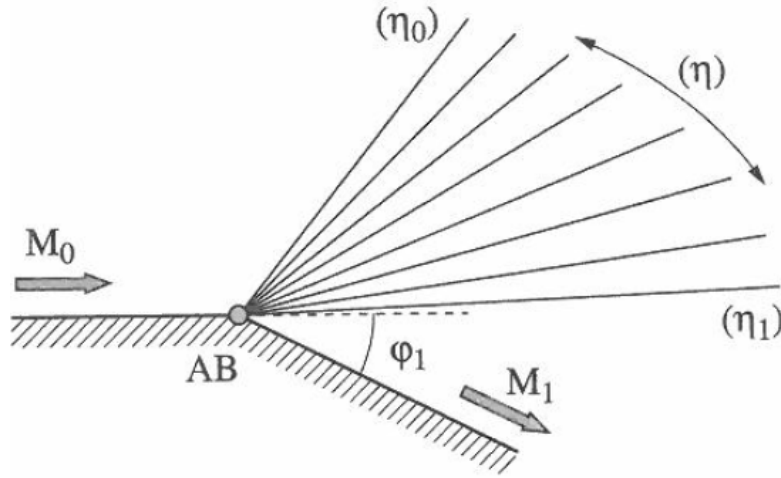


FIGURE 4.4 – Détente centrée de Prandtl-Mayer.

Sachant que $\mathbb{P}(M, \gamma)$ est une fonction croissante du nombre de Mach M , on en déduit que $M_1 > M_3$.

Ainsi quand on se déplace le long d'une (ζ) dans le sens amont-aval, la pression diminue, on a affaire à une onde détente. On peut aussi démontrer que la pente $\Psi = \alpha + \varphi$ des ondes (η) diminue entre (η_0) et (η_1) : **les caractéristiques (η) forment un faisceau d'ondes divergentes.**

En ce qui concerne l'écoulement en aval de la caractéristique (η_1) provenant du point B , nous pouvons en déduire que :

$$M_{P_4} = M_{Q_2}, \quad \varphi_{P_4} = \varphi_1$$

$$M_{P_5} = M_{Q_3}, \quad \varphi_{P_5} = \varphi_1$$

$$M_{P_5} = M_{P_4}, \quad \varphi_{P_5} = \varphi_{P_4}$$

En aval de l'onde finale (η_1), l'écoulement est uniforme (si la paroi en aval de B est rectiligne). Son nombre de Mach M_1 peut se calculer en fonction de la déflexion $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ à partir de :

$$\mathbb{P}(M_1, \gamma) = \mathbb{P}(M_0, \gamma) - \varphi_1 + \varphi_0 \quad (4.27)$$

Par convention, pour $M = 1$ et $\phi = 0$, on prend $\mathbb{P} = 1000$ (convention de Busemann).

4.2.2 Cas limite de la détente de Prandtl-Mayer

Si la longueur de l'arc AB est diminuée, la déflexion φ_1 demeurant inchangée, l'onde de détente se resserre à sa base, les ondes (η_0) et (η_1) gardant des directions constantes. Il est possible d'envisager le cas limite où la longueur AB devient nulle, la paroi comporte alors en A un changement brusque de direction $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$. L'écoulement qui en résulte est appelé **détente de Prandtl-Mayer** et est représenté sur la Figure 4.4. Les caractéristiques (η), constituant l'onde simple de détente, émanent toutes de la cassure A pour former un faisceau ou un éventail, d'ondes

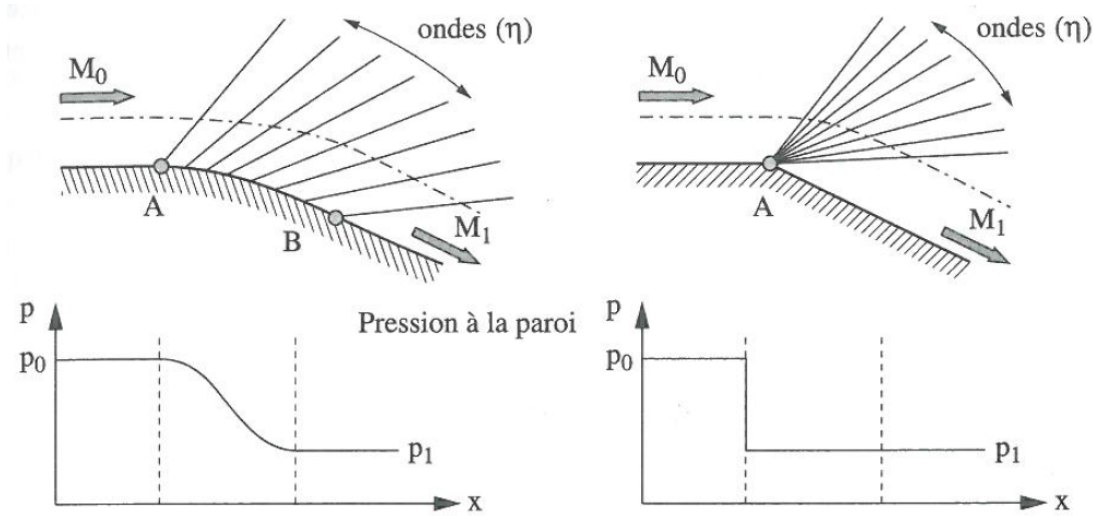


FIGURE 4.5 – Détente centrée de Prandtl-Mayer.

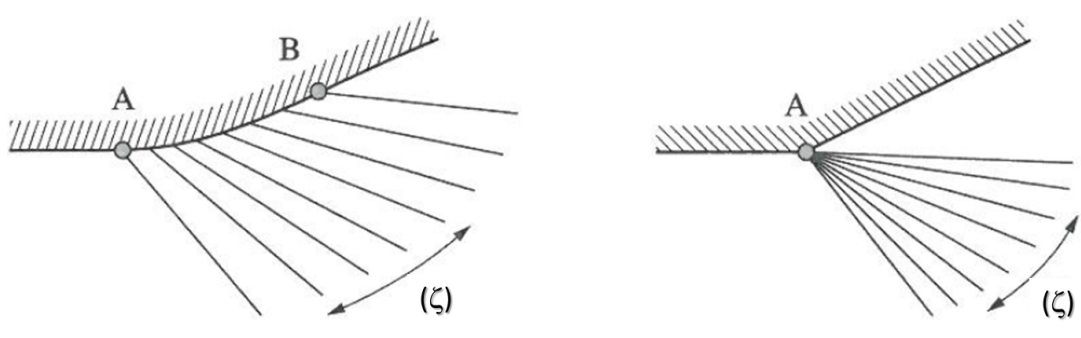


FIGURE 4.6 – Onde de détente "vers le bas".

centrées. Le point A est un point particulier où sont confondus tous les états intermédiaires entre les écoulements amont et aval.

La Figure 4.5 montre les deux types de détente, avec les distributions de pression correspondantes à la paroi.

Dans ce qui précède, nous avons détaillé le cas d'une paroi située "en bas", en conséquence, les ondes de détentes sont des caractéristiques montantes (η). Il est bien évident que l'on peut traiter de façon analogue le cas où la paroi est "en haut". Les ondes de détente sont alors des caractéristiques descendantes (ζ) (voir Figure 4.6).

4.2.3 Onde de dérangement

Pour une faible détente $\Delta\varphi$, on pourra assimiler l'éventail de détente à une onde de dérangement correspondant à la bissectrice des ondes extrêmes de l'éventail. L'inclinaison de cette onde par rapport à l'horizontale est :

$$\alpha_{01} = \frac{(\varphi_0 + \alpha_0) + (\varphi_1 + \alpha_1)}{2}$$

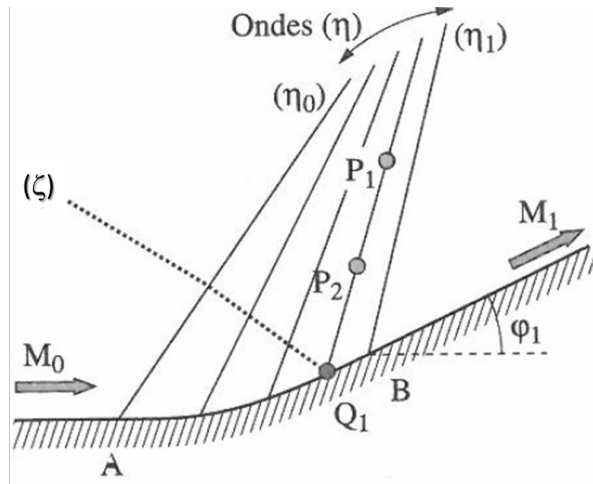


FIGURE 4.7 – Onde simple de compression.

dans le cas de caractéristique montante,
et

$$\alpha_{01} = \frac{(\varphi_0 - \alpha_0) + (\varphi_1 - \alpha_1)}{2}$$

dans le cas de caractéristique descendante.

On pourra discrétiser en détente à grande déviation en détentes élémentaires $\Delta\varphi_i$ (1 à 2°) et assimiler chacun des détentes élémentaires à l'onde de dérangement. Cette méthode pourra être également utilisée pour le traitement des parois courbes de type tuyère.

Rappelons que d'une manière générale, pour amener un écoulement des conditions critiques ($M = 1$) à $M > 1$, il faut lui appliquer une déviation totale donnée par :

$$\delta = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)} + \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \right) - \frac{\pi}{2} \quad (4.28)$$

4.2.4 Compression par ondes simples

Dans ce cas, l'inclinaison des caractéristiques montantes (η) (Figure 4.7), $(\alpha + \varphi)$ (avec $\varphi > 0$) augmente au cours de la compression. Le faisceau des droites (η) est alors convergent, et lorsque ces droites se rencontrent, la méthode précédente n'est plus applicable. Il faut alors utiliser les équations du choc oblique et la polaire de choc.

Chapitre 5

Analogie Mach-Froude

Il est souvent très onéreux d'utiliser une soufflerie supersonique pour étudier l'écoulement d'un gaz compressible. Un moyen plus rapide et moins lourd est l'observation de l'écoulement d'un film liquide à surface libre. On parle alors d'une analogie Mach-Froude. Pour comprendre le principe de cette analogie, nous allons rappeler les équations de bilan dans les deux configurations : écoulement d'un gaz parfait compressible et écoulement d'un film liquide à surface libre.

5.1 Similitude des équations

5.1.1 Écoulement d'un gaz parfait compressible

Nous rappelons ici les équations de bilan pour un écoulement bidimensionnel permanent d'un gaz calorifiquement parfait où les frottements sont négligés :

— Conservation de l'énergie :

$$H + \frac{V^2}{2} = H_i \quad (5.1)$$

— Conservation de la masse :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (5.2)$$

— Équation d'état dans le cas de transformations isentropiques :

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_i}{\rho_i^\gamma} \quad (5.3)$$

Soit en utilisant l'équation d'un gaz parfait : $\frac{\rho_i}{\rho} = \left(\frac{T_i}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$ ou $\frac{P_i}{P} = \left(\frac{T_i}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. On se souviendra également que la vitesse du son est donnée par $a = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \sqrt{\gamma r T}$. Le nombre de Mach M est alors défini comme le rapport entre la vitesse locale de l'écoulement et la célérité locale du son.

5.1.2 Écoulement d'un film liquide à surface libre

On s'intéresse ici à l'écoulement d'un film liquide dans un canal horizontal. On considère que l'écoulement est quasi-bidimensionnel, c'est à dire :

- les composantes verticales du vecteur vitesse et de l'accélération sont nulles
- la distribution verticale de pression est hydrostatique
- la vitesse est invariante dans l'épaisseur du film

Soit $h(x, y)$ la hauteur locale du film. Les équations décrivant cet écoulement sont :

- Conservation de l'énergie :

$$h_i = h + \frac{V^2}{2g} \quad (5.4)$$

- Conservation de la masse

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (5.5)$$

De façon analogue à la vitesse de propagation d'une petite perturbation de pression (vitesse du son), on introduit la vitesse de propagation des ondes de gravité $a = \sqrt{gh}$. On introduit ainsi le nombre de Froude comme le rapport entre la vitesse locale dans le film liquide et la vitesse des ondes de gravité : $Fr = \frac{V}{\sqrt{gh}}$.

5.2 Tableau d'analogie

Les bases de l'analogie entre l'écoulement d'un gaz compressible et celui d'un film liquide s'appuient sur l'observation des équations de conservation de l'énergie qui peuvent être réécrites comme suit :

$$\frac{H_i}{H} = \frac{T_i}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (5.6)$$

$$\frac{h_i}{h} = 1 + \frac{1}{2} Fr^2 \quad (5.7)$$

Le nombre de Froude joue le même rôle que le nombre de Mach et l'analogie est établie pour un gaz hypothétique, dit gaz "hydraulique", pour lequel $\gamma = 2$. On peut dresser le tableau d'analogie suivant :

Gaz compressible	Film liquide
Mach $M = V/a = V/\sqrt{\gamma r T}$	Froude $Fr = V/a = V/\sqrt{gh}$
T/T_i	h/h_i
P/P_i	$(h/h_i)^2$
ρ/ρ_i	h/h_i
Régime subsonique ($M < 1$)	Régime fluvial ($Fr < 1$)
Régime supersonique ($M > 1$)	Régime torrentiel ($Fr > 1$)
Onde choc	Ressaut hydraulique

Chapitre 6

Dispositifs expérimentaux et conduite du projet

Dans les parties précédentes, nous avons présenté synthétiquement les éléments théoriques auxquels se référer pour appréhender le thème sur la dynamique des gaz compressibles. La conduite d'un projet s'appuie sur deux installations expérimentales :

- **Le banc de tuyère à gaz**
- **Le canal d'analogie hydraulique**

Nous allons brièvement présenter ces deux installations expérimentales.

6.1 Le banc de tuyère à gaz

Sur la Figure 6.1, on peut le schéma d'ensemble de l'installation qui permet de vérifier les lois gouvernant l'écoulement des fluides compressibles non-visqueux à la travers la tuyère. Le dispositif expérimentale se compose :

- Une chambre amont : grâce au réseau d'air comprimé et d'un détendeur placé en entrée de la chambre, on peut contrôler la pression d'alimentation de la tuyère (pression génératrice),
- Une tuyère : la tuyère à étudier est vissée verticalement à la base de la chambre d'alimentation. Quatre profils sont à disposition pour l'étude,
- Une sonde cylindrique qui peut être déplacée sur l'axe de la tuyère. Elle permet les mesures de pression dans chaque section droite de la tuyère. En effet, la sonde est fixée sur un chariot, situé au-dessus de la chambre, grâce auquel elle peut être déplacée. Un manomètre associé à la sonde indique la pression.
- Un manomètre auxiliaire indique la pression à l'intérieur de la chambre.
- Sous la chambre, la tuyère débite dans un tube vertical équipé d'une vanne permettant de fixer la pressions aval ou de sortie de tuyère.
- Un diaphragme placé sur le tube en aval de la tuyère permet de mesurer le débit massique à travers la tuyère. Un manomètre incliné permet le relevé de la chute de pressions générée par le diaphragme.

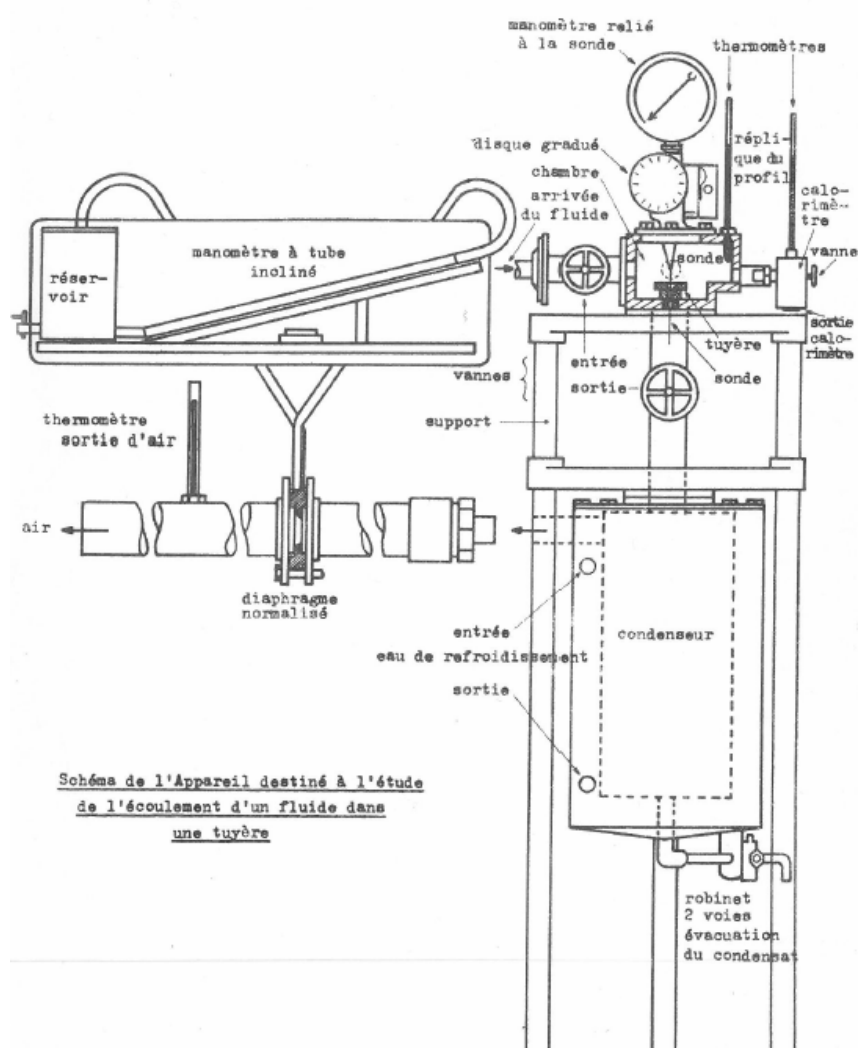


FIGURE 6.1 – Dispositif destiné à l'étude des tuyères.

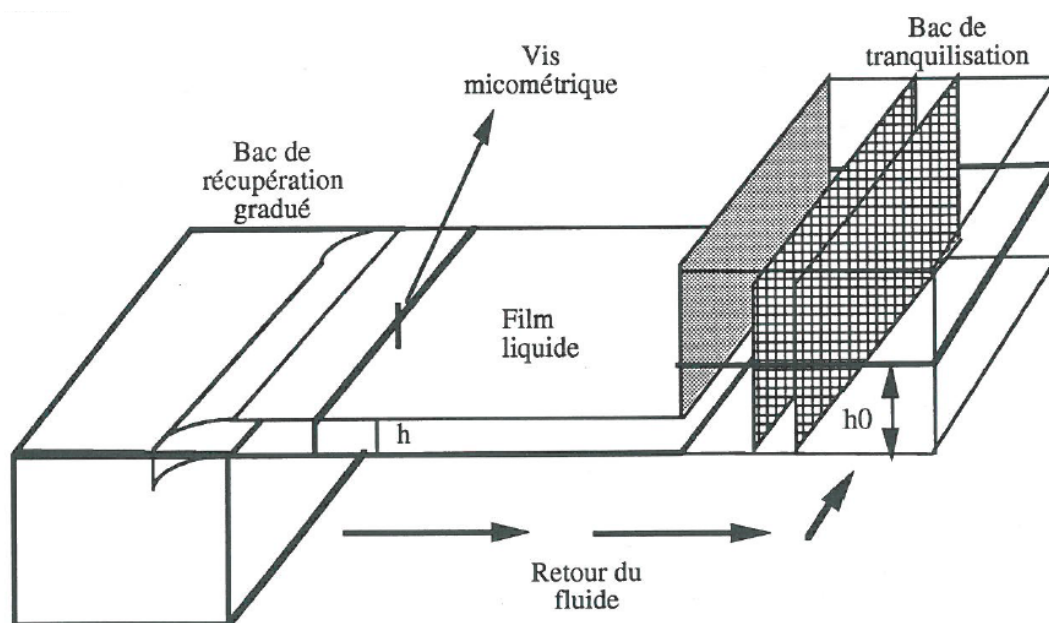


FIGURE 6.2 – Canal d'analogie Mach-Froude.

6.2 Le canal d'analogie hydraulique

Le dispositif d'essai est un canal plan où l'eau évolue en circuit fermé (Figure 6.2). Il comprend :

- une cuve de tranquillisation en amont
- un sas d'alimentation où l'on peut faire varier la hauteur génératrice h_i
- une vanne coulissante ou guillotine, permettant de régler le débit et l'épaisseur de film
- une pointe munie d'une vis micrométrique permettant de mesurer la hauteur locale du film d'eau
- un bac de récupération gradué en aval, permettent de mesurer par chronométrage le débit

6.3 Quelques pistes de projets possibles

6.3.1 Étude d'une tuyère

Le fonctionnement d'une tuyère de Laval (convergente-divergente) est conditionné par le rapport de la pression dans le plan d'entrée à la pression dans le plan de sortie.

On peut dans un premier temps, vérifier les relations issues de la théorie par des mesures effectuées sur une tuyère en écoulement gazeux.

Dans une seconde phase, le fonctionnement d'une tuyère bidimensionnelle peut être réalisé dans la cuve d'analogie hydraulique. Cette étude peut prendre plusieurs aspects :

- le profil de la tuyère est donné : on peut alors calculer l'écoulement dans le divergent à l'aide de la méthode des caractéristiques.
- on dimensionne la tuyère pour fournir un nombre de Mach donné et uniforme dans le plan de sortie. Il faut alors définir le profil de la tuyère grâce à la méthode des caractéristiques.
- on pourra poursuivre l'étude à l'analyse du jet supersonique issu de la tuyère. Plusieurs

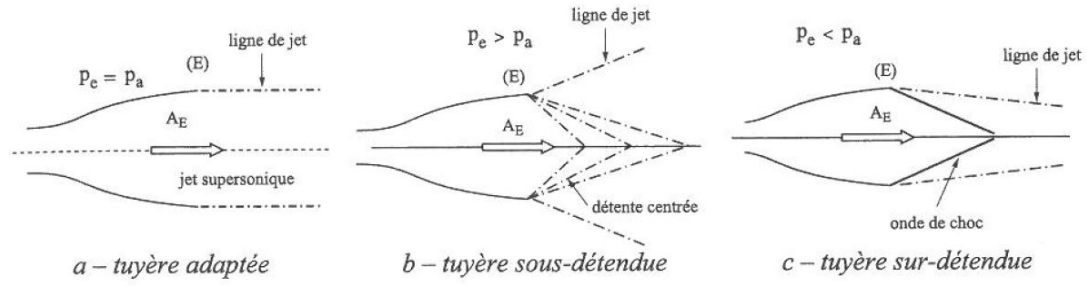


FIGURE 6.3 – Canal d'analogie Mach-Froude.

situations peuvent être imposées : tuyère sous-détendue et sur-détendue suivant les conditions de pression en sortie de la tuyère (Figure 6.3).

6.3.2 Étude d'écoulement externe : aérodynamique compressible

Dans la cuve d'analogie hydraulique, tout type de profils peut être envisagé pour s'initier par l'observation à l'aérodynamique compressible en particulier : aile d'avion, aile en flèche, projectile balistique,...Le relevé des hauteurs d'eau autour du profil permet d'appréhender le champ de pression autour de l'obstacle et ainsi estimer les efforts de portance et de traînée. On pourra réaliser l'étude ces profils en régime subsonique, en régime transsonique et en régime supersonique. Dans ce dernier cas, on pourra étendre l'étude à l'analyse des ondes de choc oblique qui apparaîtront lors du développement de l'écoulement autour des profils.

Chapitre 7

Quelques références bibliographiques

Les références proposées sont des lectures de différents niveaux. En plus de ces ouvrages il est possible de consulter les ouvrages de la bibliothèque des TP.

- Traité d'aérodynamique compressible - Volume 1, Notions fondamentales d'aérodynamique ; J. Délery, Hermes Science Publications
- Traité d'aérodynamique compressible - Volume 2, Écoulements monodimensionnels stationnaires et surfaces de discontinuité ; J. Délery, Hermes Science Publications
- Traité d'aérodynamique compressible - Volume 3, Applications de la théorie des caractéristiques et écoulements transsoniques ; J. Délery, Hermes Science Publications
- Hydraulique fluviale ; W. H. Graf, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes
- Aérodynamique expérimentale ; P. Rebuffet, Dunod
- Mécanique - Volume 2 ; P. Germain, Ecole Polytechnique, Ellipses

Deuxième partie

Thème instabilités hydrodynamiques et turbulence

Ce thème a pour objectif d'introduire des notions de stabilité des écoulements et de turbulence. Le point de vue adopté n'est pas de détailler l'arsenal théorique disponible pour l'étude des instabilités hydrodynamiques et des écoulements turbulents, mais plutôt de transmettre aux étudiants une représentation intuitive et physique de ces phénomènes.

Cette partie est découpée en trois chapitres. Le premier concerne l'étude des instabilités hydrodynamiques. Les notions essentielles sont introduites progressivement à l'aide d'exemples simples. Le deuxième chapitre porte sur les écoulements turbulents. On introduira les notions fondamentales à la compréhension de ces écoulements particuliers. Le dernier chapitre présente l'ensemble des dispositifs expérimentaux relatifs aux chapitres précédents.

Chapitre 1

Instabilités hydrodynamiques

Les instabilités hydrodynamiques occupent une place de choix en mécanique des fluides. Depuis Osborne Reynolds et G. I. Taylor, on sait que la transition d'un écoulement laminaire vers la turbulence est due au caractère instable de l'état laminaire vis-à-vis de certaines perturbations infinitésimales ou d'amplitude finie.

Ces transitions, ou instabilités, sont présentes dans une grande variété d'écoulements en génie mécanique, en génie chimique, en aérodynamique ou bien encore dans l'étude des phénomènes naturels comme la climatologie, météorologie et géophysique. Il est donc primordial de comprendre le déclenchement et l'évolution de ces instabilités pour prédire, anticiper et contrôler le comportement des écoulements.

1.1 Notions élémentaires sur les systèmes dynamiques.

Nous abordons ici, de façon très simplifiée, la théorie des bifurcations. Les bifurcations recouvre l'étude des changements qualitatifs de solutions d'un système non-linéaire en fonction de ses paramètres de contrôle. Le changement de solution est dit qualitatif lorsque le système passe brutalement d'une solution à une autre pour une valeur critique du paramètre de contrôle. Prenons par exemple le flambage d'une tige en compression¹ : le paramètre de contrôle est la force de compression F . Si $F < F_c$ alors la tige reste droite : c'est la solution d'équilibre. Dans l'autre cas, $F > F_c$ la barre flambe vers une nouvelle solution d'équilibre. On observe donc une bifurcation à « seuil ».

À l'aide d'un exemple simple de mécanique du point, nous introduisons le cadre conceptuel et le vocabulaire propres aux sciences des instabilités. Cet exemple simple permet d'obtenir une visualisation intuitive des mécanismes à l'œuvre.

1.1.1 Exemple mécanique simple.

Considérons le système mécanique suivant : une masse suspendue à un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0 . Le ressort est fixé en un point A et la masse en forme d'anneau coulisse le long d'une tige horizontale et on définit le coefficient de friction μ (figure 1.1). On introduit

1. Il s'agit de l'instabilité mécanique bien connue découverte par L. Euler.

le paramètre de contrôle l_c et plus particulièrement la valeur de l_c comparée à la longueur du ressort au repos l_0 .

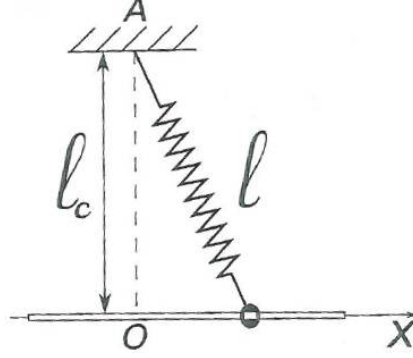


FIGURE 1.1 – Vue schématique du système. La longueur du ressort au repos est l_0 (non représentée sur la figure). l_0 peut-être aussi bien plus petite que l_c (ressort étiré quand il est à la verticale) que plus grande que l_c (ressort comprimé quand il est à la verticale).

Les questions que nous posons alors sont : quelles sont les positions d'équilibres du système et que pouvons nous dire de leur stabilité ?

1.1.2 Points fixes, portrait de phase et bifurcation.

Recherche des points fixes. L'équation dynamique du système obtenue à partir de la loi de Newton s'écrit :

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + \frac{\partial E_p(x)}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

Le dernier terme de l'équation ci-dessus n'est autre que la force qui dérive du potentiel E_p .

L'évolution temporelle d'un système physique comme celui-ci peut toujours s'écrire comme un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) du premier ordre :

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n) \quad (1.2)$$

Les variables x_i sont appelés *degrés de liberté du système*. Dans notre cas, l'équation de la dynamique (1.1) devient le système de deux EDO, en posant $x_1 = x$ et $x_2 = \frac{dx_1}{dt}$:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad (1.3)$$

$$m \frac{dx_2}{dt} + \mu x_2 + \frac{\partial E_p(x_1)}{\partial x_1} = 0 \quad (1.4)$$

Les états d'équilibre du système correspondent aux solutions stationnaires du système d'EDO, définies par : $\frac{dx_i}{dt} = 0$. D'après notre système d'EDO ci-dessus on observe que les états d'équilibre correspondent aux extrema du potentiel $E_p(x)$.

Appliquons cette démarche à notre système mécanique. Établissons dans un premier temps la

forme de l'énergie potentielle $E_p(x)$ dont la valeur dépend de la raideur du ressort mais aussi de son allongement $l - l_0$ soit $E_p = k(l - l_0)^2/2$. À partir du théorème de Pythagore, la position x de la masse le long de la tige - le degré de liberté qui nous intéresse - est reliée aux longueurs l_c et l par $l = \sqrt{x^2 + l_c^2}$. L'énergie potentielle s'écrit alors comme :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + l_c^2} - l_0)^2 \quad (1.5)$$

Pour x petit, un développement de Taylor au deuxième ordre permet d'obtenir une expression approchée de l'équation (1.5) :

$$E_p(x) = C + k \frac{l_c - l_0}{2l_c} x^2 \quad (1.6)$$

C est une constante de peu d'intérêt et sera ignorée par la suite. L'expression de l'énergie potentielle est similaire dans la forme à celle d'un ressort classique, mais la réalité physique sous-jacente est fondamentalement différente. En cherchant les solutions stationnaires on trouve l'extremum de l'énergie potentielle $x = 0$. Cet extremum n'est pas toujours la solution stable. En effet, en fixant la longueur du paramètre de contrôle l_c telle que $l_c > l_0$, le préfacteur $l_c > l_0$ de x^2 est positif et E_p possède un minimum en $x = 0$ définissant une position stable. Dans le cas contraire, $l_c < l_0$, E_p possède un maximum en $x = 0$, correspondant à une position instable. L'égalité $l_c = l_0$ correspond donc à la condition critique de perte de stabilité de la solution $x = 0$ (figure 1.2).

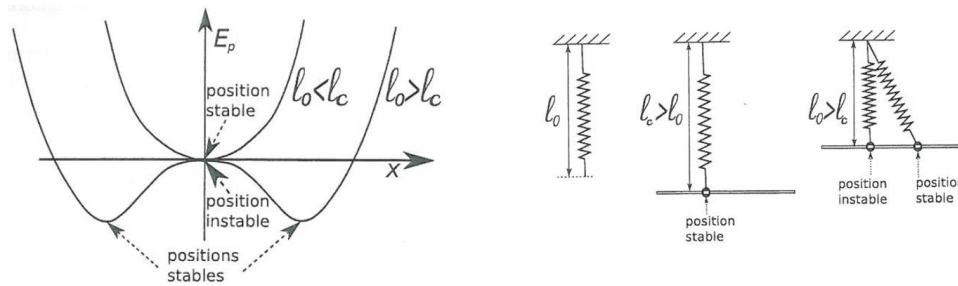


FIGURE 1.2 – Gauche : comportement qualitatif de l'énergie potentielle. Droite : vue schématique des positions d'équilibres.

Lorsque la solution du système $x = 0$ est instable, la masse s'éloigne de cette position. Or lorsque l'écart x de la masse devient trop important, l'approximation à l'ordre 2 de l'énergie potentielle (équation 1.6) cesse d'être valable. Nous développons à l'ordre suivant l'équation 1.5 et nous nous plaçons au seuil de l'instabilité $l_c \simeq l_0$:

$$E_p = \frac{k}{2} \left(\frac{l_c - l_0}{l_c} x^2 + \frac{x^4}{4l_0^2} \right) \quad (1.7)$$

On remarque que le coefficient devant x^4 est toujours positif et contribue à la saturation du système mécanique (figure 1.2).

Replaçons nous dans le cas $l_c < l_0$, les solutions stationnaires sont les minimas locaux situés de part et d'autre de $x = 0$. Il s'ensuit donc que la masse, en quittant sa position initiale instable

$x = 0$ se logera à la position x qui correspond à l'un ou l'autre des minimas.

Les solutions stationnaires, $\frac{dE_p(x)}{dx} = 0$, autrement dit les *points fixes*, du système mécanique sont les suivants :

$$x_0 = 0, \text{ pour la condition } l_c > l_0 \quad (1.8)$$

$$x_0 = \pm l_0 \sqrt{2 \frac{(l_0 - l_c)}{l_c}}, \text{ pour la condition } l_c < l_0 \quad (1.9)$$

Retenons que c'est le comportement qualitatif au voisinage du point critique de bifurcation qui nous importe dans l'étude des instabilités².

Portrait de phase. Maintenant établi les solutions stationnaires de notre système intéressons nous à leur évolution temporelle. Pour cela revenons à notre système d'EDO (équations 1.3 et 1.4).

Toute solution d'un système d'EDO issue d'une condition initiale donnée peut se représenter par une courbe dans l'espace des degrés de liberté, appelé *espace des phases*. Les points fixes sont eux représentés par des points dans cet espace. Pour notre système, l'espace des phases est le plan (x_1, x_2) . La figure 1.3 représente les trajectoires typiques issues de quelques conditions initiales, pour $\mu = 0$ et $\mu > 0$. Le cas $\mu = 0$ correspond à un oscillateur non dissipatif (*i.e.* dont l'énergie mécanique reste constante), et le cas $\mu > 0$, à un oscillateur dissipatif (*i.e.* dont l'énergie mécanique diminue avec le temps). Une telle représentation, qui retient l'essentiel des solutions d'un système d'EDO, est appelé *portrait de phase* du système. Un portrait de phase doit permettre de tracer qualitativement la trajectoire issue de toute condition initiale.

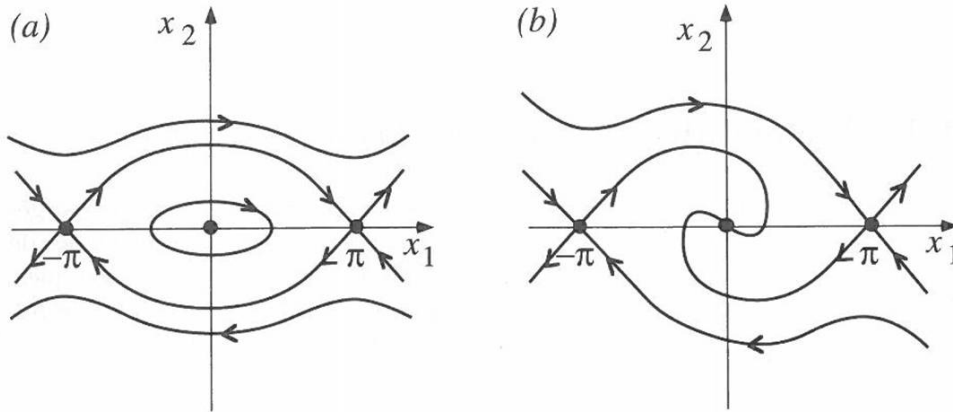


FIGURE 1.3 – Portrait de phase de l'oscillateur 1.3 et 1.4 pour (a) $\mu = 0$ et (b) $\mu \neq 0$.

Analyse de stabilité linéaire. Une fois déterminer les points fixes de la dynamique, autrement dit les états stationnaires du système, l'étape suivante consiste à étudier leur stabilité. Est-ce que le système soumis à de petites perturbations revient à son état initial stationnaire x_0 , ou bien s'en éloigne-t-il ? Pour répondre à cette question superposons à l'état stationnaire une

2. Dans le cadre d'un traitement linéaire de stabilité. Il existe des études faiblement non-linéaires portant sur l'équation d'amplitude.

perturbation $x_1(t)$:

$$x(t) = x_0 + x_1(t) \quad (1.10)$$

et déterminons l'évolution de la perturbation $x_1(t)$ au cours du temps. Si $x_1(t)$ décroît au cours du temps t , l'état stationnaire x_0 est dit stable, et si, au contraire, $x_1(t)$ croît au cours du temps t , l'état stationnaire x_0 est dit instable.

Nous allons de plus supposer que la perturbation est d'amplitude très faible devant x_0 ($x_1(t) \ll x_0$), pour procéder à une *linéarisation des équations* de la dynamique du système et limiter a priori le développement de Taylor au premier ordre en x_1 . Nous négligeons les termes non linéaires des équations car ils sont d'ordre x_1^2 . Nous obtenons alors dans l'approximation suivante pour l'équation linéarisée de la dynamique :

$$m\ddot{x}_1 + \mu\dot{x}_1 + x_1 \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} \right)_{x=x_0} = 0 \quad (1.11)$$

L'hypothèse de linéarité des équations au premier ordre limite ainsi cette étude de stabilité à celle de la *stabilité linéaire*.

Pour résoudre l'équation linéarisée au premier ordre de la dynamique du système (équation 1.11), cherchons des solutions de la forme $x_1(t) \sim e^{\omega t}$, pour obtenir une équation du second degré en ω :

$$m\omega^2 + \mu\omega + E''_p = 0 \quad (1.12)$$

On admettra que le discriminant $\mu^2 - 4mE''_p$ de cette équation est positif, condition satisfaite lorsque le coefficient de frottement μ est assez fort. Les solutions de l'équation ci-dessus sont alors donnée par :

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2m} \left(-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4mE''_p} \right) \quad (1.13)$$

et la solution de l'équation linéarisée de la dynamique (équation 1.11) s'écrit ainsi en toute généralité :

$$x_1(t) = ae^{\omega_1 t} + be^{\omega_2 t} \quad (1.14)$$

où a et b sont des constantes d'intégration.

L'évolution de la perturbation $x_1(t)$ au cours du temps dépend donc du signe de l'argument $\omega_{1,2}$ des exponentielles. Or, le signe de ω_2 est toujours négatif (voir équation 1.13), ce qui donne lieu à une décroissance exponentielle ; la stabilité linéaire du système en x_0 dépend ainsi exclusivement de la valeur de l'argument ω_1 et donc du signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle en x_0 (autrement dit de la courbure de l'énergie potentielle en x_0). Deux alternatives sont à considérer :

- soit $E''_p > 0$ et donc $\omega_1 < 0$: $x_1(t)$ décroît exponentiellement au cours du temps et x_0 est donc une solution stable.
- soit $E''_p < 0$ et donc $\omega_1 > 0$: $x_1(t)$ croît exponentiellement comme $e^{\omega_1 t}$ au cours du temps et la solution x_0 est une solution instable.

Finalement, lorsque qu'une analyse d'un problème en termes d'une énergie est impossible (étude de la concavité pour déterminer la stabilité), un recours à l'analyse de stabilité linéaire du système dynamique s'impose.

Bifurcations Pour finir cette partie sur les systèmes dynamiques, nous introduisons la notion de *bifurcation*. Ainsi le système étudié dans cette partie devient instable en $x = 0$ lorsque la longueur imposée entre les deux extrémités du ressort à la verticale l_c est inférieure à la longueur au repos du ressort. Au seuil de l'instabilité la masse s'écarte de la position verticale $x = 0$ et les effets non-linéaires assurent une saturation à une nouvelle position d'équilibre. On dit qu'il y a bifurcation de la solution stationnaire $x_0 = 0$ vers une paire de solutions stationnaires $x_0 = \pm l_0 \sqrt{2 \frac{(l_0 - l_c)}{l_c}}$, pour la condition $l_c < l_0$. En traçant l'évolution de la valeur x_0 en fonction de la longueur du ressort à la verticale l_c , jouant ici le rôle d'un paramètre de contrôle, nous obtenons un diagramme dit de bifurcation (figure 1.4) qui n'est autre que le portrait des solutions stationnaires. La courbe brisée représente une branche instable tandis que la courbe en trait continu correspond à la branche stable. La bifurcation en question, nommée bifurcation fourche en raison de sa forme dans ce diagramme, est quelquefois qualifiée de *bifurcation sur-critique*.

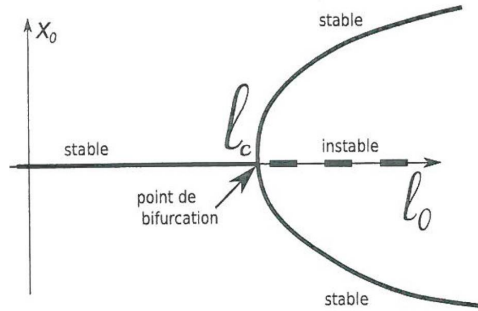


FIGURE 1.4 – Diagramme de bifurcation fourche. Les lignes continues représentent les branches stables, et les lignes discontinues les branches instables.

1.2 Les instabilités hydrodynamiques et naissances spatiale de l'ordre

Nous développons ici la "méthode" à suivre pour réaliser une étude de stabilité linéaire. Cette étude est nécessaire pour déterminer le seuil de transition d'un écoulement de base vers un autre type d'écoulement.

1.2.1 Déroulement d'un calcul de stabilité linéaire

L'objectif d'un calcul de stabilité linéaire est d'obtenir d'une part des informations sur la stabilité du système étudié (la dynamique temporelle) et d'autre part de déterminer une extension spatiale. La nature nous offre une surabondance d'exemples de structures spatiales ordonnées dans des domaines variés, telles les rides sur le sable ou bien les colonnes de basaltes à la surface de la terre (figure 1.5). Ces structures résultent d'une compétition entre différents mécanismes, qui dépendent évidemment du système étudié, qu'il faut mettre en équation.

La « méthode » pour mener à bien un calcul de stabilité linéaire est la suivante :

- Écrire le système d'équation et les conditions aux limites. Pour des instabilités hydrodynamiques ce seront principalement les équations de Navier-Stokes.
- Trouver la solution de base du système, c'est à dire la solution indépendante du temps. Dans chaque expérience, la solution de base dépend d'un paramètre de contrôle comme la vitesse d'une surface ou bien un gradient thermique dans un problème de convection.
- Superposer une perturbation³ en temps et en espace si nécessaire à la solution de base. Par exemple pour la vitesse : $u(x, t) = u_0(x) + \delta \tilde{u}(x, t)$; avec $|\delta| \ll 1$
- Injecter la perturbation dans le système d'équations et linéariser le problème autour de la solution de base en puissance croissante de l'amplitude de la perturbation δ . En négligeant les termes $O(\delta^2)$ on obtient les équations linéarisées régissant la dynamique de la perturbation.
- Résoudre le système d'équations linéarisées en modes normaux : $\tilde{u}(\vec{x}, t) \sim e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t}$, où $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde et $\omega = \omega_r + i\omega_i$ est la pulsation qui peut être réelle ou complexe. On détermine alors la *relation de dispersion*. Si $\omega_r < 0$ alors la perturbation décroît exponentiellement : la solution de base est linéairement stable. Si $\omega_r = 0$ alors la perturbation est dite neutre. Finalement pour $\omega_r > 0$ la perturbation croît exponentiellement dans le temps : la solution de base est linéairement instable.

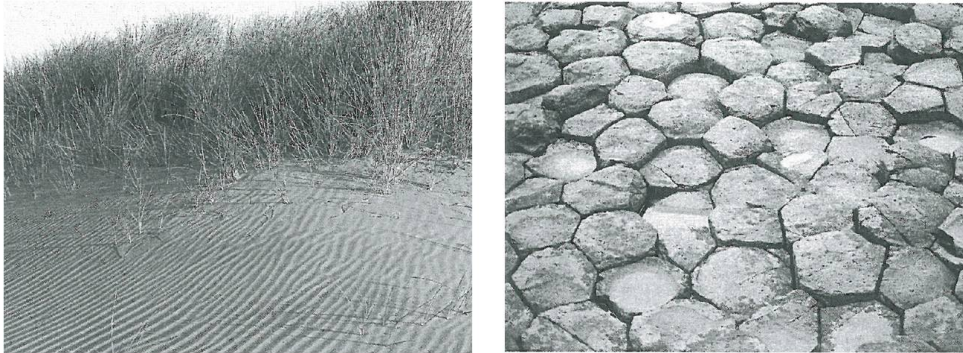


FIGURE 1.5 – Gauche : rides éoliennes. Droite : structure organisée de type Bénard-Marangoni à la surface de la terre. Il s'agit de colonnes de basalte

Cette méthode permet de répondre aux questions suivantes : (Q1) L'écoulement de base est-il linéairement stable ou instable pour toutes valeurs du paramètre de contrôle ? (Q2) Pour quelle valeur seuil du paramètre de contrôle l'écoulement de base devint-il instable ? (Q3) Au seuil de l'instabilité quelle est l'étendue spatiale de la perturbation ?

Prenons l'exemple simple suivant pour illustrer cette démarche. On considère l'équation non-linéaire suivante :

$$\partial_t f(y, t) = \alpha f - f^2 + \frac{1}{\lambda} \partial_y^2 f \quad (1.15)$$

associée aux conditions aux limites suivantes : $f = 0$ en $y = 0$ et $y = 1$. α et λ sont des paramètres de contrôle de l'écoulement⁴. La solution stationnaire triviale du problème ($\partial_t = 0$) qui satisfait

3. Cette perturbation peut provenir du bruit thermique ou mécanique.

4. On pourra noter que λ apparaît devant un terme de diffusion et peut donc représenter un nombre de Reynolds.

les conditions aux limites est donc :

$$f_0(y) = 0 \quad (1.16)$$

Superposons à cette solution de base une perturbation :

$$f(y, t) = f_0(y) + \delta \tilde{f}(y, t) \quad (1.17)$$

et injectons la forme perturbée dans l'équation 1.15 :

$$\begin{aligned} \partial_t(f_0 + \delta \tilde{f}) &= \alpha(f_0 + \delta \tilde{f}) - (f_0 + \delta \tilde{f})^2 + \frac{1}{\lambda} \partial_y^2(f_0 + \delta \tilde{f}) \\ &= \alpha f_0 - f_0^2 + \frac{1}{\lambda} \partial_y^2 f_0 + \delta \left[\alpha \tilde{f} - 2f_0 \tilde{f} + \frac{1}{\lambda} \partial_y^2 \tilde{f} \right] + O(\delta^2) \end{aligned} \quad (1.18)$$

À l' $O(\delta^0)$ nous retrouvons notre équation de base $\partial_t f_0 = \alpha f_0 - f_0^2 + \frac{1}{\lambda} \partial_y^2 f_0$. À l' $O(\delta^2)$ nous obtenons l'équation linéarisée gouvernant la dynamique de la perturbation : $\partial_t \tilde{f} = \alpha \tilde{f} - 2f_0 \tilde{f} + \frac{1}{\lambda} \partial_y^2 \tilde{f}$. Finalement en considérant (1.16) on obtient :

$$\partial_t \tilde{f} = \alpha \tilde{f} + \frac{1}{\lambda} \partial_y^2 \tilde{f} \quad (1.19)$$

Cette équation étant linéaire à coefficients constants (reflétant son invariance par translation), elle admet des solutions exponentielles en temps et en espace $\tilde{f}(y, t) = A e^{iky + \omega t}$, avec A l'amplitude de la perturbation. On trouve ainsi la relation de dispersion reliant le taux de croissance de l'instabilité au nombre d'onde :

$$\omega = \omega_r + i\omega_i = \alpha - \frac{k^2}{\lambda} = \omega_r \quad (1.20)$$

On obtient une relation de dispersion purement réelle.

Cherchons maintenant à déterminer les cas pour lesquels le taux de croissance est positif. On reporte sur la figure 1.6a la relation de dispersion pour différentes valeurs de α en gardant λ fixe. Pour $\alpha < 0$ le taux de croissance est toujours négatif, et la perturbation relaxe vers l'état de base. Pour $\alpha = \alpha_c = 0$ on obtient $\omega_r = 0$ pour un nombre d'onde dit *marginal* k_c qui reflète une inversion du rapport entre un phénomène stabilisant et un phénomène déstabilisant (nous aborderons plus en détail cet aspect dans le chapitre suivant). Finalement, pour $\alpha > 0$ l'écoulement devient instable. De la relation de dispersion on déduit la *courbe de stabilité marginale* (figure 1.6b) qui correspond à $\omega(k, \alpha) = 0$ délimitant la zone stable et instable. Dans le plan (k, α) on obtient une parabole :

$$\alpha = \frac{k^2}{\lambda} \quad (1.21)$$

On remarquera que près du seuil, le taux de croissance associé à un nombre d'onde instable voisin de k_c , le temps caractéristique de l'instabilité $1/\omega_r$ diverge. Cela signifie qu'il faut attendre longtemps pour voir l'instabilité se manifester. Notons que l'étude expérimentale d'une instabilité à seuil comme celle-ci requiert que le paramètre de contrôle α varie suffisamment lentement, de façon quasi-statique, pour que l'écoulement puisse être considéré à l'équilibre. Plus précisément, le temps caractéristique de variation du paramètre de contrôle doit être au moins égal au temps

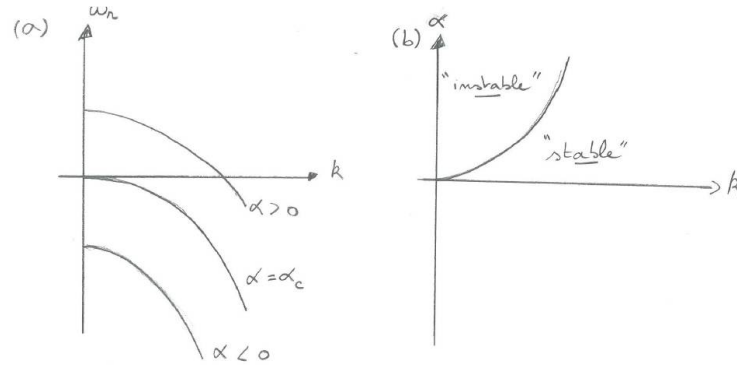


FIGURE 1.6 – (a) Relation de dispersion de l'instabilité pour différentes valeurs du paramètre de contrôle α . (b) Courbe de stabilité marginale.

de relaxation de l'écoulement. Pour une instabilité thermique par exemple, ce temps de relaxation est d'ordre d^2/κ , où d est une longueur caractéristique et κ le coefficient de diffusivité thermique.

1.2.2 Une instabilité avec les mains.

Les calculs de stabilité linéaire peuvent vite devenir compliqués. Il est donc nécessaire avant de commencer tous calculs, d'aborder le problème par une étude d'ordre de grandeur. Cette approche nécessite une certaine intuition physique et donc une certaine pratique à développer. Nous présentons un exemple d'instabilité hydrodynamique par ce type d'approche.

Instabilité de Rayleigh-Plateau Cette instabilité décrit la rupture d'un filet liquide en gouttelettes (comme le jet d'eau qui sort de votre robinet). Il s'agit donc d'une instabilité dite capillaire. Pour une surface plane séparant deux couches fluides superposées, la tension interfaciale γ stabilise l'interface. La raison est que toute perturbation d'une interface plane augmente son aire, et augmente donc l'énergie interfaciale de γA . Dans le cas de notre filet cylindrique, la tension de surface est au contraire déstabilisante, c'est elle qui est responsable de l'instabilité. En effet, pour un volume de fluide donné, l'aire interfaciale est moindre pour un ensemble de n gouttes de rayon r sphériques que pour un cylindre de rayon a ; plus précisément le rapport des aires est :

$$\frac{\text{aire des gouttes}}{\text{aire du cylindre}} = \frac{3a}{2r}$$

Ainsi, le rapport des aires est d'autant plus faible que les gouttes formées sont plus grosses : la minimisation de l'aire interfaciale doit conduire aux gouttes les plus grosses possible. Cependant, pour former ces gouttes il est nécessaire d'effectuer de grand déplacements de particules fluides, déplacements auxquels s'oppose l'inertie du fluide. Le diamètre des gouttes va donc être déterminé par un compromis entre un facteur déstabilisant, la tension de surface, et un facteur stabilisant, ou au moins retardant, l'inertie du fluide.

Par une analyse dimensionnelle cherchons à déterminer l'ordre de grandeur du temps de formation des gouttes. Plaçons nous dans le cadre où les effets visqueux n'ont pas le temps de se développer (à vérifier à posteriori). Les grandeurs dont dépend le problème sont la masse volumique ρ , la

tension de surface γ et le rayon du filet fluide a . On ne peut former qu'un seul temps que l'on nomme le temps capillaire :

$$\tau_c = \sqrt{\rho a^3 / \gamma}$$

Pour un filet d'eau d'un millimètre de rayon dans l'air ($\gamma_{\text{eau/air}} \sim 70 \text{ mN/m}$ nous obtenons un temps τ_c d'environ $3,8 \text{ ms}$. Déterminons le temps de diffusion des effets visqueux afin de valider le calcul ci-dessus. Le temps caractéristique de diffusion des effets visqueux est de l'ordre de $\tau_v \sim a^2 / \nu$ où ν est la viscosité cinématique du fluide. On trouve pour de l'eau $\tau_v \sim 1 \text{ s}$. On voit donc que $\tau_c \ll \tau_v$ et donc que les effets de viscosité n'ont pas le temps d'influencer la formation des gouttes.

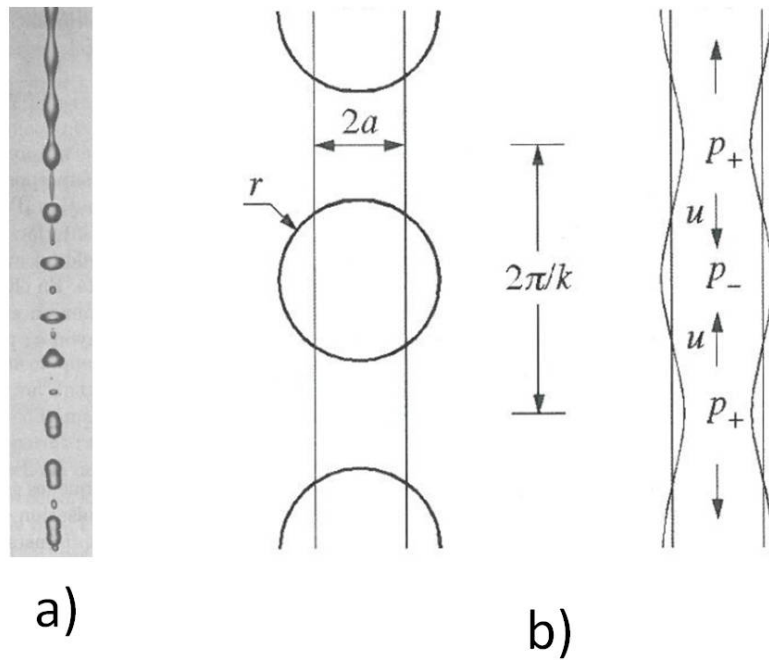


FIGURE 1.7 – a) Filet d'eau issu d'un tube de 4 mm de diamètre. On observe le développement de l'instabilité en haut de l'image et la fragmentation en gouttes. b) Schéma de l'instabilité dans le cadre d'une perturbation de faible amplitude. La perturbation de l'interface s'amplifie du fait d'un gradient de pression capillaire, et conduit à la formation de gouttelettes.

Poussons un peu plus loin notre calcul d'ordre de grandeur pour obtenir une estimation de la relation de dispersion. Considérons une perturbation de l'interface de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ et d'amplitude ϵ , comme schématisé sur la figure 1.7. La différence des rayons de courbure aux pincements et renflements induit une différence de pression de Laplace qui induit un écoulements de liquide des renflements vers les pincements.

$$P^+ - P^- = \gamma \left(\frac{1}{a - \epsilon} - \frac{1}{a + \epsilon} \right) \sim \frac{2\gamma\epsilon}{a^2}$$

Le gradient de pression est relié au débit de liquide par l'équation d'Euler :

$$\rho \frac{du}{dt} \sim \frac{P^+ - P^-}{\lambda} = \frac{2\gamma\epsilon}{\lambda a^2}$$

La conservation de la masse donne une nouvelle relation entre u et ϵ : $ua^2 dt \sim a\lambda d\epsilon$. On obtient alors une équation portant sur l'amplitude de la perturbation :

$$\frac{d^2\epsilon}{dt^2} = \frac{\gamma\epsilon k^2}{\rho a}$$

L'équation étant linéaire cherchons des solutions sous la forme $\epsilon \sim \epsilon_0 e^{\sigma t}$. On trouve alors la relation de dispersion suivante :

$$\sigma = \frac{ak}{\tau_c}$$

Notre approche en ordre de grandeur nous a permis de déterminer la relation de dispersion reliant le taux de croissance σ au nombre d'onde k . Nous observons une relation linéaire entre ces deux quantités. Comparons notre résultat au calcul complet non-visqueux (figure 1.8). Nous observons bien une augmentation linéaire pour les faibles valeurs du nombre d'onde ainsi qu'un taux de croissance de l'ordre de τ_c pour $ka \sim 0,7$.

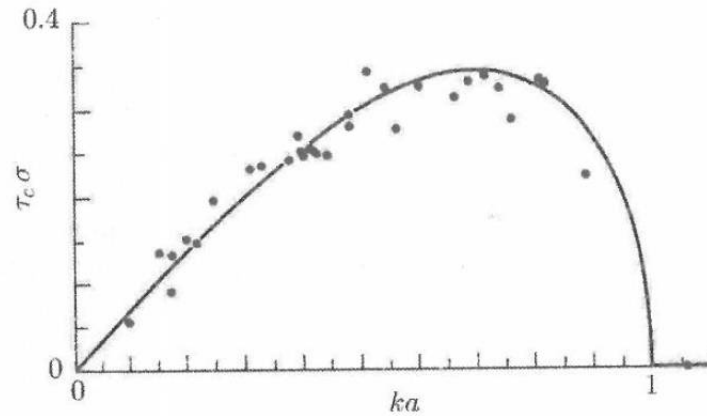


FIGURE 1.8 – Taux de croissance de l'instabilité d'un jet de fluide non-visqueux. Confrontation entre expérience et théorie [Charru].

Nous venons donc, à l'aide d'une analyse simple d'ordre de grandeur, de quantifier la relation de dispersion de l'instabilité de Rayleigh-Plateau.

Chapitre 2

Transition à la turbulence

Dans le chapitre précédent nous nous sommes attachés à rechercher, par une étude linéaire de stabilité, le mode le plus instable responsable de la transition d'un état de base à un autre état d'écoulement. L'approche linéaire ne nous permet pas de déterminer précisément la nature de ce nouvel état. Pour cela, des calculs faiblement non-linéaires sur l'amplitude doivent être développés. Nous n'aborderons pas ces développements dans ce polycopié. Pour aller plus loin nous adoptons une description qualitative de la nature des écoulements au delà du seuil de l'instabilité.

Prenons l'expérience de Reynolds présentée en figure 2.1. L'expérience consiste à étudier les régimes d'écoulement d'un fluide de viscosité cinématique ν dans une canalisation circulaire de diamètre D . Au centre de cette canalisation un filet de colorant est injecté. Intéressons nous à l'évolution de la dynamique de ce filet coloré lorsque le paramètre de contrôle de l'écoulement, le nombre de Reynolds $Re = uD/\nu$, est augmenté. A faible nombre de Reynolds le filet de colorant reste établi et stationnaire selon l'axe de l'écoulement indiquant que l'état de base, ici un écoulement de Poiseuille, est stable (figure 2.1 a). Pour une valeur de quelques milliers de Re on observe des fluctuations de la ligne de colorant. Ces fluctuations se développent par "bouffée". Il y a donc une intermittence entre l'écoulement laminaire établi de base et ces bouffées turbulentes (figure 2.1 b). Nous sommes au seuil de la transition à la turbulence. Finalement pour des nombres de Reynolds plus importants, les fluctuations gagnent en amplitude et en fréquence pour disperser complètement le colorant : c'est le régime de turbulence développée (figure 2.1 c). Dans ce dernier régime le profil moyen des vitesses est pratiquement plat sur la section de la conduite sauf près des parois où de forts gradients de vitesse se développent.

Ces problématiques de transition à la turbulence et de turbulence développée se rencontrent dans de nombreux domaines technologiques : jet s'échappant d'un turboréacteur, couche limite s'établissant sur la voiture d'une aile d'avion ou encore un fluide tournant dans un réacteur chimique agité. On souhaite en général déterminer la structure de l'écoulement, les pertes de charges ou des coefficients aérodynamiques dans ces écoulements particuliers. On s'intéresse aux problèmes de décollement de couche limite, de stabilité ou bien d'amélioration du mélange. Les réponses à toutes ces questions sont à l'heure actuelle mal connues. En effet, la turbulence reste à ce jour un domaine de la mécanique des fluides plein de mystères !

Par la suite nous limitons la présentation de la turbulence à des considérations générales et à

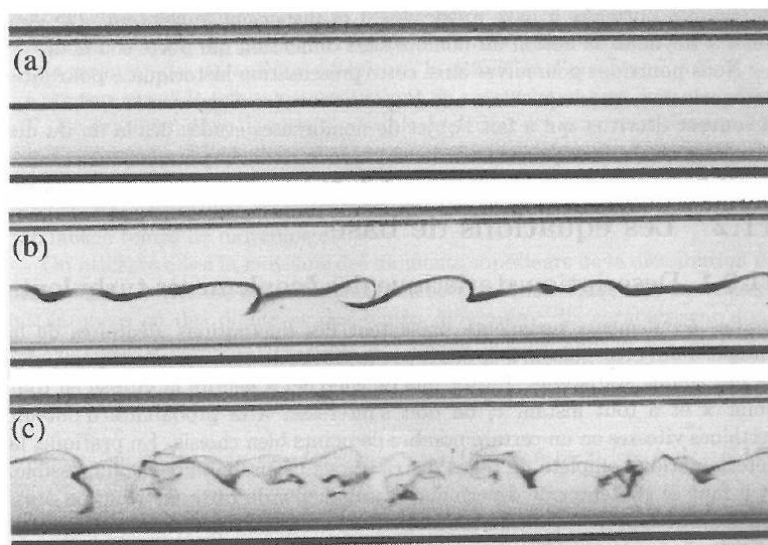


FIGURE 2.1 – Écoulement dans une conduite pour différents nombre de Reynolds. (a) à basse vitesse l'écoulement est laminaire et le filet de colorant reste identifiable sur une grande distance. (b) et (c) Au dessus d'une valeur critique l'écoulement devient turbulent ce qui se traduit par un important mélange du colorant. [Guyon]

une approche statistique permettant de décrire les écoulements moyens.

2.1 Considérations générales de la turbulence

Bien que le comportement d'un écoulement turbulent soit de nature aléatoire, un certains nombres de caractéristiques communes peuvent être dégagées :

- Les variables de l'écoulement (pression, vitesse, température,...) fluctuent de façon aléatoire spatialement et temporellement autour d'une valeur moyenne.
- La turbulence apparaît dans des écoulements dont le nombre de Reynolds est élevé. L'origine est souvent liée au développement d'une instabilité d'un écoulement laminaire lorsque Re dépasse une certaine valeur critique¹.
- Les écoulements turbulents sont fortement dissipatifs. L'énergie cinétique turbulente tirée de l'écoulement moyen est transférée aux petites structures turbulentes, où elle est dissipée par les contraintes visqueuses. On parle de cascade d'énergie.
- Les écoulements turbulents sont fortement rotationnels. L'écoulement est formé d'un enchevêtrement de tourbillons ayant des tailles et des orientations aléatoires.
- La turbulence accélère les processus de mélange. Les transferts de masse, de quantité de mouvement et d'énergie sont fortement augmentés.

1. Pour une plaque plane $Re_c \sim 5.10^5$, et pour une conduite cylindrique $Re_c \sim 2500$.

2.2 Description statistique des écoulements turbulents : l'équation de Reynolds.

Nous venons de voir que les écoulements turbulents présentent des fluctuations aléatoires des variables caractéristiques. Nous allons appliquer la *décomposition de Reynolds* à ces variables, c'est-à-dire décomposer les variables en une valeur moyenne et en fluctuations de valeur moyenne nulle liées à la turbulence. Pour la composante de vitesse v_i nous obtenons :

$$\begin{aligned} v_i &= \bar{v}_i + v'_i \\ \overline{v'_i} &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Nous nous intéressons à l'écriture des lois qui régissent les variations de la valeur moyenne $\bar{v}_i$ et celles des corrélations entre les composantes v'_i des fluctuations. Pour déterminer ces valeurs moyennes il faudrait en toute rigueur produire un nombre de réalisations important du même écoulement pour des conditions initiales et des géométries identiques afin d'effectuer une moyenne d'ensemble. En pratique cela n'est pas réalisable et on supposera souvent que la turbulence vérifie le principe d'ergodicité. On en déduit donc la définition de la valeur moyenne de la composante v_i de la vitesse d'écoulement en un point x donné :

$$\bar{v}_i = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v_i(x, t) dt \tag{2.2}$$

T est la durée de l'observation : elle doit être grande devant le temps caractéristique des fluctuations de vitesse les plus lentes associées aux mouvements turbulents, mais plus courte que le temps d'évolution à grande échelle de l'écoulement global.

En appliquant l'équation 2.2, qui définit les grandeurs moyennes, aux dérivées spatiales de la vitesse et en échangeant l'ordre des opérations d'intégration par rapport au temps, et de la dérivation par rapport aux variables spatiales², on trouve :

$$\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \tag{2.3}$$

La moyenne des dérivées temporelles de la vitesse devient :

$$\overline{\frac{\partial v_i}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} \tag{2.4}$$

Nous considérons ici des écoulements incompressibles et Newtonien. Les équations de Navier-Stokes continuent alors de s'appliquer à la vitesse instantanée v_i . Établissons maintenant l'équation de mouvement vérifiée par la valeur moyenne $\bar{v}_i$ de la vitesse. Reportons la décomposition de Reynolds dans l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \bar{v}_i + v'_i}{\partial t} + (\bar{v}_j + v'_j) \frac{\partial (\bar{v}_i + v'_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{v}_i + v'_i)}{\partial x_j^2} + f_i \tag{2.5}$$

2. C'est le principe d'ergodicité qui permet d'échanger les moyennes spatiales et temporelles.

Moyennons l'équation 2.5 dans le temps. Tous les termes ne faisant intervenir qu'une seule fois les variables fluctuantes disparaissent d'où :

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2} + f_i \quad (2.6)$$

Cette équation ne diffère que par le terme croisé des fluctuations de celle qu'on obtiendrait en remplaçant, dans l'équation de Navier-Stokes, la pression et la vitesse par leurs moyennes. Par ailleurs, la condition d'incompressibilité s'applique à la fois instantanément et en moyenne dans le temps :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial v'_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

En combinant les équations 2.6 et 2.7 nous obtenons l'équation de Reynolds :

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\sigma}_{ij} - \rho \bar{v}_i \bar{v}_j - \rho \overline{v'_i v'_j} \right) + \rho f_i \quad (2.8)$$

où :

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + \rho \nu \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.9)$$

Le terme $\tau_{ij} = -\rho \overline{v'_i v'_j}$ est le tenseur de Reynolds, ou tenseur des contraintes turbulentes. Il caractérise la corrélation entre des composantes instantanées de la vitesse fluctuante et rend compte du transport de la quantité de mouvement par les fluctuations turbulentes. Les composantes non diagonales de ce tenseur jouent un rôle plus important que les composantes diagonales : elles correspondent à des contraintes de cisaillement qui facilitent l'apparition de nouveaux mouvements de rotation et permettent par conséquent de maintenir élevé le rotationnel de la vitesse et de faire apparaître de nouveaux tourbillons.

L'ensemble des équations 2.8 et 2.7 fait intervenir plus d'inconnues que d'équations : aux quatre inconnues $\bar{v}_i$ et $\bar{p}$ s'ajoutent les six composantes du tenseur de Reynolds. Il est donc nécessaire d'ajouter à ces équations des équations dites de fermeture afin de résoudre les équations du mouvement moyennées. Ces équations de fermeture ne reposent pas sur des bases théoriques rigoureuses mais introduisent des paramètres ajustables à déterminer pour chaque écoulement. Nous présentons ci-dessous deux modèles de fermeture.

Viscosité turbulente Cette approche consiste à rendre compte de l'augmentation de la friction et du transport de quantité de mouvement dans un écoulement turbulent en introduisant une viscosité turbulente ν_T qui s'ajoute à la viscosité classique des fluides. Ce concept, introduit par Boussinesq vers 1890, pose l'analogie avec le tenseur de viscosité :

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{v'_i v'_j} = \frac{\rho \nu_T}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.10)$$

ν_T est indépendante des propriétés du fluide mais dépend en revanche de l'écoulement et également du point de mesure dans un même écoulement.

Longueur de mélange Cette approche différente, proposée par Prandtl en 1903, est inspirée de la théorie cinétique des gaz. Elle consiste à rechercher une longueur qui jouerait le même rôle que le libre parcours moyen des molécules, tout en faisant jouer aux composantes fluctuantes de la vitesse le même rôle que la vitesse d'agitation thermique. L'analyse complète permet d'exprimer le flux de quantité de mouvement :

$$\tau_{ij} = \rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \kappa l \sqrt{v_j'^2} \quad (2.11)$$

où κ est un coefficient numérique. La longueur l , appelée longueur de mélange, représente la distance moyenne sur laquelle la vitesse d'un élément fluide reste corrélée à sa valeur initiale. Finalement, muni de ces équations il est possible de déterminer quelques profils d'écoulements dans des conditions bien particulières. Par exemple le cas de la couche limite turbulente ou bien le calcul de pertes de charge dans des conduites.

Chapitre 3

Dispositifs expérimentaux et conduite du projet

Dans cette partie nous passons en revue les différentes installations disponibles pour étudier les instabilités hydrodynamiques ainsi que les écoulements turbulents.

3.1 Instabilité de Rayleigh-Bénard

Cette instabilité est une instabilité thermoconvective. Il s'agit d'étudier le couplage entre les variations de température au sein du fluide et les champs d'écoulement de ce fluide.

Pour cela, le fluide est placé entre deux plaques horizontales à des températures différentes. Si la température de la plaque inférieure est plus faible que celle de la plaque supérieure, la stratification de densité est stable (fluide dense en dessous). Dans le cas opposé d'un fluide chauffé par le dessous on se trouve dans une situation instable. En effet, des particules de plus faible densité sont situées au-dessous de celles de plus grandes densité (la masse volumique diminue quand la température augmente). Cependant, un mouvement de fluide n'apparaît que la différence de température excède une certaine valeur : c'est le seuil de l'instabilité. Ce seuil est caractérisé par le nombre sans dimension de Rayleigh :

$$Ra = \frac{\alpha \Delta T g a^3}{\nu \kappa}$$

où α est le coefficient de dilatation thermique du fluide, ΔT est la différence de température entre les plaques, g est l'accélération de la pesanteur, a est l'espacement entre les plaques, ν est la viscosité cinématique du fluide et κ est la diffusivité thermique. Ce problème est appelé *instabilité de Rayleigh-Bénard*.

Le principe de l'expérience est de mettre en évidence cette instabilité. Le montage expérimentale est présenté en figure 3.1. Cette expérience est délicate à mettre en œuvre. En effet, nous avons vu que proche du seuil d'une instabilité, le taux de croissance (c'est à dire le temps de développement de l'instabilité) est infiniment long. Il est donc nécessaire d'augmenter progressivement l'écart de température entre les plaques et d'attendre suffisamment longtemps pour s'assurer du développement ou non de l'instabilité.

La finalité de cette étude est de mesurer expérimentalement la valeur du nombre de Rayleigh critique ainsi que la valeur du vecteur d'onde associé ($k = 2\pi/\lambda$; où λ est la longueur d'onde). Un article complet est mis à votre disposition pour vous aider à comparer vos résultats expérimentaux à l'analyse théorique.

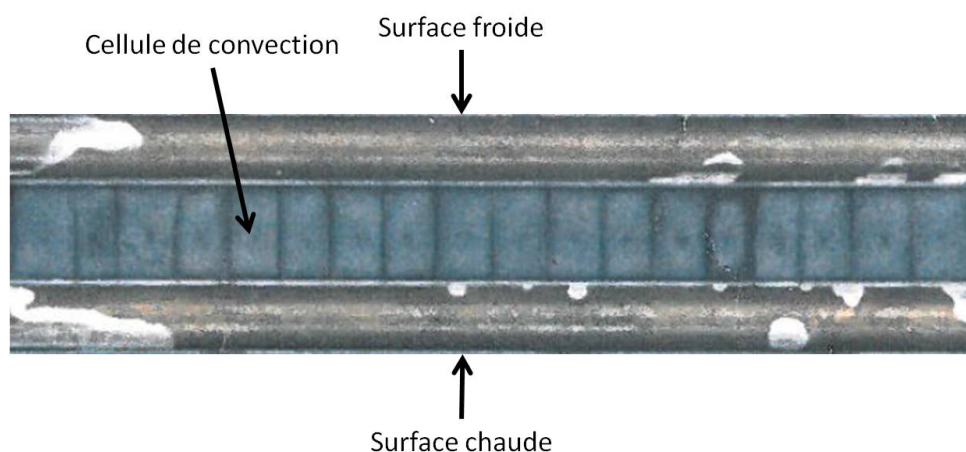


FIGURE 3.1 – Système de rouleaux de convection entre deux plaques à des températures différentes.

3.2 Instabilité de Taylor-Couette

Cette nouvelle instabilité est, comme la précédente, une instabilité à seuil. Le principe de l'expérience consiste à mettre en écoulement un liquide entre deux cylindres coaxiaux et à les mettre en rotation. Nous savons que le champ des vitesses stationnaire obtenu est purement orthoradial. Si le cylindre intérieur tourne à une vitesse de rotation Ω supérieure à une vitesse critique Ω_c , une circulation de fluide en rouleaux toroïdaux apparaît (figure 3.2). Pour des vitesses de rotation encore plus élevées, les rouleaux commencent à onduler, puis à des vitesses plus importantes, l'écoulement devient turbulent.

Cette instabilité permet d'observer simplement la transition à la turbulence par une cascade d'instabilité. Dans un premier temps un seul mode est excité, puis deux, puis une infinité au seuil de la turbulence.

Expérimentalement, il est intéressant de mettre en évidence cette succession d'instabilité et de déterminer, par un simple équilibre de forces stabilisante et déstabilisante, le nombre sans dimension contrôlant la transition. Ce nombre est le nombre de Taylor :

$$Ta = \frac{\Omega^2 a^3 R}{\nu^2}$$

où, a est l'entrefer entre les deux cylindres, R le rayon du cylindre intérieur et ν la viscosité cinématique du fluide.

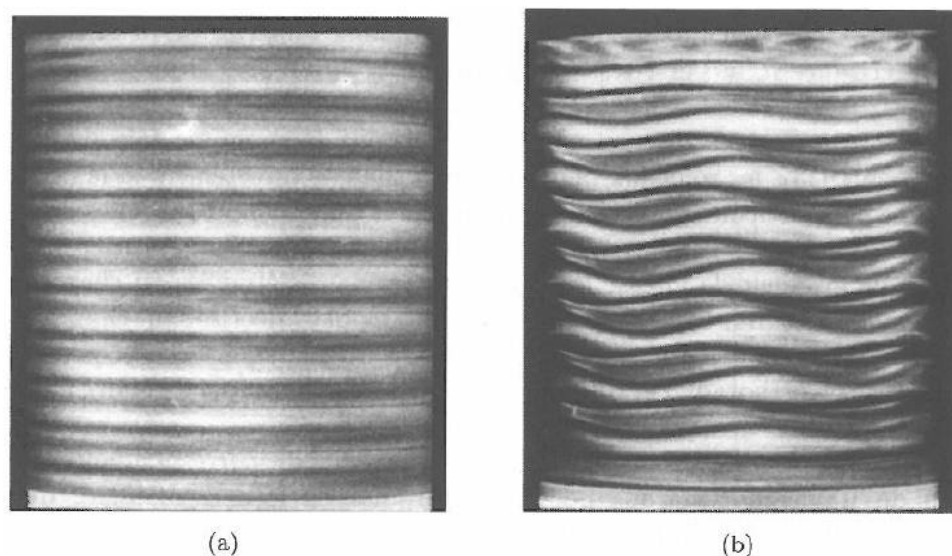


FIGURE 3.2 – Photographies de l'instabilité en rouleaux de Taylor. (a) Peu au dessus du seuil de l'instabilité. (b) Plus au dessus du seuil, on observe des vortex ondulés. [Guyon]

3.3 L'expérience de Reynolds

Le dispositif présenté en figure 3.3 est similaire à celui utilisé par Reynolds pour mettre en évidence les différents régimes d'écoulements. Le dispositif est équipé d'un bain tranquillisant en amont du tube cylindrique permettant de rendre l'écoulement laminaire. Un injecteur de colorant est positionné sur l'axe de l'écoulement et permet de visualiser qualitativement le type d'écoulement qui s'établit dans la canalisation. En sortie l'eau est récupérée dans un réservoir gradué permettant de mesurer le débit d'eau dans la canalisation. Enfin la régulation du débit est assurée par la variation de la charge hydraulique en entrée du dispositif. Ce dispositif expérimental, très pédagogique pour appréhender les problèmes de turbulence en conduite, permet dans un premier temps d'évaluer qualitativement les nombres de Reynolds critiques de transition à la turbulence par simple observation du filet de colorant (cf. figure 2.1). L'étude ne se limite pas seulement à cette approche qualitative. En effet, il est possible de mesurer par vélocimétrie laser le profil de vitesse dans la conduite et ainsi observer la transition d'un profil de Poiseuille vers un profil turbulent de type bouchon.

Mentionnons le dispositif expérimental permettant de mesurer le coefficient de friction λ dans des conduites lisses en fonction du nombre de Reynolds. Le diamètre ainsi que la longueur des conduites peuvent être modifiés mais aussi la charge imposée à l'entrée du dispositif. Le débit est quand à lui mesuré à l'aide d'un réservoir. Il est possible avec cette expérience simple de mettre en évidence la transition laminaire turbulent en inspectant la surface du jet sortant de la conduite et de corréler cette transition avec les mesures de λ . Les résultats pourront être confronté au diagramme de Moody.

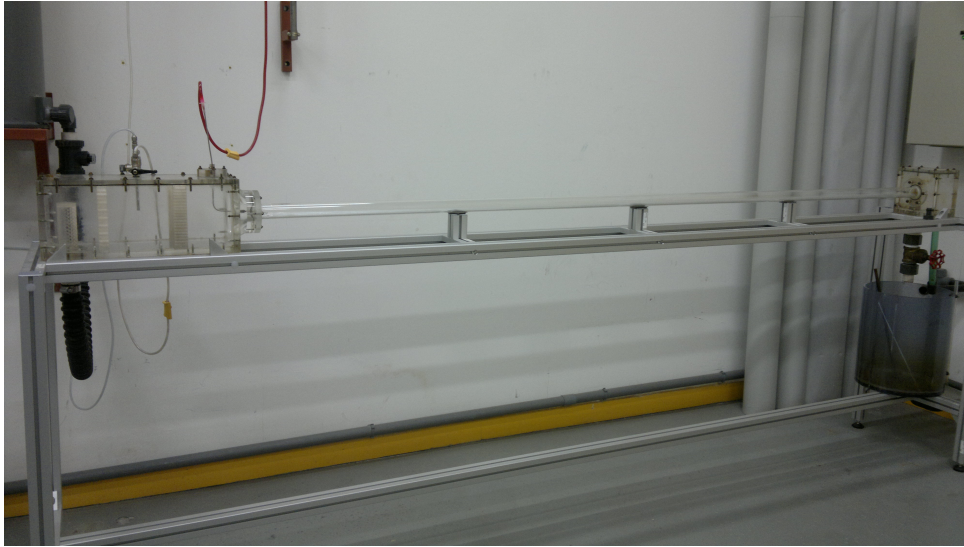


FIGURE 3.3 – Installation de l'expérience de Reynolds de L'ENSEM pour l'étude des écoulements turbulents en conduite. Cette installation est équipée d'un injecteur de colorant pour visualiser les différents régimes d'écoulement.

3.4 Le canal hydraulique

Le canal hydraulique permet d'étudier de nombreuses configurations d'écoulement autour d'obstacle (figure 3.4). Dans ce canal, le débit de liquide peut être régulé, du colorant peut être injecté pour visualiser les lignes de courant de l'écoulement et une visualisation par tranche laser est réalisable. De plus il est possible de réaliser des mesures de champ de vitesse par vélocimétrie laser.



FIGURE 3.4 – Canal hydraulique de l'ENSEM permettant d'étudier les écoulements autour d'obstacle. Ce canal est équipé d'une nappe laser et de colorant pour visualiser les lignes de courant.

Sans être exhaustif, les études sont nombreuses : étude de la couche limite et de la transition à la turbulence sur plaque plane, sillage et interaction de sillage derrière des obstacles profilés ou non, écoulement en cavité... Pour exemple mentionnons l'écoulement derrière un cylindre pour différents nombres de Reynolds (figure 3.5). Aux faibles vitesses ($Re \ll 1$) l'écoulement est laminaire (figure 3.5a). Pour un nombre de Reynolds de quelques unités on observe des tourbillons en aval du cylindre (figure 3.5b). Pour une valeur critique du nombre de Reynolds on observe une instabilité de type "*allée de Bénard-von Karman*" correspondant à une émission de tourbillon (figure 3.5c). Finalement, au-delà du seuil l'écoulement devient turbulent derrière le cylindre (figure 3.5d).

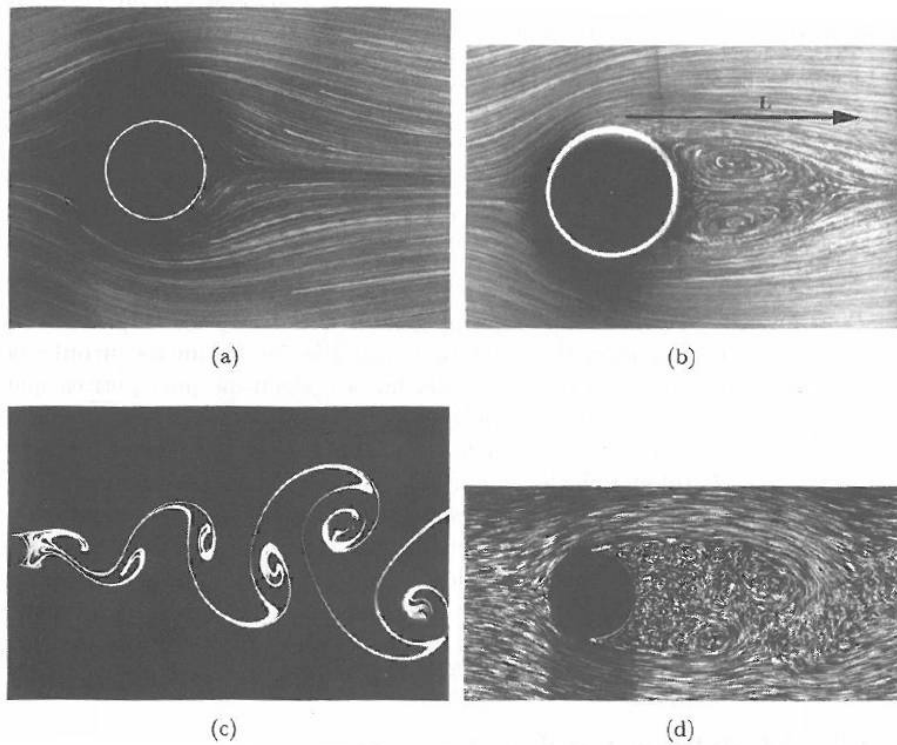


FIGURE 3.5 – Visualisation d'un écoulement derrière un cylindre à différents nombres de Reynolds. (a) écoulement symétrique à petit nombre de Reynolds. (b) Apparition de deux zones de recirculation fixes en arrière du cylindre ($Re \sim 20$). (c) Formation périodique de tourbillons ($Re \sim 200$). (d) Sillage turbulent ($Re \sim 8000$). [Guyon]

3.5 Exemples de projets réalisables

Il est possible d'aborder ce thème sous différents angles. Nous présentons ici seulement quelques possibilités de projets, mais il est bien évidemment possible et vivement conseillé de suggérer de nouvelles pistes d'études.

Une première approche peut se faire en déclinant les trois instabilités décrites ci-dessus : Rayleigh-Bénard, Taylor-Couette et l'expérience de Reynolds. Ce type d'approche permet de mettre en évidence le comportement universelle des instabilités au seuil critique. Elle permet aussi l'appren-

tissage de méthodes d'analyses théoriques nécessaires pour toute personne désirant comprendre les problématiques de contrôle des écoulements.

Un deuxième point d'approche consiste à étudier le déclenchement d'instabilité ou de turbulence autour d'obstacle dans le canal hydraulique. On pourra imaginer des écoulements derrière des piles de pont, dans des cavités ou encore autour de profils de voiture. Bien entendu cette liste n'est pas exhaustive, mais la démarche doit rester la même : décrire les transitions d'écoulements.

Chapitre 4

Quelques références bibliographiques

Les références proposées sont des lectures de différents niveaux. En plus de ces ouvrages il est possible de consulter les ouvrages de la bibliothèque des TP.

- Hydrodynamique physique ; E. Guyon, J.-P Hulin, L. Petit. *Livre très accessible et complet présentant les notions de base sur les instabilités hydrodynamiques et en turbulence.*
- Instabilités Hydrodynamiques ; F. Charru. *Livre très complet qui fourni les outils mathématiques nécessaires pour le traitement des instabilités hydrodynamiques. L'auteur alterne approche physique et description mathématique. C'est un bon livre pour commencer.*
- Instabilités, Chaos et Turbulence ; P. Manneville. *Ouvrage très complet sur les systèmes dynamiques et la physique non-linéaire. Ouvrage de niveau intermédiaire voir supérieur pour certains aspects.*
- Cours de turbulence de M. souhar. *Description physique de la turbulence. Ce cours est une très bonne approche pour commencer. On le trouve sur ARCHE.*
- Instabilité de Rayleigh-Bénard dans les cellules de Hele-Shaw ; M. Souhar, J.-P. Brancher, S. Aniss. *Article sur le dispositif expérimental disponible en salle de TP. Cet article fourni les équations de base et de dispersion de l'instabilité.*

Troisième partie

Turbomachines et éoliennes

Chapitre 1

Introduction générale

Ce chapitre est consacré au thème des turbomachines (pompes et turbines) mais aussi des éoliennes. En effet, les turbines et les éoliennes ont le même objectif qui est de produire de l'électricité à partir d'un fluide : l'eau et l'air respectivement. C'est pourquoi il semble intéressant d'intégrer à ce thème l'opportunité d'étudier les éoliennes. Ainsi, le point commun qui relie ces machines est le transfert d'énergie entre une roue et un fluide.

Le chapitre est divisé en trois parties. La première et seconde partie est dédiée aux turbomachines et éoliennes respectivement. Ces deux parties ont une structure identique : présentation générales des machines, rappels théoriques fondamentaux, description des installations expérimentales et références bibliographiques permettant une étude théorique approfondie. Enfin, la dernière partie propose quelques pistes d'étude pour mener le projet.

Chapitre 2

Les turbomachines

2.1 Présentation - Contexte

Les turbomachines forment une famille de machines qui utilisent un fluide pour effectuer une transformation d'énergie. Une turbomachine est définie comme un dispositif qui permet de donner ou de retirer de l'énergie à un fluide par l'action dynamique d'un élément rotatif appelé le rotor. On rencontre les turbomachines dans un grand nombre d'applications nécessitant un transfert d'énergie. Essentiellement, on distingue trois types d'applications : **Production d'électricité** (turbines à gaz, turbines à vapeur, turbines hydrauliques), **Propulsion** (turbines à gaz d'aviation, compresseurs de locomotive, turbines à gaz de navires) et **Industrie lourde** (compresseurs centrifuges, turbocompresseurs pour moteur diesel, turbines à vapeur, turbines à gaz, pompes et ventilateurs).

2.2 Classification

Plusieurs types de classification des turbomachines existent. La première concerne **le sens du transfert d'énergie**. Les turbomachines se divisent alors en deux grandes familles principales : Plusieurs types de classification des turbomachines existent. La première concerne le sens du transfert d'énergie. Les turbomachines se divisent alors en deux grandes familles principales :

- **Les génératrices** : elles fournissent de l'énergie au fluide. Il s'agit des compresseurs, ventilateurs et pompes.
- **Les réceptrices** : l'énergie du fluide est utilisée pour créer un travail mécanique. On parle alors de turbines.

Une seconde façon de classer les turbomachines s'appuie sur **la direction principale de l'écoulement** par rapport à l'axe de rotation de la machine. Selon ce critère, on parle alors de :

- **turbomachines axiales** : la direction de l'écoulement est parallèle à l'axe de rotation (hélices aériennes et marines appartiennent à cette catégorie, mais aussi certains ventilateurs, ainsi que les compresseurs et turbines axiaux des turboréacteurs, et les turbines hydrauliques de type Kaplan),
- **turbomachines radiales ou centrifuges** : une partie importante de l'écoulement à l'entrée ou à la sortie de la roue se fait dans une direction normale à l'axe de rotation

(pompes et ventilateurs centrifuges ou turbine Pelton),

- **turbomachines mixtes** : la direction de l'écoulement comporte des composantes axiale et radiale en entrée ou en sortie (turbines hydrauliques de type Francis).

Une dernière classification peut être faite en fonction de **la nature du transfert énergétique**.

En particulier, on trouve :

- **les turbomachines à impulsion ou à action** : le fluide ne subit aucune variation de pression lors du passage dans le rotor (ex. de la turbine Pelton),
- **les turbomachines à réaction** : l'échange énergétique entre le fluide et le rotor entraîne une chute de pression sans aucune variation de vitesse,
- **les turbomachines de type combiné** : le fluide subit un changement de pression et de vitesse lors de son passage par le rotor.

Enfin, si on considère les turbomachines en fonction du **type d'installation**, on parlera alors de :

- **turbomachines encastrées** : pompes centrifuges, turbines à gaz, etc où le fluide circule à l'intérieur de conduits,
- **turbomachines en veine libre** telles que les éoliennes, les hélices d'avion ou de navire.

2.3 Rappels théoriques

Que ce soit dans le cas des génératrices ou des réceptrices, il s'agit d'échanger de l'énergie entre une roue et un fluide. Il est donc possible de généraliser certains aspects théoriques quelque soit le sens dans lequel s'effectue ce transfert. Ici, ne sont données que les formules sans démonstration ou calculs détaillés. On s'orientera aux références bibliographiques ci-dessous pour une étude théorique approfondie.

2.3.1 Analyse dimensionnelle et similitude

Dans le cas des turbomachines, l'analyse dimensionnelle a pour objectif de comparer les régimes de fonctionnement (débit, hauteur d'eau ou vitesse de rotation) de deux turbomachines (une maquette et un prototype par exemple) à conditions qu'elles soient de géométrie semblable. Le principe de l'analyse dimensionnelle consiste dans un premier temps de lister tous les paramètres régissant le fonctionnement d'une turbomachine puis d'en déduire dans un second temps des nombres sans dimension dont les principaux nombres sont les suivant [1] :

— Pouvoir manométrique : $m = \frac{gH}{N^2 D^2}$

— Pouvoir débitant : $\delta = \frac{Q_v}{N D^3}$

— Coefficient de puissance : $\tau = \frac{P}{\rho N^3 D^5}$

avec g l'apesanteur (m.s^{-2}), H hauteur d'eau (m), N vitesse de rotation de la roue (tr.mn^{-1}), D le diamètre de la roue, ρ la masse volumique de l'eau (kg.m^{-3}) et P la puissance (W). Ces

nombres sont appelés les invariants de Rateau. La définition de H et de P dépend du cas (pompe ou turbine) et sera précisée ci-dessous. De même, le rendement de la turbomachine est aussi un invariant et sera défini ultérieurement.

2.3.2 Source ou puits dans un tube de courant

Dans ce qui suit, on considère le cas d'un fluide parfait et d'écoulements en régime permanent. Considérons une roue et un fluide contenus dans un même volume de contrôle V_c définissant un tube de courant (Figure 2.1). V_c est délimité par les surfaces d'entrée et sortie (S_1 et S_2 respectivement), la surface du contour de l'arbre de la roue S_4 , la surface entourant la roue et la surface latérale du tube de courant S_3 . La forme intégrale de l'équation d'Euler sur V_c donne [1] :

$$\rho g Q_v [H_{m2} - H_{m1}] = P_{ext} \quad (2.1)$$

Avec H_m la charge moyenne du fluide en entrée et sortie du tube de courant et P_{ext} la puissance échangée entre l'eau et l'extérieur, i.e. la roue ici. Ainsi, dans le cas d'une pompe, la roue cède une puissance au fluide. Par conséquent, vu par le fluide, on a $P_{ext} > 0$. Ce qui implique que $H_{m2} > H_{m1}$. Au contraire, dans le cas d'une turbine on a $P_{ext} < 0$ et $H_{m2} < H_{m1}$. Enfin, on note la différence entre H_{m2} et H_{m1} , la hauteur théorique H_{th} .

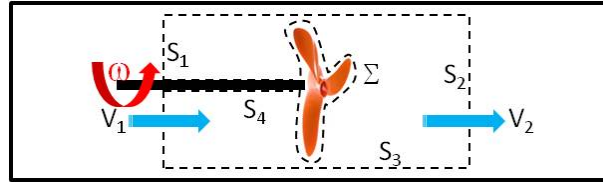


FIGURE 2.1 – Volume de contrôle d'un écoulement autour d'une roue.

2.3.3 Bilan de puissance

Une turbomachine est une succession d'étapes de conversion d'énergie en partant d'une énergie primaire à une énergie réellement récupérable en sortie de la machine. Bien entendu, dans les applications des turbomachines, une machine électrique (alternateur ou moteur) se rajoute à la chaîne de conversion. Néanmoins, dans le cadre de ces projets, on limitera le bilan en excluant la machine électrique, c'est-à-dire entre l'entrée et la sortie de la machine. Enfin, bien qu'on parle de conversion d'énergie, les bilans suivant sont effectués sur des puissances.

Cas des génératrices

La Figure 2.2 schématise le bilan de puissance dans le cas des génératrices. La puissance en entrée de la roue est la puissance mécanique $C\omega$ disponible sur l'arbre (fournie par le moteur électrique) : C est le couple moteur transmis à l'arbre (N.m) et ω la vitesse de rotation de l'arbre (rad.s^{-1}). Cet arbre étant monté sur des paliers ou roulements, il existe donc des pertes par frottement p_f . Le reste de puissance mécanique disponible (i.e. $C\omega - p_f$) est ensuite transférée

à la roue pour être transformée en une puissance hydraulique $\rho g Q_v H_{th}$ où H_{th} est la hauteur d'eau théoriquement disponible en sortie. Toutefois, l'écoulement du fluide sur les diverses parois constituant la machine induisent des pertes de charge par frottements. De plus, l'écoulement rencontre de nombreuses singularités qui induisent de nouvelles pertes de charge. L'ensemble de ces pertes constituent les pertes de charges interne perdues ($\rho g Q_v \Delta H_i$). Par conséquent, la puissance hydraulique réellement disponible est $\rho g Q_v H_n$ avec H_n la hauteur d'eau nette.

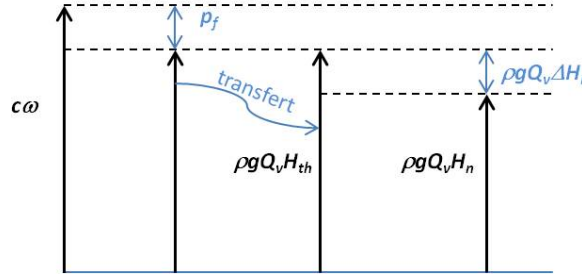


FIGURE 2.2 – Bilan de puissance pour une génératrice.

Suite à ce bilan, on introduit alors trois types de rendement :

- Rendement mécanique : $\eta_m = \frac{\rho g Q_v H_{th}}{C\omega}$
- Rendement interne ou hydraulique : $\eta_i = \frac{H_n}{H_{th}}$
- Rendement total ou global de la génératrice : $\eta = \eta_m \eta_i$ qui prend en compte tous les types de pertes

Cas des réceptrices

De manière similaire, la Figure 2.3 illustre le bilan de puissance dans le cas des génératrices (turbines). Ce bilan est en quelque sorte le bilan précédent mais dans le sens inverse. H_n est la hauteur nette qui est disponible en entrée de la turbine. Comme pour les génératrices, il existe des pertes de charge internes à la charge et seule la puissance hydraulique interne $\rho g Q_v H_i$ pourra être transformée en puissance mécanique $C_i \omega$. Enfin, il existe à nouveau une puissance dissipée par frottement p_f et la puissance mécanique réellement utilisable en bout d'arbre (ou en entrée de l'alternateur) est $C\omega$.

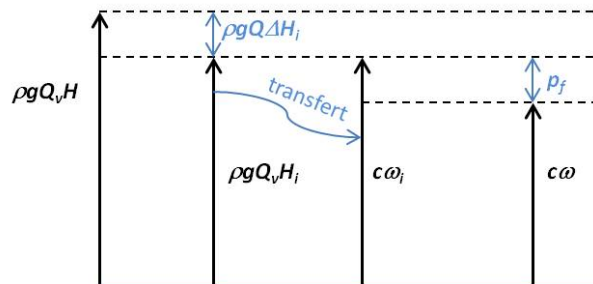


FIGURE 2.3 – Bilan de puissance pour une réceptrice.

Les rendements sont :

- Rendement interne ou manométrique : $\eta_i = \frac{H_i}{H_n}$
- Rendement mécanique : $\frac{C}{C_i}$
- Rendement total ou global de la turbine : $\eta = \frac{C\omega}{\rho g Q_v H_n}$

2.4 Pompe centrifuge multicellulaire

Les pompes rentrent dans la famille des génératrices. De l'énergie électrique est transférée à l'eau afin d'obtenir de l'énergie mécanique. Il existe plusieurs catégories de pompes selon la nature du mouvement de l'organe mis en mouvement (roue ou piston) et selon la nature du déplacement du fluide [réf?]. Dans le cadre de ces projets, nous nous attachons à étudier uniquement le cas des pompes centrifuges, et, pour lesquelles le fluide est l'eau.

2.4.1 Description

La Figure 2.4a) présente les principaux éléments constituant une pompe centrifuge et permet d'identifier le parcours de l'eau. L'organe principal est bien entendu la roue elle-même constituée de cellules séparées par des aubes, paroi délimitant les cellules (Figure 2.4b)). L'eau rentre dans la roue axialement puis pénètre radialement (perpendiculairement à l'arbre de la roue) dans les cellules. En sortie de roue, ou de chaque cellule, l'eau sort radialement et rencontre un diffuseur et volute avant d'être refoulée dans une bride de raccordement.

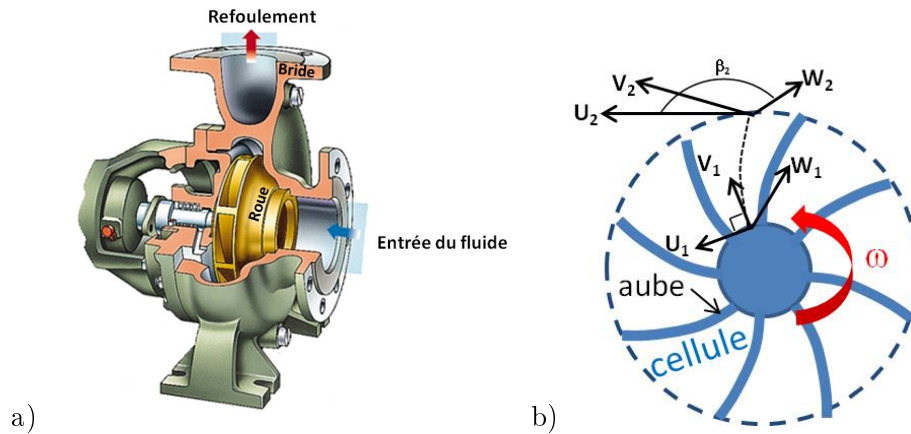


FIGURE 2.4 – a) éclaté d'une pompe centrifuge et visualisation de la roue, b) triangle des vitesses d'une particule fluide tracé à l'entrée et à la sortie de la roue.

2.4.2 Rappels théoriques

Triangle vitesse

La Figure 2.4b) donne le triangle des vitesses des particules fluides en entrée (indice 1) et en sortie (indice 2) d'une cellule constituant la roue. La vitesse V est la vitesse absolue du fluide (référentiel fixe du laboratoire), U la vitesse d'entraînement due à la rotation de la roue et W la vitesse relative (référentiel de la roue). Ainsi, en entrée et en sortie d'une cellule on a respectivement :

$$\vec{V}_1 = \vec{U}_1 + \vec{W}_1 \quad \text{et} \quad \vec{V}_2 = \vec{U}_2 + \vec{W}_2 \quad (2.2)$$

Hauteur théorique

Le second théorème d'Euler (principe de quantité de mouvement angulaire en fluide parfait et régime permanent) appliquée à la roue permet d'obtenir l'expression de la puissance échangée entre la roue et l'eau (Puissance extérieure P_{ext} vue ci-dessus) :

$$P_{ext} = \vec{U}_2 \vec{V}_2 - \vec{U}_1 \vec{V}_1 = \rho g Q_v H_{th} \quad (2.3)$$

On en déduit alors la hauteur d'eau théorique H_{th} :

$$H_{th} = \frac{\vec{U}_2 \vec{V}_2 - \vec{U}_1 \vec{V}_1}{g} \quad (2.4)$$

Or, l'eau entrant radialement dans l'aube, cette expression se simplifie et conduit à :

$$H_{th} = \frac{\vec{U}_2 \vec{V}_2}{g} \quad (2.5)$$

2.4.3 Installation expérimentale

L'ENSEM dispose d'un banc de deux pompes centrifuges multicellulaires entraînées par des moteurs électriques. En salle, une pochette regroupant plusieurs documents est disponible. Ces documents fournissent de manière très détaillée toutes les caractéristiques de l'installation complète : pompes et instruments de mesures. Toutes les données, valeurs ou formules nécessaires sont à chercher dans ces documents.

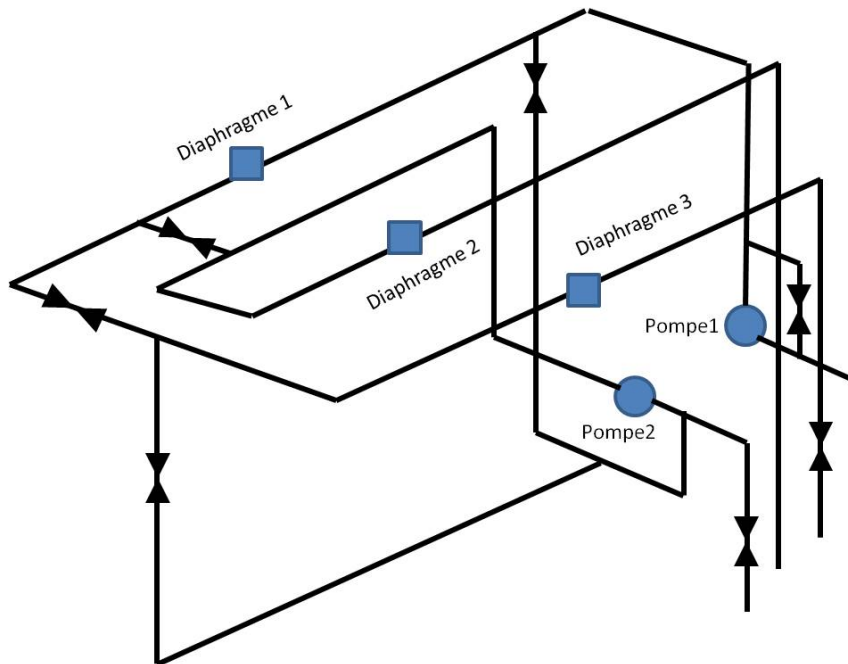


FIGURE 2.5 – Représentation du banc des pompes centrifuges multicellulaires.

L'alimentation en eau de l'installation est assurée par une bache souterraine de grande contenance. Ainsi, l'eau circule en boucle fermée entre la bache et le banc expérimental. Le dispositif

dispose de vannes permettant d'étudier les deux pompes soit de manière séparé soit en les associant en série ou en parallèle (voir document en salle pour la configuration des vannes). La vitesse de rotation des pompes ainsi que le débit d'eau qui circule sont réglables. Le dispositif est également équipé de capteurs de pression pour déterminer les hauteurs d'eau de refoulement nettes et de diaphragmes pour la mesure des débits. La mesure du couple et de la vitesse de rotation pour chacune des pompes est accessible via des capteurs intégrés aux pompes.

2.5 Ventilateur

En complément à l'étude des pompes centrifuges multicellulaires, il existe une seconde installation mettant en œuvre un autre type de génératrice : le ventilateur. Mise à part que le fluide de travail est maintenant l'air, le ventilateur est typiquement de conception semblable à celle d'une pompe centrifuge multicellulaire.

La Figure 2.6 décrit schématiquement le ventilateur disponible à l'ENSEM. Il est principalement composé d'un manchon d'aspiration d'air, d'une roue contenue dans un carter et d'un manchon vertical pour refouler l'air. Une roue composée de plusieurs cellules est mise en rotation par un moteur électrique via une courroie de transmission. L'écoulement de l'air est similaire à celui de la pompe : il est aspiré axialement avant de pénétrer radialement dans les cellules.

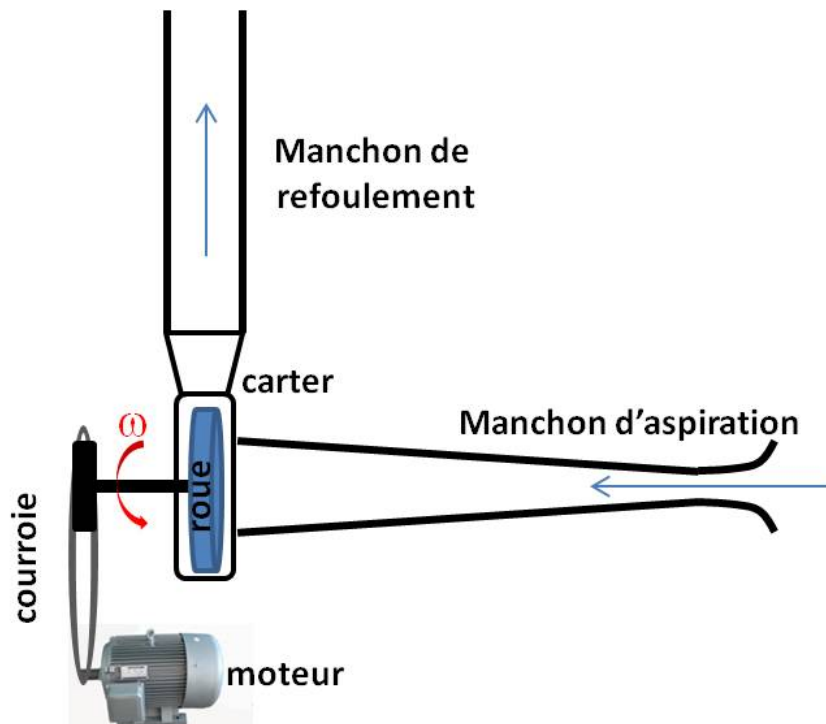


FIGURE 2.6 – Dispositif expérimental du ventilateur.

De même, l'approche théorique vue ci-dessus pour les pompes reste valable (triangle des vitesses, similitudes ou hauteur de refoulement théorique). Étant donné que le fluide est de l'air, Il faut quand même vérifier le caractère compressible ou non de l'écoulement. Les expériences montrent que le nombre de Mach est inférieur à 0.3. Ainsi, on admettra par hypothèse qu'en plus d'être

permanent, l'écoulement est incompressible. Le dispositif est équipé de plusieurs manomètres à eau afin de mesurer le débit et la hauteur de refoulement.

Par ailleurs, une caractéristique importante, et avantage de cette installation par rapport aux pompes, est qu'il est possible de démonter la roue et de la remplacer par une autre afin de modifier la géométrie des cellules (angle des aubes). Ceci a pour conséquence de modifier, pour un même débit et vitesse de rotation, le triangle des vitesses et donc la hauteur de refoulement. Une documentation complète est également accessible en salle : caractéristiques techniques du ventilateur et conduite des mesures (débit d'air, hauteur de refoulement, vitesse de rotation, couple etc. ...).

2.6 Les turbines

2.6.1 Généralités et descriptions

Les turbines constituent la famille des réceptrices et sont au cœur des aménagements hydro-électriques : de l'énergie hydraulique est convertie en énergie électrique. Les turbines les plus fréquemment rencontrées dans la production d'électricité sont les suivantes :

- **Turbines à action** : turbine Pelton.
- **Turbines à réaction** : les deux turbines hydrauliques à réaction les plus répandues sont la turbine Francis et la turbine Kaplan.

On peut trouver les plages d'utilisation de ces différentes turbines à la Figure 2.7. Lors de ces projets, il est possible de pouvoir étudier ces trois turbines.

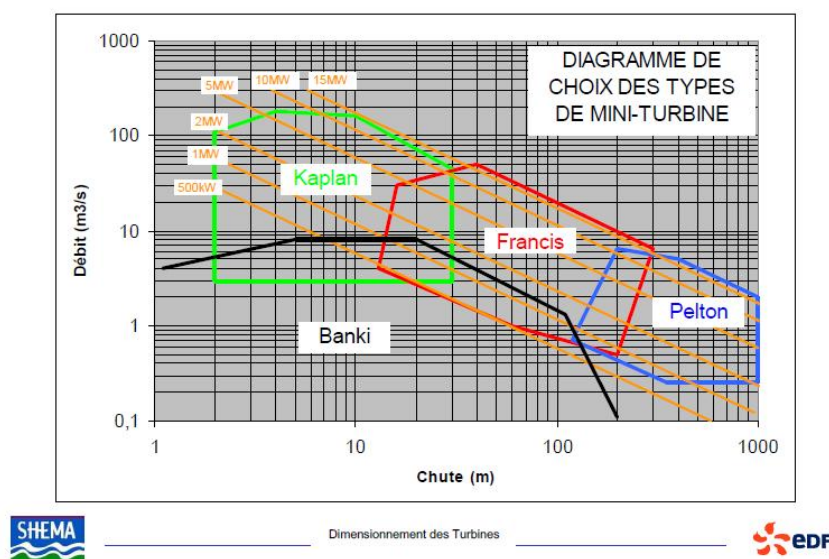


FIGURE 2.7 – Plages d'utilisation Débit/Hauteur de chute des principales turbines.

L'élément principal d'une turbine est bien entendu la roue et change selon le type de la turbine. La Figure 2.8 montre la roue d'une turbine Pelton (a), d'une turbine Kaplan (b) et d'une turbine Francis (c) respectivement. A noter que les deux dernières roues sont intégralement noyées dans l'eau (turbines à réactions) alors que la première est à l'air libre (turbine à action). De la même

manière, la géométrie et disposition des autres organes constituant les turbines (dispositifs d'injection et de récupération de l'eau) dépendent du type de la turbine et seront présentés au cas par cas ci-dessous.

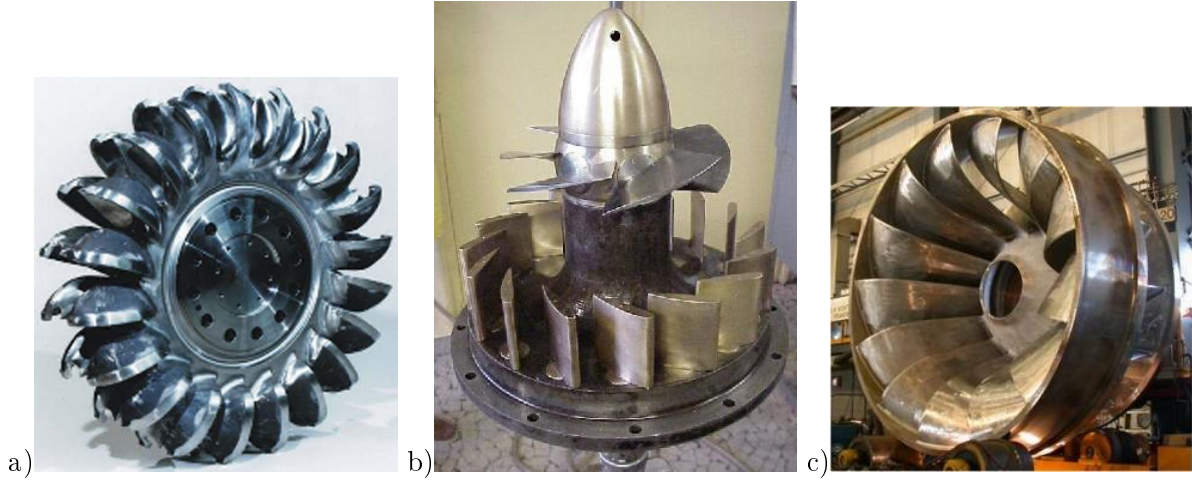


FIGURE 2.8 – Photographies d'une roue d'une turbine Pelton (a), d'une turbine Kaplan (b) et d'une turbine Francis (c).

2.6.2 Rappels théoriques

Étant donné que le fonctionnement d'une turbine repose sur la mise en rotation d'une roue tout comme une pompe, on peut tracer le triangle des vitesses en entrée et en sortie de la roue (triangles différents selon le type de la turbine) et appliquer le second théorème d'Euler pour exprimer la puissance externe et la hauteur théorique :

$$P_{ext} = \vec{U}_2 \vec{V}_2 - \vec{U}_1 \vec{V}_1 = \rho g Q_v H_{th} \quad (2.6)$$

Dans ce cas, la puissance externe (ou puissance intrinsèque) est comptée négativement puisque c'est le fluide qui cède de l'énergie à la roue. Néanmoins, dans le cas des turbines il est usuel de changer le signe afin de compter la puissance interne positivement. D'après la Figure 2.3, la hauteur théorique correspond finalement à la hauteur interne H_i .

2.6.3 Les installations expérimentales

Dans cette section vont être présentées les installations expérimentales de la turbine Pelton et Kaplan respectivement. L'installation de la turbine Francis est d'utilisation limitée (banc d'essai pour l'entreprise ER3i) mais pourra faire l'objet d'une présentation particulière si le groupe décide de l'étudier. Bien entendu, les turbines de l'ENSEM sont de dimensions géométriques nettement réduites par rapport aux turbines réellement utilisées dans les centrales hydrauliques.

La turbine Pelton

Généralement, ces turbines sont employées quand une haute chute d'eau est disponible (plusieurs centaines de mètre à 1000 m environ) : lacs d'altitude ou barrages. L'ENSEM ne disposant pas

de sites appropriés pour obtenir de telle hauteur de chute, une hauteur de chute suffisante est générée artificiellement en mettant sous pression de l'eau contenue dans une cloche. La pression maximale que l'on peut atteindre est de 10 bars ce qui correspond à une hauteur de chute maximum de 100 m. Pour ce type de turbines, la roue est constituée d'augets (Figure 2.8a) sur lesquels plusieurs jets sont envoyés.

La Figure 2.9 décrit l'ensemble de l'installation permettant l'étude de la turbine Pelton. Les caractéristiques et toute la documentation nécessaire se trouve en salle.

Tout comme pour le banc des pompes centrifuges, l'alimentation en eau de l'installation se fait en boucle fermée via la bache souterraine. C'est une pompe centrifuge qui permet la mise sous pression de la cloche. Ici, un seul jet est envoyé sur les augets (injecteur, Figure 2.9).

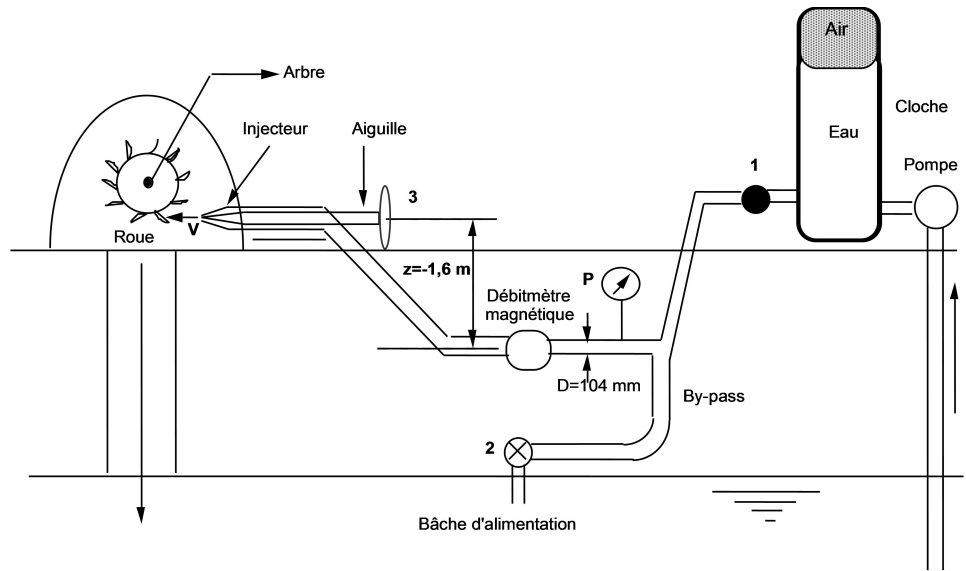


FIGURE 2.9 – Schéma de l'installation de la turbine Pelton.

L'installation permet de régler la hauteur de chute d'eau (By-pass, Figure 2.9) ainsi que le débit du jet (aiguille, Figure 2.9). L'axe de la roue est relié à un alternateur dont le courant d'excitation du rotor est ajustable permettant ainsi de fixer la vitesse de rotation N de la roue. Enfin, le couple généré C est mesuré par une masse suspendue et reliée au stator de l'alternateur.

La turbine Kaplan

Les turbines Kaplan ont été conçues pour des sites naturels offrant de faible chute d'eau mais des débits importants, c'est-à-dire le long des cours d'eau importants. La roue est une hélice qui est totalement émergée. De manière identique à la turbine Pelton, l'axe de l'hélice est relié à un alternateur avec le même procédé pour fixer la vitesse de rotation N et mesurer le couple C .

La Figure 2.10 présente l'installation de la turbine Kaplan. Les hauteurs de chutes étant plus faible, un château d'eau perché sur le toit du bâtiment permet d'atteindre des hauteurs de chutes nettes d'environ 5 m (vanne de réglage de hauteur de chute, Figure 2.10). Le remplissage en continu du château d'eau est assuré par pompage de l'eau contenue dans la bache souterraine. Le débit est ajustable en jouant sur le vannage (volant, Figure 2.10) et mesurable via un déversoir

sous la dalle de la salle. L'eau à la sortie du déversoir retourne enfin dans la bache souterraine. Enfin, par rapport à la turbine Pelton, l'influence d'un paramètre supplémentaire peut être observée : l'angle de calage des pales de l'hélice. Le calage peut être modifié en intervenant sur un mécanisme, lui même intégré sur l'arbre de rotation de l'hélice, **quand la turbine est à l'arrêt uniquement**.

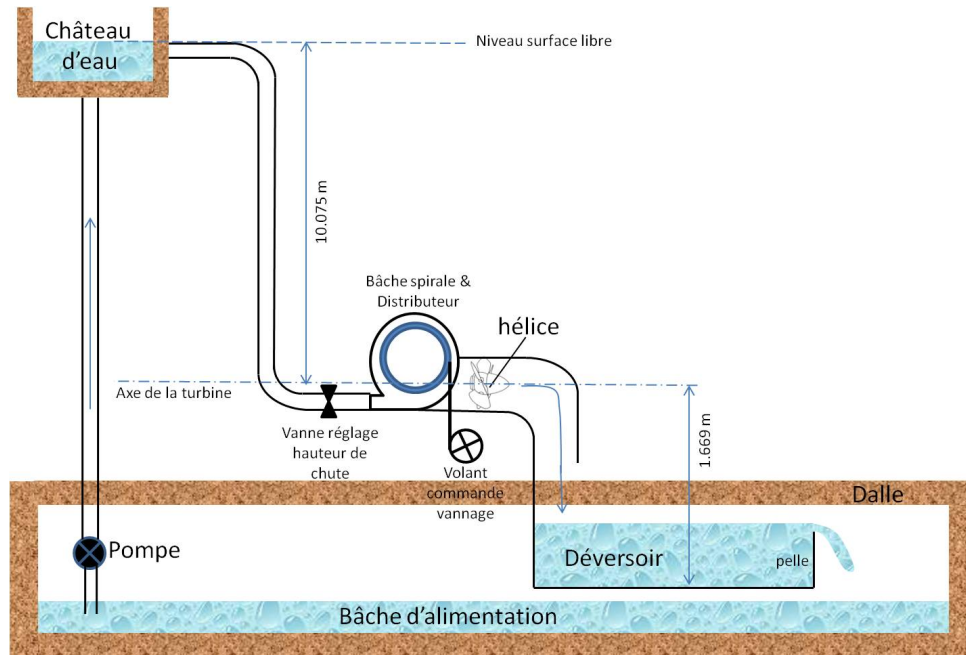


FIGURE 2.10 – Schéma de l'installation de la turbine Kaplan.

2.7 Références bibliographiques

[1] M. Souhar, « Notes de cours de turbomachines », polycopié de cours, 3ème année de l'EN-SEM, parcours TETF, 2014.

[2] Livre illustré

Chapitre 3

Les éoliennes

Remarque : à la différence des turbomachines, il n’y pas de documents supplémentaires de disponible au niveau des installations. Ainsi, les installations expérimentales sont entièrement détaillées : vous y trouverez toutes les valeurs nécessaires ou informations indispensables pour les calculs. La théorie est également davantage détaillée mais reste toujours succincte. Une consultation des références est donc indispensable.

3.1 Présentation – Contexte

Une éolienne est une machine conçue pour capter l’énergie du vent et la convertir en énergie électrique. On peut distinguer deux étapes de conversion : puissance du vent convertie en puissance mécanique par l’intermédiaire des pales et puissance mécanique convertie en puissance électrique par l’intermédiaire de la génératrice électrique. Toutefois, le cadre de l’étude est ici limité à la première étape.

D’autre part, il existe deux grandes familles d’éoliennes : les éoliennes à axe de rotation verticale et les éoliennes à axe de rotation horizontale. A l’ENSEM, le choix s’est porté uniquement sur les éoliennes à axe horizontal. Ce sont en effet celles les plus couramment utilisées comme unité de production.

3.2 Étude théorique

L’étude théorique nécessite comme pré requis quelques notions fondamentales en aérodynamique, notamment concernant l’étude des efforts qui s’exercent autour d’un profil d’aile. On se rapportera alors à la partie 4 correspondant du polycopié.

L’objectif principal de l’étude théorique est de calculer les efforts qu’exerce le vent sur les pales et d’en déduire le rendement de la machine que l’on appelle le coefficient de puissance C_p . Ce coefficient est défini comme le rapport de la puissance mécanique disponible sur l’axe de rotation sur la puissance du vent. Il existe deux théories permettant de déterminer ce rapport : la théorie simplifiée de Betz et la théorie plus complète dite de l’élément de pale. Ces deux approches vont

R : rayon de la pale	$\lambda_0 = \frac{R\omega}{V_1}$: vitesse spécifique
r : rayon local de la pale par rapport à l'axe de rotation	$\lambda = \frac{r\omega}{V_1}$: vitesse spécifique locale
$l(r)$: longueur de la corde de la pale à la distance r	F : force exercée par l'aire sur les pâles C : couple moteur
B : nombre de pales du rotor	ω : vitesse de rotation du rotor
θ : angle de vrillage α : angle d'incidence ou d'attaque ϕ : angle d'inclinaison avec $\phi = \theta + \alpha$	P_{elec} : puissance électrique $P = F \cdot V'$: puissance captée par les pales $P_u = C \cdot \omega$: puissance mécanique
V_1 : vitesse du vent en amont de l'éolienne V_2 : vitesse du vent en aval de l'éolienne V' : vitesse du vent traversant les pales	$C_p = \frac{P}{0,5\rho AV_1^3}$: coefficient de puissance avec A la surface balayée
C_z & C_x : coefficient de portance et de traînée défini par rapport à la direction du vent relatif C_l & C_D : coefficient de portance et de traînée défini par rapport au plan de rotation	$C_M = \frac{C_p}{\lambda_0}$: coefficient de moment

TABLE 3.1 – nomenclature et notations utilisées dans le cadre de ce document.

être présentées successivement.

3.2.1 Nomenclature

La modélisation des efforts exercés par le vent sur les pales fait intervenir un grand nombre de paramètres dont les notations peuvent varier d'une référence à une autre (cf : section 3.5 de cette partie). De ce fait, on adoptera la nomenclature fournie ci-dessous (Tableau 3.1) pour l'étude théorique qui suit.

3.2.2 Théorie de Betz

Dans cette théorie, on considère un écoulement de fluide parfait, incompressible, permanent, unidirectionnel et irrotationnel. On suppose que l'éolienne est placée dans un air animé à l'infini d'une vitesse amont V_1 et à l'aval d'une vitesse V_2 . La puissance mécanique captée par le disque rotor est exprimée par la relation suivante (Figure 3.1) :

$$P = \frac{1}{2}\rho A_1 V_1^3 - \frac{1}{2}\rho A_2 V_2^3 \quad (3.1)$$

(Différence de puissance entre les flux d'air amont et aval au rotor)

Puis, en exprimant la conservation de la masse :

$$\rho A_1 V_1 = \rho A_2 V_2 = \dot{m} \quad (3.2)$$

on obtient ainsi :

$$P = \frac{1}{2} \dot{m} (V_1^2 - V_2^2) \quad (3.3)$$

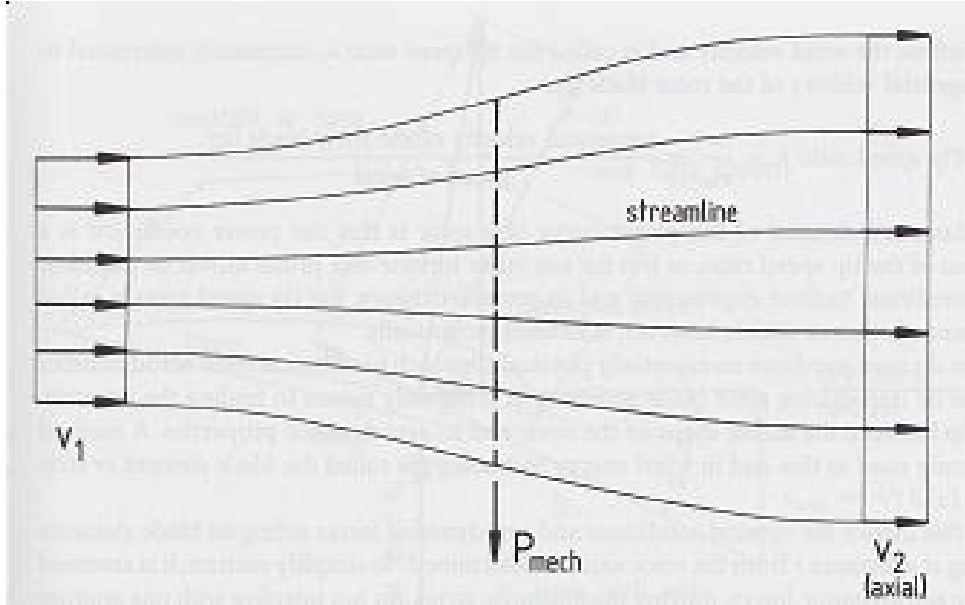


FIGURE 3.1 – Représentation des lignes de courant traversant les pales de l'éolienne.

On peut trouver une autre expression de cette puissance, en appliquant le théorème d'Euler au tube de courant représenté par le jet d'air. Ainsi, la force F qu'exerce l'air sur le rotor s'exprime par :

$$F = \dot{m} (V_1 - V_2) \quad (3.4)$$

donnant lieu à une puissance mécanique convertie par la rotor :

$$P = FV' = \dot{m} (V_1 - V_2) V' \quad (3.5)$$

où V' est la vitesse du vent dans le plan de rotation des pales. Par identification avec les deux formulations de la puissance récupérée P , on obtient :

$$V' = \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \quad (3.6)$$

Ce qui au final, nous permet d'écrire la puissance du rotor rapportée à l'aire balayée A par ce dernier :

$$P = FV' = \frac{1}{4} \rho A (V_1 + V_2)^2 (V_1 - V_2) \quad (3.7)$$

On peut à partir de cette relation exprimée le coefficient de puissance C_p qui est le rapport entre la puissance récupérée sur le rotor par la puissance disponible dans le flux d'air basé sur la vitesse

du vent et la surface balayée par le rotor :

$$C_p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{V_2}{V_1} \right)^2 \left(1 - \frac{V_2}{V_1} \right) \quad (3.8)$$

En introduisant le coefficient d'interférence axiale a , défini comme la diminution de la vitesse du vent entre la vitesse amont V_1 et celle traversant le rotor V' , on peut écrire que $V' = (1-a)V_1$.

On peut montrer que ce coefficient est maximum pour $a = 1/3$, et que dans ce cas $C_p = 16/27 \approx 0,596$. En reportant cette valeur particulière dans l'expression de la puissance P , on obtient la puissance maximale susceptible d'être recueillie :

$$P_{max} = \frac{8}{27} \rho A V_1^3 \quad (3.9)$$

3.2.3 Théorie de la quantité de mouvement de l'élément de pale

L'objectif de cette théorie est de fournir une méthode de calcul permettant d'analyser les performances d'une éolienne (calcul du coefficient de puissance) ou de designer des pales. La théorie consiste à comparer deux méthodes de calcul permettant chacune de déterminer les efforts (poussée et moment) locaux, i.e. dans une section ou élément de pale. Dans la première méthode, ces efforts sont déduits en tenant compte de l'effet de rotation de l'écoulement. Puis, la seconde méthode utilise la portance et trainée qui sont exprimées localement.

Prise en compte de l'effet de rotation

Pour le rotor idéal de la théorie de Betz, il n'y a pas de prise en compte de la rotation dans le sillage. Or dans la pratique, le sillage possède deux principales structures tourbillonnaires (Figure 3.2) : un tourbillon axial ou central et tourbillons marginaux aux extrémités des pales. La théorie de l'élément de pale a donc pour ambition de tenir compte de l'effet de rotation du sillage.

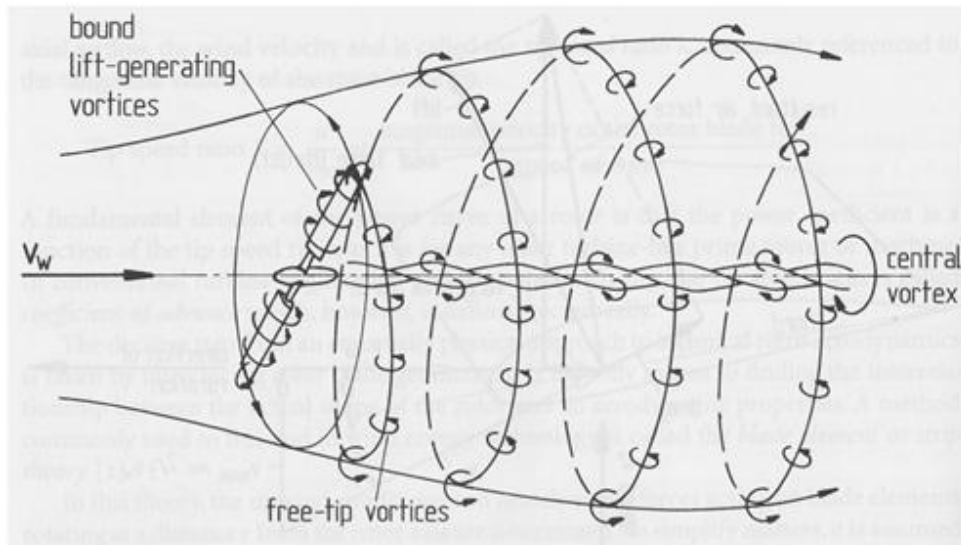


FIGURE 3.2 – Illustration de l'effet de rotation des pales : tourbillons marginaux et axial.

Le rotationnel de l'écoulement peut être pris en compte en appliquant le théorème d'Euler pour les machines tournantes en s'appuyant sur le triangle des vitesses dans la section du rotor de la Figure 3.3. Si on applique ce dernier sur un volume de contrôle infinitésimal d'épaisseur dr , on obtient l'expression de la puissance transmise :

$$P = d\dot{m}\omega r V_\theta = 2\pi r^2 \rho V' \omega V_\theta dr \quad (3.10)$$

avec V_θ la composante azimutale de la vitesse absolue après le rotor et V' est la vitesse axiale à travers le rotor. Nous avons vu que la vitesse axiale à travers le rotor peut être exprimée par le coefficient d'interférence axiale a . De manière similaire, on peut introduire le coefficient d'induction angulaire a' caractérisant ainsi l'augmentation du rotationnel de l'écoulement à la traversée du rotor. Ainsi, la composante azimutale s'écrit :

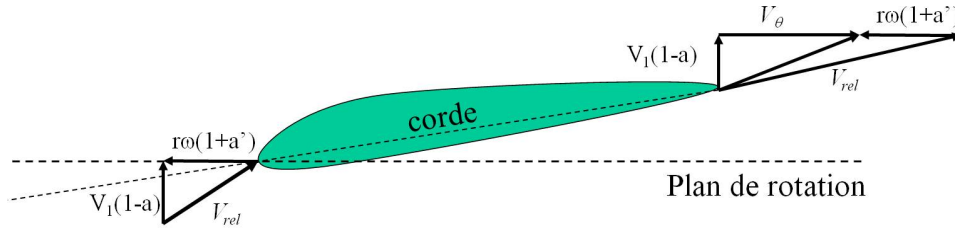


FIGURE 3.3 – Triangle des vitesses au bord d'attaque et bord de fuite dans une section du rotor.

La puissance élémentaire s'écrit donc comme :

$$dP = 4\pi\rho\omega^2 V_1 a' (1-a) r^3 dr \quad (3.11)$$

Après intégration de 0 à R , on obtient la puissance totale récupérée par le rotor :

$$P = 4\pi\rho\omega^2 V_1 \int_0^R a' (1-a) r^3 dr \quad (3.12)$$

On voit ici que si on veut maximiser la puissance récupérée, il faut maximiser l'expression :

$$g(a, a') = a' (1-a) \quad (3.13)$$

Or si les angles d'attaque locaux sont inférieurs à l'angle de décrochage, ces deux coefficients ne sont pas indépendants, on a ainsi :

$$\tan \phi = \frac{a'\omega r}{aV_1} = \frac{(1-a)V_1}{(1+a')\omega r} \quad (3.14)$$

Ce qui conduit à la relation entre a et a' : $\omega r / V_1 a' (1+a') = a (1-a)$. L'optimisation conduit donc à :

$$\frac{dg}{da} = (1-a) \frac{da'}{da} - a' = 0 \quad (3.15)$$

$$\text{et} \quad (1+2a') \frac{da'}{da} \left(\frac{\omega r}{V_1} \right)^2 = 1-2a \quad (3.16)$$

Ceci conduit à la relation suivante entre a et a' optimisant la puissance récupérée :

$$a' = \frac{1 - 3a}{4a - 1} \quad (3.17)$$

Ceci permet finalement d'obtenir le tableau de valeurs suivant :

a	a'	$\lambda = \omega r/V_1$
0,26	5,5	0,073
0,27	2,375	0,157
0,28	1,333	0,255
0,29	0,812	0,374
0,30	0,500	0,529
0,31	0,292	0,753
0,32	0,143	1,15
0,33	0,031	2,63
0,333	0,00301	8,58

A partir de ces relations, le coefficient de puissance optimal peut être obtenu par intégration. Ceci a été réalisé par Glauert pour différentes vitesses spécifiques $\lambda_0 = \omega R/V_1$ avec une comparaison avec la limite de Betz de $16/27$ (i.e pour $a' = 0$). Ces résultats sont reportés dans le tableau ci-dessous :

$\lambda_0 = \omega R/V_1$	$27C_p/16$
0,5	0,486
1,0	0,703
1,5	0,811
2,0	0,865
2,5	0,899
5,0	0,963
7,5	0,983
10,0	0,987

Prise en compte de l'élément de pale

Jusqu'à présent, la géométrie effective du rotor, nombre de pales B , les lois de vrillage et de corde et le profil de pale, n'est pas prise en compte. Nous allons ici coupler les effets de rotations avec les efforts locaux sur la pale. Nous allons pour cela faire l'hypothèse suivante :

- Chaque élément annulaire est indépendant des autres.

Nous pourrions établir que :

- la poussée élémentaire vaut : $dF = 4\pi r \rho V_1^2 a (1 - a) dr$
- le moment élémentaire : $dM = 4\pi \rho \omega V_1 a' (1 - a) r^3 dr$

On peut évaluer ces termes en considérant l'écoulement local autour de la pale en se basant sur le triangle des vitesses suivant :

avec θ l'angle de vrillage local de la pale, c'est-à-dire l'angle local entre la corde et le plan de rotation du rotor. Puis, α est l'angle d'attaque local, c'est à dire l'angle local entre la corde et la

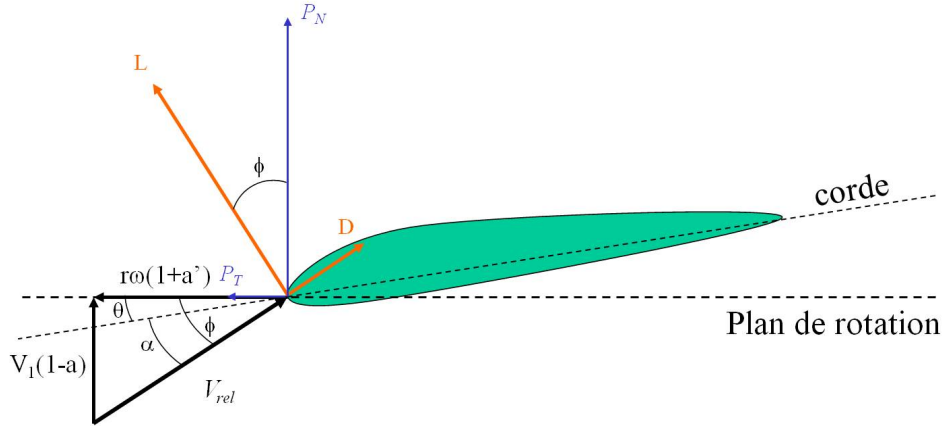


FIGURE 3.4 – Triangle des et efforts exercés dans le repère relative au vent relatif et dans le repère relatif au plan de rotation.

direction du vent relatif. Enfin, ϕ est l'angle d'inclinaison défini par :

$$\phi = \alpha + \theta$$

Nous pouvons donc écrire avec ces définitions que :

$$L = \frac{1}{2} \rho V_{rel}^2 l(r) C_z \quad D = \frac{1}{2} \rho V_{rel}^2 l(r) C_x \quad (3.18)$$

pour l'expression des forces de portance et de traînée par unité de longueur, en supposant connus les coefficients de portance et de traînée. De façon à obtenir une expression de la poussée et du moment élémentaire, il faut projeter ces forces suivant les directions normale et tangentielle au plan de rotation du rotor. Ce qui conduit à :

$$p_N = L \cos \phi + D \sin \phi \quad p_T = L \sin \phi - D \cos \phi \quad (3.19)$$

Après quelques calculs et en introduisant les coefficients adimensionnels des efforts normaux et tangentiels, $C_n = C_z \cos \phi + C_x \sin \phi$ et $C_t = C_z \sin \phi - C_x \cos \phi$, on obtient que :

$$dF = \frac{1}{2} \rho B \frac{V_1^2 (1-a)^2}{\sin^2 \phi} l(r) C_n dr \quad dM = \frac{1}{2} \rho B \frac{V_1 (1-a) \omega r (1+a')}{\sin \phi \cos \phi} l(r) C_t dr \quad (3.20)$$

avec B le nombre de pales et $l(r)$ la loi de corde. Par identification, on obtient que les coefficients d'induction axial et tangentiel doivent satisfaire aux relations suivantes :

$$a = \frac{1}{\frac{4 \sin^2 \phi}{\sigma C_n} + 1} \quad a' = \frac{1}{\frac{4 \sin \phi \cos \phi}{\sigma C_t} - 1} \quad (3.21)$$

où $\sigma(r) = \frac{l(r)B}{2\pi r}$ représente la solidité locale du rotor.

Ainsi, l'algorithme de calcul pour détermine la puissance récupérée par le rotor est le suivant :

- (1) – Initialisation des coefficients a et a'
- (2) – Calcul de l'angle

- (3) – Détermination de l'angle d'incidence local
- (4) – Lecture des coefficients de portance et de traînée
- (5) – Déduction des coefficients normaux et tangentiels
- (6) – Calcul des coefficients a et a' suivant les dernières expressions
- (7) – Réitération jusqu'à convergence sur les valeurs de a et a'
- (8) – Détermination des efforts locaux sur l'élément considéré

Cette approche est la plus simple pour prendre en compte la géométrie du rotor. Pour obtenir une bonne approximation, il faut cependant faire deux corrections [3-5] : correction de Prandtl (effets en bout de pale) et correction de Glauert (effets du décrochage).

Design optimal d'une pale

La conception optimale de la forme d'une pale d'une hélice implique que la relation $a' = \frac{1-3a}{4a-1}$ correspondant à une puissance maximale soit satisfaite. On peut faire l'hypothèse de négliger les frottements en prenant $C_x = 0$. Les expressions de a et a' deviennent :

$$a = \frac{1}{\frac{4 \sin^2 \phi}{\sigma C_z \cos \phi} + 1} \quad a' = \frac{1}{\frac{4 \cos \phi}{\sigma C_z} - 1} \quad (3.22)$$

En utilisant la relation reliant les deux facteurs d'interférence a et a' , on obtient une seconde relation exprimant le facteur a :

$$a = \frac{4 \cos \phi}{\sigma C_z + 12 \cos \phi} \quad (3.23)$$

L'égalité des deux expressions de a donne une équation quadratique, dont l'inconnue est le terme σC_z :

$$(\sigma C_z)^2 + 8 \cos \phi \sigma C_z - 16 \sin^2 \phi = 0 \quad (3.24)$$

dont la racine acceptable est $\sigma C_z = 4(1 - \cos \phi)$. Ceci donne l'expression optimale de la corde le long de la pale :

$$l(r) = \frac{8\pi r}{BC_z} (1 - \cos \phi) \quad (3.25)$$

Si on reprend la relation donnant l'angle ϕ , $\tan \phi = \frac{(1-a)V_1}{(1+a')\omega r} = \frac{(1-a)}{(1+a')\lambda}$, et en substituant a' , nous obtenons :

$$\lambda = \frac{(4a-1)(1-a)}{a} \frac{1}{\tan \phi} \quad (3.26)$$

En remplaçant a par sa valeur et après quelques simplifications, on aboutit finalement à la loi de vrillage optimale :

$$\phi = \frac{2}{3} \arctan \frac{1}{\lambda} \quad \theta = \phi - \alpha_{opt} \quad (3.27)$$

où α_{opt} est l'angle d'incidence optimale, qui donne $(C_z/C_x)_{max}$.

3.3 Les installations expérimentales

Deux éoliennes tripales à axe horizontale peuvent être étudiées séparément. La première se situe à l'extérieur à proximité du centre de doc et des panneaux photovoltaïques. Néanmoins, elle présente l'inconvénient de ne pas pouvoir effectuer de mesures les jours sans vent. Ainsi, pour palier à ce problème, une seconde éolienne a été insérée à l'intérieur d'une soufflerie dans la salle de TP.

3.3.1 Éolienne extérieure

Présentation générale

La Figure 3.5 représente schématiquement les différents éléments constituant l'installation de l'éolienne extérieure. L'éolienne acquise par l'ENSEM est une éolienne développant une puissance électrique nominale de 1 kW de la gamme Cyclone et distribuée par l'entreprise Joliet. Elle est située à l'extérieur sur une plate-forme bétonnée et montée sur un mât d'une hauteur de 12 m. Un réseau de plusieurs câbles souterrains relie la plate-forme à la salle de TP. Trois de ces câbles correspondent aux 3 phases de la génératrice (alternateur). Et les autres câbles disponibles servent à la transmission d'autres données nécessaires comme la vitesse et direction du vent par exemple (voir ci-dessous).

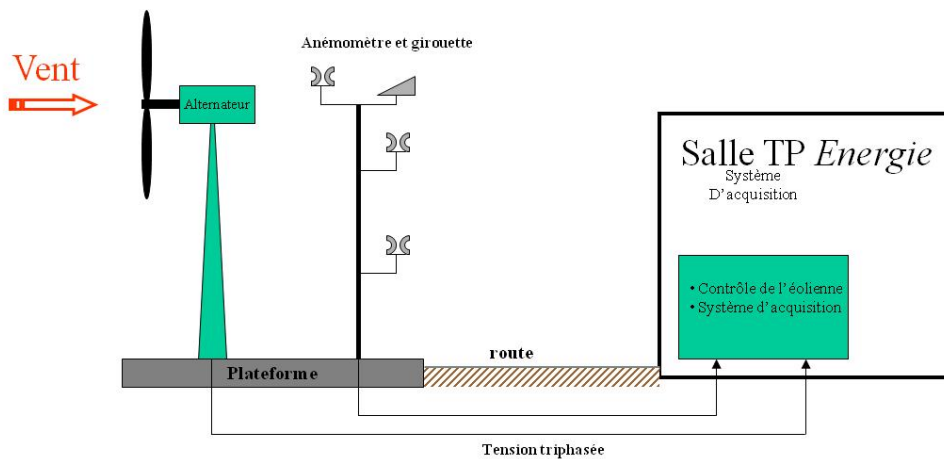


FIGURE 3.5 – Schéma de l'installation complète pour l'éolienne extérieure.

En salle de TP se trouve un dispositif qui permet le contrôle de l'éolienne ainsi qu'un système d'acquisition pour les grandeurs nécessaires à relever. Cette partie a été développée au GREEN. La Figure 3.6 donne en détail les éléments de ce dispositif. La tension des trois phases est d'abord redressée par un pont de diodes. Ensuite, un hacheur série permet de fixer une tension V_{seuil} et

donc de faire varier la charge électrique appliquée à l'éolienne. Le hacheur est piloté par le logiciel dSpace où il est alors possible de fixer la valeur de V_{seuil} . Par conséquent, on peut agir sur la vitesse de rotation de l'éolienne en jouant sur la valeur de V_{seuil} .

En amont du pont de diodes se trouve également un boîtier qui permet d'accéder à la vitesse et direction du vent ainsi qu'au signal électrique sur une des trois phases.

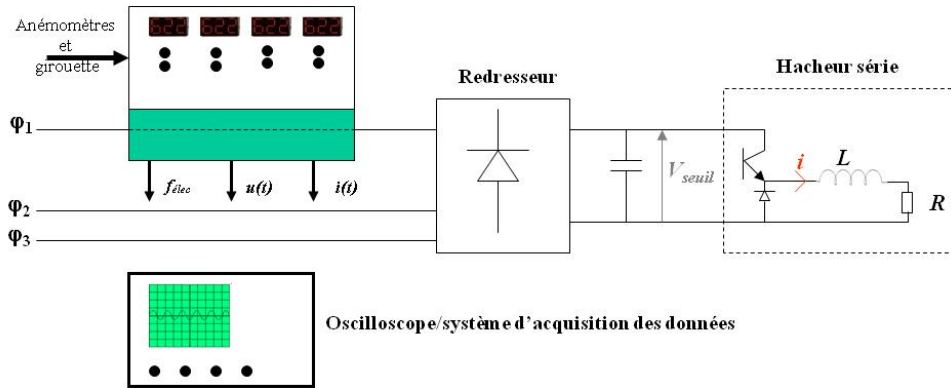


FIGURE 3.6 – Détail du système de contrôle de l'éolienne et d'acquisition.

Caractéristiques générales :

Les caractéristiques techniques de cette éolienne sont les suivantes :

- Nombre de pales : $B = 3$
- Diamètre des pales : $D = 2,7$ m
- Puissance électrique nominale : $P_n = 1$ kW
- Tension nominale : $u = 48$ V (DC) ou 68 V (AC)
- Courant nominal : $i = 21$ A (DC) ou 15 A (AC)
- Vitesse de rotation nominale : $N_n = 400$ tr.min⁻¹
- Vitesse de rotation maximale : $N_{max} = 500$ tr.min⁻¹

Instrumentation de l'éolienne

Mesures du vent :

La mesure du vent amont V1 est réalisée par un anémomètre (Modèle Alizia 178 ; Entreprise Pulsonic) monté sur un mât d'une hauteur de 10 m et situé à côté de celui de l'éolienne (Figure 1). Cet anémomètre est également équipé d'une girouette (Modèle Alizia 179 ; Entreprise Pulsonic) pour donner la direction du vent. D'autre part, deux autres anémomètres sont placés le long du mât afin de mesurer la vitesse du vent à différentes hauteurs.

Ces informations sont accessibles sur le boîtier présenté à la Figure 3.6. Les valeurs des vitesses issues des trois anémomètres sont affichées en temps réel en Km/h. De même, la direction du vent en ° est donnée par un quatrième afficheur. Sous chacun des afficheurs se trouvent des prises BNC qui permet de récupérer le signal électrique correspondant.

Mesure de la vitesse de rotation de l'éolienne :

Dans le cas de l'éolienne présente, il n'y a pas de démultiplicateur de vitesse de rotation entre le rotor de l'alternateur et celui de l'éolienne. La vitesse de rotation ω (rad.s⁻¹) de l'éolienne est donc accessible en mesurant directement celle du rotor de l'alternateur. Il suffit de mesurer la fréquence électrique f_{elec} de la tension sur une phase de l'alternateur. La relation entre ω et f est :

$$f_{elec} = 2\pi\omega n \quad (3.28)$$

avec n le nombre de paires de pôles de l'alternateur ($n = 6$ pour l'éolienne étudiée). Ici, la mesure est réalisée par un fréquencemètre monté à l'intérieur du boîtier de mesure de la Figure 17. Une prise BNC permet de récupérer cette information pour être enregistrée.

Mesure de la puissance électrique produite P_{elec} :

La puissance électrique P_{elec} produite par l'éolienne est calculée à partir du signal électrique mesuré dans le boîtier (Figure 3.6). Deux prises BNC permettent de récupérer la tension et le courant par l'intermédiaire de sondes montées à l'intérieur du boîtier. Le produit de ces deux grandeurs donne alors la puissance électrique instantanée sur une phase. En supposant que les trois phases sont équilibrées, on peut alors obtenir la puissance électrique totale produite par la génératrice.

Mesure du couple et de la puissance mécanique P_u :

Pour déterminer la puissance mécanique disponible sur l'arbre de rotation, il est nécessaire de connaître le couple C . La solution technique aurait été d'utiliser un couple mètre semblable à ceux montés sur les pompes centrifuges. Malheureusement, cette solution n'est pas envisageable pour des raisons d'alimentation électrique du capteur.

Par conséquent, une mesure indirecte de la puissance mécanique est nécessaire. En prenant un rendement moyen pour la génératrice de 90% et connaissant la puissance électrique P_{elec} , il est alors possible d'estimer la puissance mécanique.

Acquisitions des mesures

L'acquisition et enregistrements des données correspondant à la vitesse du vent V_1 , de la fréquence électrique f_{elec} , de la tension et du courant électrique est réalisée à l'aide d'un oscilloscope digital 4 voies (Tektronix ; . . .) interfacé sous Windows (Figure 3.6). Le produit de la tension et du courant est calculé directement avec l'oscilloscope (menu Math). Un logiciel permet ensuite d'acquérir et d'enregistrer simultanément toutes les données nécessaires (fichier .csv récupérable par prise USB située derrière l'oscilloscope).

3.3.2 Eolienne intérieure

La Figure 18 représente schématiquement les différents éléments constituant l'installation de l'éolienne intérieure. L'éolienne acquise par l'ENSEM est une éolienne à axe horizontal composée de trois pales de profil NACA 4412. Le diamètre de la surface balayée est égal à $D=1,20$ m. De plus, par rapport à l'éolienne extérieure, il est possible de modifier l'angle de calage des pales (deux positions possibles).

L'axe de rotation de l'éolienne est couplé à une génératrice de courant (alternateur). Cette

dernière est reliée à une charge résistive variable permettant de contrôler la vitesse de rotation de l'éolienne pour une vitesse de vent donnée.

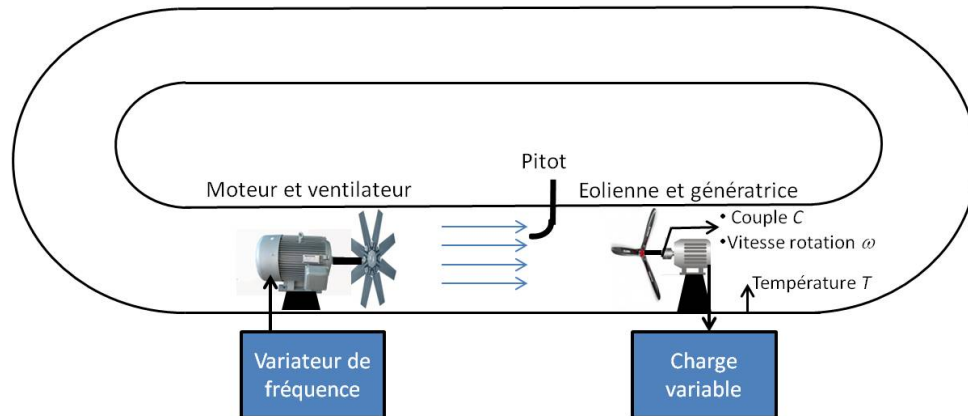


FIGURE 3.7 – Installation de l'éolienne intérieure - soufflerie.

Cette éolienne est installée dans une soufflerie à recirculation où le vent est généré par un ventilateur couplé à un moteur triphasé. La vitesse de rotation du ventilateur est modulable via un variateur électrique, ce qui permet de réguler la vitesse du vent V_1 imposé à l'éolienne.

Caractéristique de la soufflerie :

- Circuit aéraulique fermé de conduite cylindrique.
- Vent généré par un ventilateur lui-même alimenté par un moteur asynchrone triphasé de 7 kW.
- Vitesse de rotation du ventilateur contrôlable par un variateur de fréquence ; vitesse du vent ajustable jusque $V_{1max} \approx 12$ m/s.
- Trappe d'accès transparente au niveau de la position de l'éolienne pour changer l'angle de calage et contrôle visuel de l'éolienne.

Caractéristique de l'éolienne :

- Tripale
- Rayon d'une pale : 0,6 m
- Génératrice synchrone branchée sur une charge variable
- Puissance électrique nominale : 300 W
- 2 angles de calage des pales possible (intervention manuelle de l'opérateur)

Instrumentation :

Mesures du vent :

La mesure du vent généré par le ventilateur est réalisée grâce à un tube de Pitot. La différence de pression est mesurée via un capteur de pression différentiel électronique qui renvoie une tension électrique E_{vent} telle que :

$$\Delta P(mBar) = 0.4E_{vent}(V) - 1.4$$

Mesure de la vitesse de rotation de l'éolienne :

Dans le cas de notre éolienne, il n'y a pas de démultiplicateur de vitesse de rotation entre le rotor de l'alternateur et celui de l'éolienne. La vitesse de rotation N (tr/mn) de l'éolienne est donc accessible en mesurant directement celle du rotor de l'alternateur. Cette vitesse de rotation est mesurée par un tachymètre dont le signal est conditionné de telle façon à renvoyer une tension électrique E_ω :

$$N = 100 \cdot E_\omega(V)$$

Mesure du couple :

Un couplemètre est directement intégré sur l'arbre de rotation de l'éolienne afin d'obtenir le couple C généré par l'éolienne. Le signal est conditionné de façon à obtenir une tension électrique E_c telle que :

$$C(N \cdot m) = \cdot E_c(V)$$

Acquisitions des mesures

L'enregistrement de ces données est assuré par un PC et logiciel d'acquisition.

3.4 Objectifs de l'étude des éoliennes

Pour les deux installations, le travail à réaliser est le même et est principalement divisé en deux parties.

- Courbe caractéristique de l'éolienne

Il s'agit de tracer l'évolution du coefficient de puissance C_p en fonction de la vitesse spécifique λ . Pour l'éolienne extérieure, afin de faire varier la vitesse spécifique dans une large gamme, on fera plusieurs enregistrements pour plusieurs valeurs de V_{seuil} . Pour l'éolienne intérieure, il existe deux approches pour faire varier la vitesse spécifique : (1) fixer une valeur du vent V_1 puis faire varier la charge ou (2) fixer une charge et faire varier la vitesse du vent.

Remarque : par définition du coefficient de puissance C_p , il est nécessaire de calculer la puissance captée par les pales P (cf : tableau 3.1). Or en négligeant les frottements de l'air sur les pales (fluide parfait), il est possible d'approximer :

$$P \approx P_u = C \cdot \omega \tag{3.29}$$

- Confrontation avec la modélisation

En utilisant la théorie de l'élément de pale, retrouver la valeur du coefficient de puissance et la comparer avec la valeur expérimentale. Pour cela on utilisera les lois de cordes et de vrillage suivant pour les pales des deux éoliennes (Tableau 2) :

Rayon (cm)	corde (cm)	angle vrillage (°)	Rayon (mm)	corde (mm)	angle vrillage (°)
60	6,96	0,0	270	197,8	14,44
57	7,29	0,8	299,97	194,8	13,54
54	7,66	1,7	348,3	191,34	12,93
51	8,06	2,7	391,5	188,09	11,8
48	8,50	3,8	429,3	184,43	11,29
45	9,00	5,1	476,29	180,18	10,75
42	9,54	6,5	511,65	175,96	9,59
39	10,15	8,0	560,25	172,89	9,2
36	10,84	9,8	595,35	169,88	8,85
33	11,60	11,9	661,5	166,89	8,47
30	12,47	14,2	688,5	163,7	7,77
27	13,45	16,9	715,5	160,8	7,36
24	14,55	20,1	756	157,97	6,9
21	15,79	23,8	823,5	154,41	6,26
18	17,16	28,2	864	151,32	6,24
15	18,65	33,4	918	147,72	5,87
12	20,21	39,6	958,5	144,18	5,52
9	21,74	46,7	1012,5	140,61	5,23
6	23,07	54,9	1053	137,05	4,85
			1107	133,99	4,43
			1147,5	131,07	4,17

3.5 Références bibliographiques

- [3] D. Le Gourières. Les éoliennes : Théorie, conception et calcul pratique. Editions du Moulin Cadiou, 2008.
- [4] Martin O.L. Hansen Aerodynamics of Wind Turbines - Second Edition. Earthscan Edition, 2008.
- [5] Z.L. Mahri, M.S. Rouabah et S. Zid. Calcul des efforts aérodynamiques agissant sur les pales d'une petite éolienne. Revue des Energies Renouvelables. Juin 2007. Vol. 10 N°2 (2007) 241 - 256 .

Chapitre 4

Propositions de conduite du projet

Dans cette section vous sont proposées quelques idées de projets qu'il est possible d'entreprendre. D'autres solutions sont envisageables et sont même les bienvenues mais elles doivent être discutées et validées par l'enseignant. Enfin, à la différence des autres thèmes, il est bien entendu impossible de modifier les machines.

4.1 Etude des turbomachines

Une première idée consisterait à ne considérer que les turbomachines et de travailler sur une des trois solutions ci-dessous :

- Pompes multicellulaires : Ici, on étudie d'abord les pompes séparément pour ensuite les associer en série ou en parallèles. Les plages de fonctionnements (Vitesse de rotation/débit) des deux pompes à utiliser sont à déduire des mesures des pompes seules.
- Génératrices :
Ici on peut étudier et comparer deux types de génératrices : pompes et ventilateur.
- Turbines : Dans cette variante, on peut s'attacher à n'étudier que les turbines : Pelton, Kaplan et Francis selon la disponibilité
- Pompe & turbine(s) :
Enfin, on peut aussi étudier le cas d'une turbine et d'une pompe.
- Etc...

4.2 Etude des génératrices

L'idée principale ici est d'étudier et comparer des génératrices de natures différentes : turbine(s) et éoliennes.

4.3 Etc,...

Quatrième partie

Aérodynamique incompressible

Ce chapitre rassemble les principaux résultats théoriques et expérimentaux constituant un point de départ pour réaliser un projet sur le thème de l'aérodynamique. Les éléments théoriques sont développés dans la première partie du cours de mécanique des fluides de S7.

Chapitre 1

Rappels théoriques

Un des buts de l'aérodynamique est d'étudier la variation des coefficients aérodynamiques en fonction de l'écoulement, des propriétés de l'objet et de la position relative de l'écoulement et de l'objet.

1.1 Efforts aérodynamiques sur un objet

1.1.1 Coefficients aérodynamiques globaux

Lorsqu'un fluide s'écoule autour d'un objet, les efforts exercés par le fluide sur l'objet sont décrits à l'aide d'une résultante $\vec{F}$ et d'un moment résultant $\vec{M}_O$ calculé en un point O , qui est en général le centre de gravité de l'objet.

La résultante est classiquement projetée sur le repère orthonormé lié à la vitesse incidente et appelé repère aérodynamique (se reporter à la figure 1.1 pour les signes) :

- la composante parallèle à l'écoulement incident est appelée traînée T (ou *drag* D) ;
- la composante perpendiculaire à l'écoulement incident et située dans le plan vertical contenant la vitesse incidente, est appelée portance P ou sustentation (ou *lift* L) ;
- la troisième composante est appelée force de dérive H .

Le moment peut être projeté sur le repère aérodynamique ou plus fréquemment sur un repère lié à l'objet. On obtient :

- le moment de roulis M_r autour de D ;
- le moment de tangage M_m autour de H (le seul moment pertinent pour des problèmes 2D) ;
- le moment de lacet M_n autour de L .

Les deux repères sont définis l'un par rapport à l'autre à l'aide de deux angles : l'incidence i et le dérapage α .

En pratique, on préfère utiliser des coefficients adimensionnels. On note l une longueur de référence et S une surface de référence caractérisant l'objet. Celle-ci correspond parfois au maître couple, qui par définition est la surface issue de la projection orthogonale de l'objet sur un plan normal à la vitesse incidente et est donc la plus grande section de l'objet vue par l'écoulement.

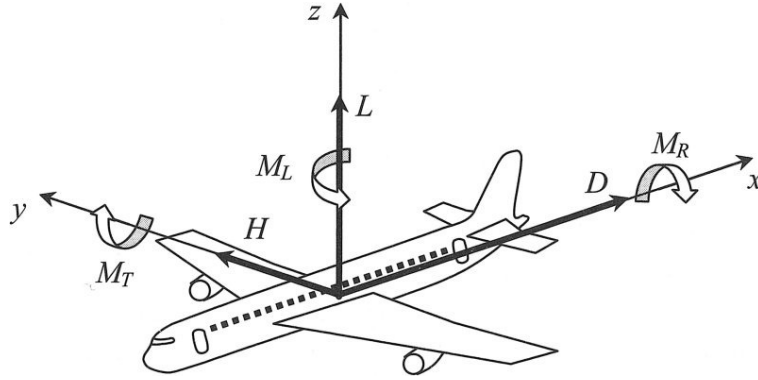


FIGURE 1.1 – Composantes de la résultante et du moment résultant dans le repère aérodynamique ou le repère lié à l'objet.

La masse volumique du fluide loin de l'objet est notée ρ_∞ et sa vitesse v_∞ . On obtient :

$$C_D = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho_\infty v_\infty^2 S} \quad \text{coefficient de traînée (drag)}$$

$$C_L = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho_\infty v_\infty^2 S} \quad \text{coefficient de portance (lift)}$$

$$C_H = \frac{H}{\frac{1}{2}\rho_\infty v_\infty^2 S} \quad \text{coefficient de dérive}$$

$$C_R = \frac{M_r}{\frac{1}{2}\rho_\infty v_\infty^2 S l} \quad \text{coefficient de roulis}$$

$$C_M = \frac{M_m}{\frac{1}{2}\rho_\infty v_\infty^2 S l} \quad \text{coefficient de tangage}$$

$$C_N = \frac{M_n}{\frac{1}{2}\rho_\infty v_\infty^2 S l} \quad \text{coefficient de lacet}$$

1.1.2 Coefficients aérodynamiques locaux

La résultante $\vec{F}$ et le moment résultant $\vec{M}_O$ sont obtenus par intégration des efforts locaux exercés par le fluide sur chaque élément de surface de l'objet. On peut distinguer deux contributions : celle due à la pression, qui est normale à la surface, et celle due aux frottements visqueux, qui est essentiellement tangente à la surface. On définit :

$$K_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} \quad \text{coefficient de pression}$$

$$K_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} \quad \text{coefficient de frottement}$$

où τ est la contrainte de cisaillement.

1.2 Facteurs influençant les propriétés aérodynamiques

1.2.1 Nombres adimensionnels

Le fluide est caractérisé par son état loin de l'objet, en particulier sa masse volumique ρ_∞ , sa viscosité μ_∞ , sa capacité calorifique à pression constante $C_{p\infty}$ et sa conductivité thermique k_∞ . Sa vitesse (uniforme) est v_∞ et le son s'y propage à la vitesse c_∞ .

L'objet est quant à lui caractérisé par des paramètres géométriques décrivant sa forme, par l'état de sa surface (rugosité) et éventuellement par d'autres paramètres en fonction du problème.

Enfin, la position relative de l'écoulement et de l'objet est mesurée par les angles i et α .

A partir de ces paramètres, on peut former plusieurs nombres adimensionnels :

$$\text{le nombre de Reynolds } Re = \frac{\rho_\infty v_\infty l}{\mu_\infty},$$

$$\text{le nombre de Mach } Ma = \frac{v_\infty}{c_\infty} \quad (\text{compressibilité}),$$

$$\text{le nombre de Froude } Fr = \frac{v_\infty}{\sqrt{lg}} \quad (\text{ondes de surface}),$$

$$\text{et le nombre de Prandtl } Pr = \frac{\mu_\infty C_{p\infty}}{k_\infty} \quad (\text{chaleur}).$$

Pour les écoulements à faible vitesse qui sont l'objet de ce chapitre, seuls vont intervenir les nombres Re et Fr .

1.2.2 Décollement de la couche limite

Près de l'objet, les gradients de vitesse deviennent importants. Cela conduit à la formation d'une couche d'épaisseur δ dans laquelle la viscosité joue un rôle prépondérant. Une couche limite autour d'une aile d'avion est schématisée dans la figure 1.2 (à gauche). En général, δ est très petit par rapport à la taille de l'objet.

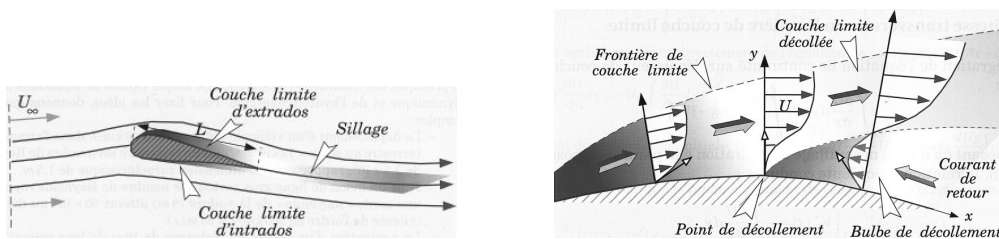


FIGURE 1.2 – Couche limite apparaissant au contact de l'objet (à gauche) et décollement de la couche limite (à droite).

Si le gradient de pression à l'extérieur de la couche limite est défavorable, celle-ci peut se décoller comme cela est représenté dans la figure 1.2 (à droite). Ce phénomène a des conséquences importantes sur les propriétés aérodynamiques de l'objet.

1.2.3 Traînée de pression

La traînée de pression (résistance de pression) est la partie de la traînée due à la pression. Le coefficient correspondant est noté C_{Dn} . On peut distinguer grossièrement plusieurs types de traînée de pression : la traînée de forme, la traînée induite et les traînées d'onde.

La traînée de forme est importante pour les objets non profilés et ceux pour lesquels on a la présence d'un sillage. Elle est fortement influencée par le décollement éventuel de la couche limite.

La traînée induite est due à la portance. Elle apparaît par exemple dans le cas d'ailes d'envergure finie.

Il existe deux traînées d'onde qui apparaissent dans deux cas très différents : celle due aux ondes en écoulement compressible et celle due aux ondes de surface.

1.2.4 Traînée de frottement

La traînée de frottement (résistance de frottement) est la partie de la traînée causée par les frottements visqueux et est prépondérante pour les objets profilés. Elle dépend en particulier de la surface de l'objet, de sa rugosité et de la turbulence de l'écoulement. Le coefficient correspondant est noté C_{Df} .

1.2.5 Portance

La portance est en général due à la dissymétrie de l'objet par rapport à l'écoulement (par exemple dans le cas d'une aile d'avion) mais elle peut aussi apparaître lorsque l'objet présente une rotation (effet Magnus). Tout comme la traînée de pression, elle dépend fortement du décollement de la couche limite (phénomène de décrochage pour les avions).

Chapitre 2

Résultats sur les corps simples

2.1 Plaque plane de faible épaisseur

2.1.1 Incidence nulle

Le cas de la plaque plane bidimensionnelle, de faible épaisseur et placée à incidence nulle vis-à-vis de l'écoulement incident, est intéressant pour étudier la traînée de frottement. En effet, dans cette configuration, la traînée de pression est nulle. Le paramètre géométrique qui intervient est la longueur de la plaque l . On utilise aussi la distance x d'un point de la plaque par rapport au bord d'attaque, noté O .

On observe expérimentalement l'apparition d'une couche limite qui se développe depuis le bord d'attaque comme représenté dans la figure 2.1. Son épaisseur dépend de la position x et est notée $\delta(x)$. Dans le cas où la couche limite est laminaire, Prandtl et Blasius ont montré que, pour une position x donnée le long de la plaque :

$$\frac{v}{v_\infty} = f' \left(\frac{y}{\delta(x)} \right), \quad \frac{\delta(x)}{x} = \frac{4.92}{\sqrt{Re(x)}},$$
$$K_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re(x)}} \quad \text{et} \quad C_{Df} = \frac{1.328}{\sqrt{Re}}$$

où $Re(x) = \rho_\infty v_\infty x / \mu_\infty$ et la fonction f' est solution de l'équation de Blasius. On constate que l'épaisseur de la couche limite varie comme $\sqrt{x}$. La courbe correspondant est tracée dans la figure 2.2.

Si on suppose maintenant que la couche limite est turbulente, on peut utiliser les formules semi-empiriques de von Karman et Prandtl :

$$\frac{v}{v_\infty} = \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^{1/7}, \quad \frac{\delta(x)}{x} = \frac{0.37}{Re(x)^{0.2}},$$
$$K_f = \frac{0.059}{Re(x)^{0.2}} \quad \text{et} \quad C_{Df} = \frac{0.074}{Re^{0.2}}$$

Le profil de vitesse est plus "aplati" que dans le cas de la couche limite laminaire. L'épaisseur de la couche limite varie plus vite et le coefficient de traînée décroît plus lentement vis-à-vis de

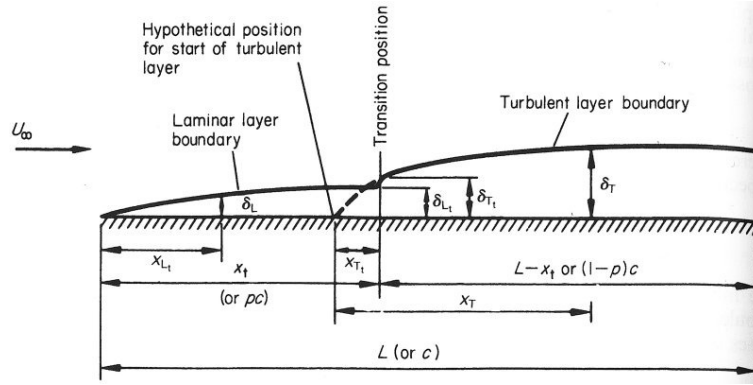


FIGURE 2.1 – Représentation schématique des différents zones de la couche limite sur une plaque plane en incidence nulle.

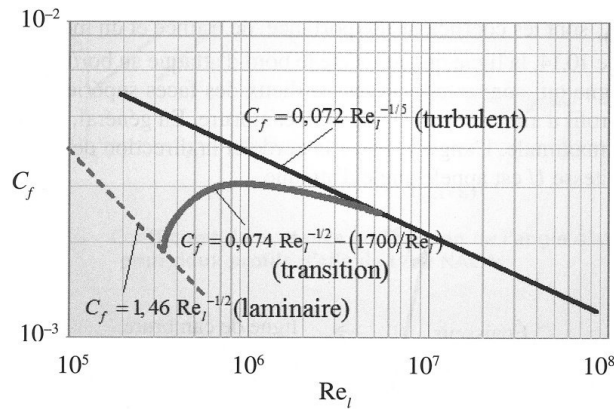


FIGURE 2.2 – Evolution du coefficient de frottement d'une plaque en incidence nulle en fonction du nombre de Reynolds.

la longueur de la plaque.

En pratique, il peut exister deux zones le long de la plaque. En effet, lorsque $Re(x)$ atteint des valeurs de l'ordre de 3×10^5 , la couche limite laminaire devient instable. On a alors une zone s'étendant du bord d'attaque au point de transition dans laquelle la couche limite est laminaire et une zone au-delà du point de transition dans laquelle la couche limite est turbulente. En fait, le point de transition correspond plutôt à une zone d'extension non nulle (zone de transition). Il est influencé par l'état de surface de la plaque et la turbulence de l'écoulement amont.

Expérimentalement, on peut déterminer l'état de la couche limite et la zone de transition en mesurant les profils de vitesse pour différentes positions x le long de la plaque. Comme indiqué ci-dessus, les profils correspondant à une couche limite turbulente sont plus "aplatis" que dans le cas laminaire.

Lorsque la plaque est suffisamment longue et que la couche limite transite d'un état laminaire à un état turbulent, le coefficient de traînée doit tenir compte des deux zones. Des courbes typiques sont données dans la figure 2.2.

2.1.2 Incidence non nulle

Lorsqu'on augmente l'incidence de la plaque par rapport à l'écoulement amont, la traînée de pression devient prépondérante par rapport à la traînée de frottement. Cela est dû à la présence d'un sillage de plus en plus important signalant une chute de pression en aval de l'obstacle. Des résultats expérimentaux pour plusieurs formes de plaques sont donnés dans la figure 2.3.

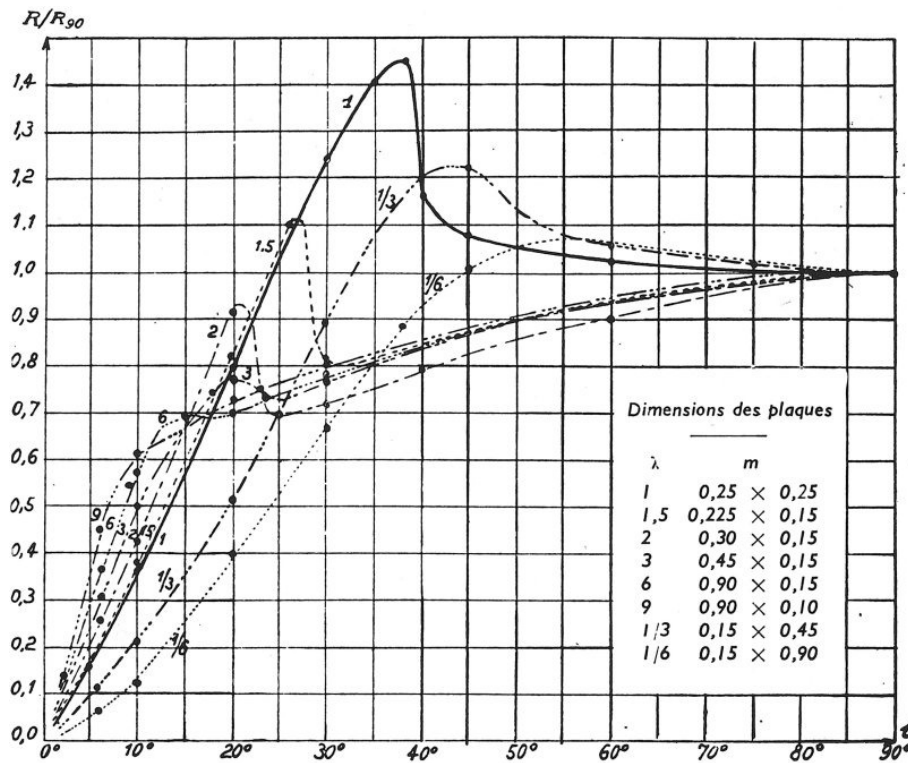


FIGURE 2.3 – Courbes représentant le coefficient de traînée d'une plaque en incidence quelconque par rapport à une plaque en incidence normale en fonction de l'incidence.

2.2 Cylindre

2.2.1 Géométrie

Le cylindre est décrit à l'aide de deux paramètres : son diamètre D ($l = D$) (ou son rayon R), et sa hauteur h . On en déduit son allongement $\lambda = h/l$. L'allongement infini correspond au cas bidimensionnel (disque). La surface de référence est $S = Dh$. On va d'abord considérer le cas bidimensionnel, l'effet de la variation de l'allongement sera traité à la fin de la section.

2.2.2 Théorie

La théorie des fluides parfaits permet de connaître le champ de vitesse autour d'un disque de rayon R . Pour un écoulement incident $v_\infty \vec{e}_x$, le potentiel complexe des vitesses est

$$f(z) = v_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z$$

La vitesse v_{R0} au point de coordonnées $(x = R, y = 0)$ est reliée à la constante Γ par $v_{R0} = \Gamma/(2\pi R)$. Le cas $\Gamma = 0$ correspond à un cylindre ne présentant pas de mouvement de rotation propre. Le champ de vitesse est représenté dans la figure 2.4.

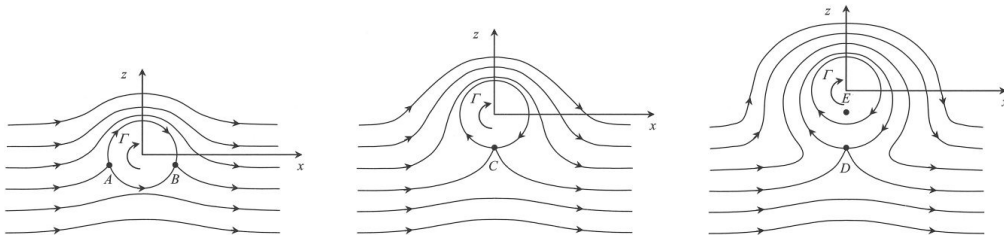


FIGURE 2.4 – Lignes de courant autour du cylindre. Selon la valeur de Γ , trois cas de figures peuvent se présenter.

La répartition de pression à la paroi vaut

$$K_p = 1 - 4 \left(\sin \theta - \frac{\Gamma}{4\pi R v_\infty} \right)^2$$

Elle est représentée dans la figure 2.7. Si $\Gamma = 0$, le coefficient s'annule pour $\theta = 30^\circ$ et $\theta = 150^\circ$. On déduit à l'aide de la formule de Blasius, la force exercée par le fluide sur l'objet :

$$\vec{F} = i\rho v_\infty \Gamma$$

qui montre que seule la portance est non nulle si $\Gamma \neq 0$ (effet Magnus). On a donc $C_D = 0$ et $C_L = 2\pi v_{R0}/v_\infty$.

2.2.3 Expériences

Dans les cas réels, on doit tenir compte de la viscosité qui est à l'origine d'une couche limite près de la paroi et d'un sillage en aval du cylindre. Les résultats ci-après concernent le cas où $\Gamma = 0$. Le champ de vitesse dans le cas bidimensionnel présente différentes phases qui sont schématisées dans les figures 2.5 et 2.6. On observe deux régimes séparés par un nombre de Reynolds critique Re_c ($2 \times 10^5 < Re_c < 5 \times 10^5$) :

- Pour $Re < Re_c$, on a d'abord pour les faibles Re ($Re < 20$) un écoulement proche d'un écoulement de fluide parfait avec, au fur et à mesure que Re augmente, décollement progressif des couches limites de part et d'autre du cylindre et formation d'un sillage en aval. Le sillage est d'abord symétrique ($20 < Re < 50$) et est formé de deux tourbillons

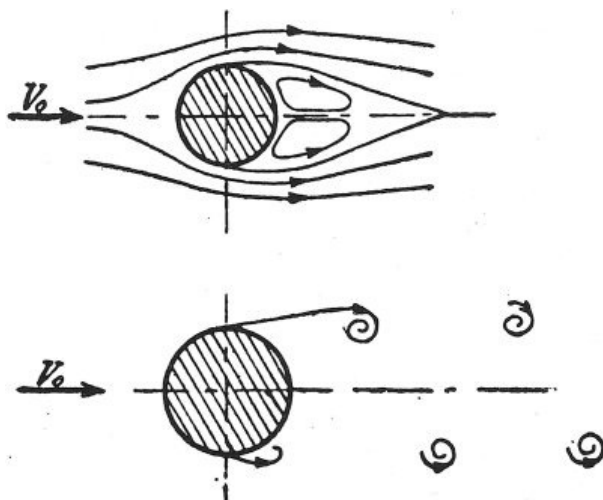


FIGURE 2.5 – Représentation schématique des différents types d'écoulement autour du cylindre pour les faibles nombres de Reynolds : $0 < Re < 50$ et $50 < Re < 2500$.

contrarotatifs puis des tourbillons se détachent alternativement de part et d'autre du plan de symétrie pour former une allée de Bénard-von Karman ($50 < Re < 2500$). Au delà de $Re = 2500$, on ne distingue plus l'allée de tourbillons ; le point de décollement de la couche limite se situe environ à 80° du point d'arrêt amont.

- Pour $Re > Re_c$, le sillage diminue brutalement, le point de décollement de la couche limite se situant maintenant à environ 120° du point d'arrêt amont, avant d'augmenter à nouveau progressivement. Le point critique correspond au recollement de la couche limite causée par une transition laminaire/turbulent au niveau du point de décollement de la couche limite laminaire. La turbulence de la couche limite atténue en effet sa tendance au décollement ; le point de décollement est alors repoussé en aval du cylindre d'où une diminution brusque de la taille du sillage. Par la suite, pour des Re plus élevés, celle-ci augmente à nouveau petit à petit en même temps que le point de décollement remonte le long de la surface du cylindre.

2.2.4 Répartition de pression

Des courbes expérimentales de la répartition de pression, pour un cylindre d'allongement infini et sans mouvement de rotation propre, sont représentées dans la figure 2.7. En comparant avec la courbe théorique, on constate qu'il y a une chute de pression au niveau du sillage qui apparaît en aval du cylindre.

2.2.5 Traînée

De façon analogue au champ de vitesse, les résultats expérimentaux pour un cylindre d'allongement infini et sans mouvement de rotation propre montrent que la traînée dépend fortement du nombre de Reynolds de l'écoulement. Les résultats expérimentaux sont donnés dans la figure 2.8. On peut distinguer trois zones sur la courbe représentant l'évolution du coefficient de traînée en

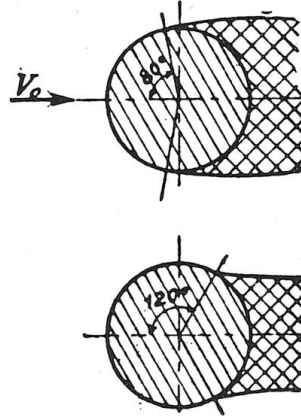


FIGURE 2.6 – Transition laminaire turbulent qui provoque un recollement de la couche limite autour du cylindre. La position du point de décollement passe de $\theta' = 80^\circ$ à $\theta' = 120^\circ$, où θ' est la position angulaire mesurée à partir du point d'arrêt amont.

fonction du nombre de Reynolds :

- $0 < Re < 50$: l'écoulement dans la couche limite est laminaire, le sillage est peu important. La variation de C_D est due principalement à la traînée de frottement.
- $50 < Re < 4 \times 10^5$: la couche limite est décollée provoquant un sillage important. Le coefficient de traînée de pression augmente fortement et compense la baisse du coefficient de traînée de frottement qui était observée dans le cas $Re < 50$ de sorte qu'au total le coefficient C_D est à peu près constant dans cette plage de Re .
- $Re > 4 \times 10^5$: la couche limite devient turbulente et retarde le décollement. Le sillage diminue brusquement ainsi que la traînée de pression pour $Re_c = 4 \times 10^5$ avant d'augmenter à nouveau progressivement.

2.2.6 Effet de l'allongement

Lorsque l'allongement a une valeur finie, la différence de pression entre l'amont et l'aval du cylindre induit des courants qui contournent ses extrémités. Ceux-ci ont pour effet de diminuer globalement la traînée de pression. Une courbe expérimentale représentant l'évolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds pour un cylindre d'allongement fini est donnée dans la figure 2.9.

2.2.7 Effet Magnus

Lorsque le cylindre possède un mouvement de rotation propre, la viscosité provoque l'apparition d'une circulation Γ autour du cylindre. La principale conséquence de cet effet est l'apparition d'une portance.

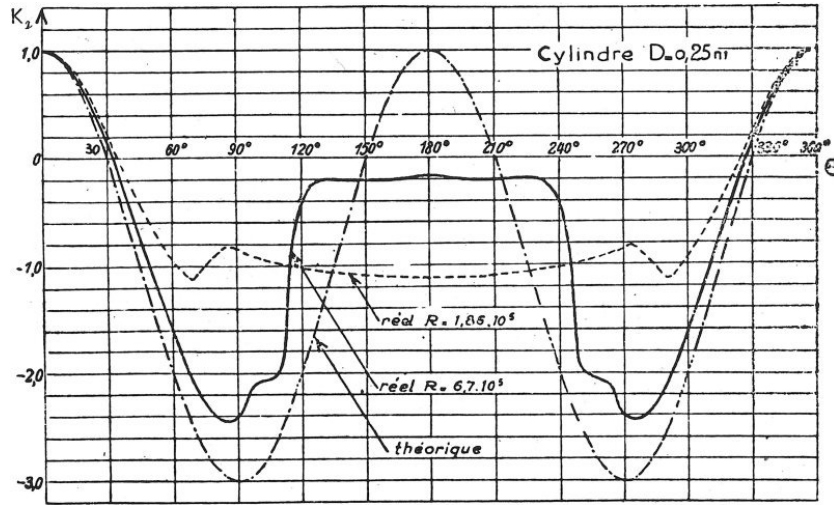


FIGURE 2.7 – Courbes représentant le coefficient de pression local K_p en fonction de la position angulaire θ' le long de la surface du cylindre, mesurée à partir du point d'arrêt amont. Les différentes courbes correspondent à plusieurs valeurs du nombre de Reynolds.

2.3 Sphère

2.3.1 Géométrie

La longueur de référence est $l = 2R$ où R est le rayon de la sphère. La surface de référence est $S = \pi R^2$. On suppose que la sphère n'a pas de mouvement de rotation propre.

2.3.2 Théorie

Le potentiel des vitesses est

$$\varphi = -v_\infty \cos \theta \left(\frac{a^3}{2r^2} + r \right)$$

On en déduit la répartition de pression sur la surface de la sphère :

$$K_p = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta$$

Le coefficient s'annule pour $\theta = 41.7^\circ$ et $\theta = 138.3^\circ$. Il est représenté dans la figure 2.11.

Les coefficients de traînée et de portance sont tous les deux nuls (paradoxe de d'Alembert).

2.3.3 Expériences

Tout comme dans le cas du cylindre, on observe deux régimes représentés schématiquement sur la figure 2.10 :

- pour $Re < Re_c$, la couche limite est laminaire avant de décoller.
- pour $Re > Re_c$, la couche limite est turbulente avant de décoller.

Le nombre de Reynolds critique vaut environ $Re_c = 3 \times 10^5$. La position du point de décollement par rapport au point d'arrêt amont passe de $\theta' = 80^\circ$ à $\theta' = 110^\circ - 140^\circ$ lors de la transition.

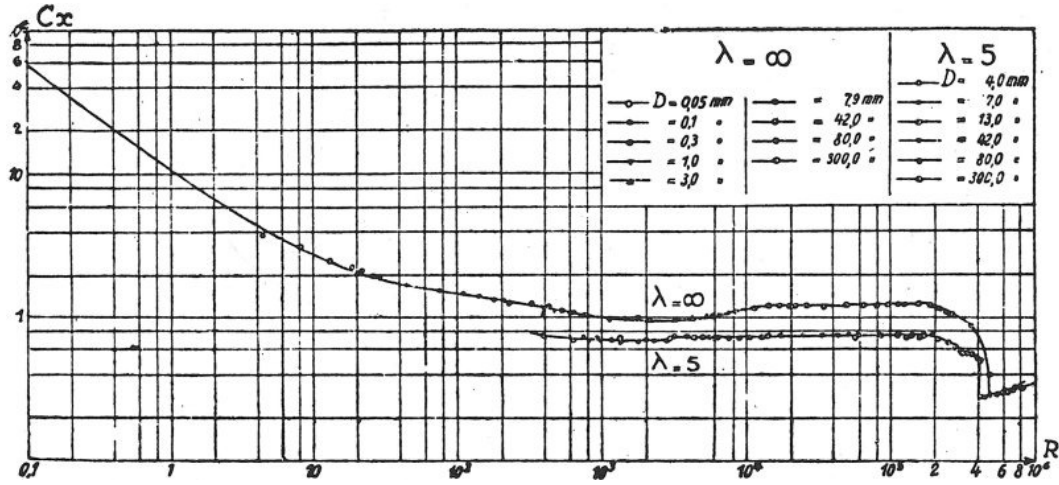


FIGURE 2.8 – Courbes représentant le coefficient de traînée C_D en fonction du nombre de Reynolds Re pour deux valeurs de l'allongement λ . On peut noter la chute brutale de C_D pour $Re_c = 4 \times 10^5$ due à une transition laminaire/turbulent.

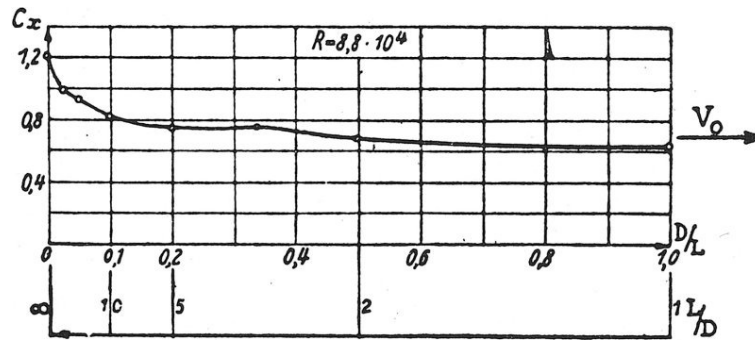


FIGURE 2.9 – Courbes représentant le coefficient de traînée C_D en fonction de l'allongement λ pour un nombre de Reynolds $Re = 8.8 \times 10^4$.

2.3.4 Répartition de pression

La répartition de la pression de long de la surface de la sphère est représentée figure 2.11. Tout comme pour le cylindre, la principale différence avec la courbe théorique est la chute de pression en aval de la sphère causée par le sillage.

2.3.5 Traînée

L'évolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds est donnée dans la figure 2.12. La forme de la courbe est très proche de celle obtenue pour le cylindre.

2.4 Profil d'aile

On considère dans cette section des profils d'aile bidimensionnels. Le cas des ailes d'envergure finie est détaillé dans la section 2.5

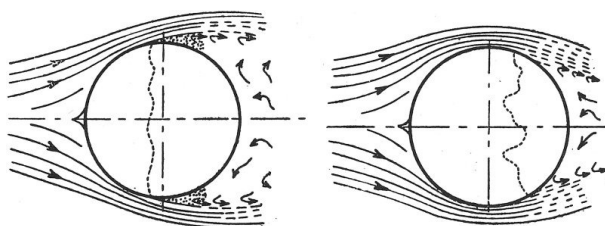


FIGURE 2.10 – Schéma représentant l'écoulement autour de la sphère pour $Re < Re_c$ et $Re > Re_c$. Lors de la transition, le recollement de la couche limite provoque un déplacement du point de décollement vers l'aval de la sphère.

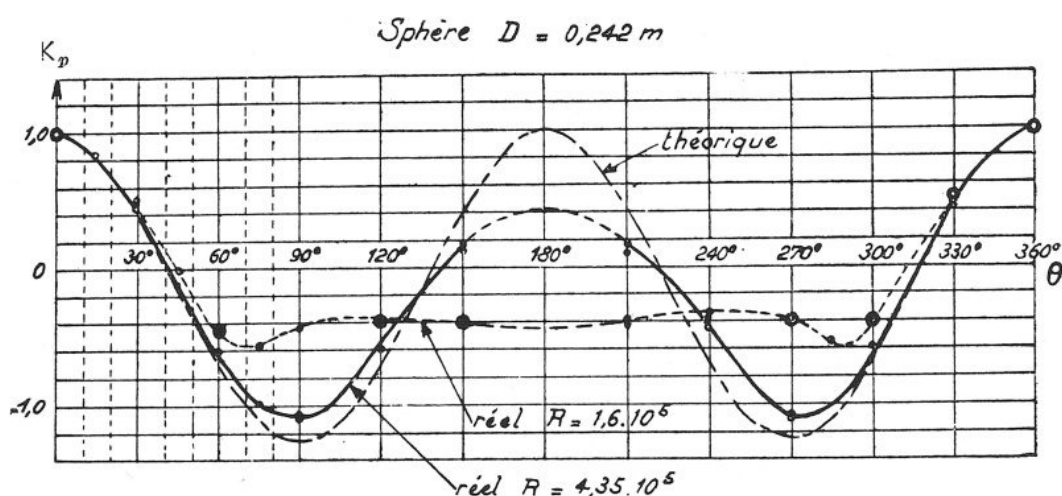


FIGURE 2.11 – Courbes représentant le coefficient de pression local K_p en fonction de la position angulaire θ' le long de la surface de la sphère, mesurée à partir du point d'arrêt amont. Les différentes courbes correspondent à plusieurs valeurs du nombre de Reynolds.

2.4.1 Géométrie

Les principaux paramètres définissant un profil sont schématisés sur la figure 2.13. Un profil possède une pointe appelée bord de fuite B . Le bord d'attaque A est le point le plus éloigné du bord de fuite et présente en général une forte courbure. La ligne supérieure du profil AMB est appelé extrados et la ligne inférieure ANB intrados. La corde de référence est le segment, de longueur l (parfois appelée aussi profondeur), joignant le bord d'attaque au bord de fuite. Elle permet de définir l'axe des x d'un repère (A, x, z) lié au profil, l'axe (Ax) étant dirigé du bord d'attaque vers le bord de fuite et l'axe (Az) étant dirigé vers l'extrados. En notant $M(x)$ et $N(x)$ respectivement les points de l'extrados et de l'intrados d'abscisse x , on définit la ligne moyenne (ou ligne de cambrure moyenne ou squelette) : c'est la ligne joignant le bord d'attaque au bord de fuite et constituée des milieux des segments $[M(x)N(x)]$. L'épaisseur $e(x)$ est la distance séparant les points $M(x)$ et $N(x)$; l'épaisseur maximale est notée e . La flèche maximale f (ou flèche ou cambrure maximale) est la longueur du plus grand segment reliant un point de la ligne moyenne à sa projection orthogonale sur l'axe des x . La valeur de x correspondant à la flèche maximale est notée d . Le rapport f/l est appelé courbure relative (ou cambrure relative) et le

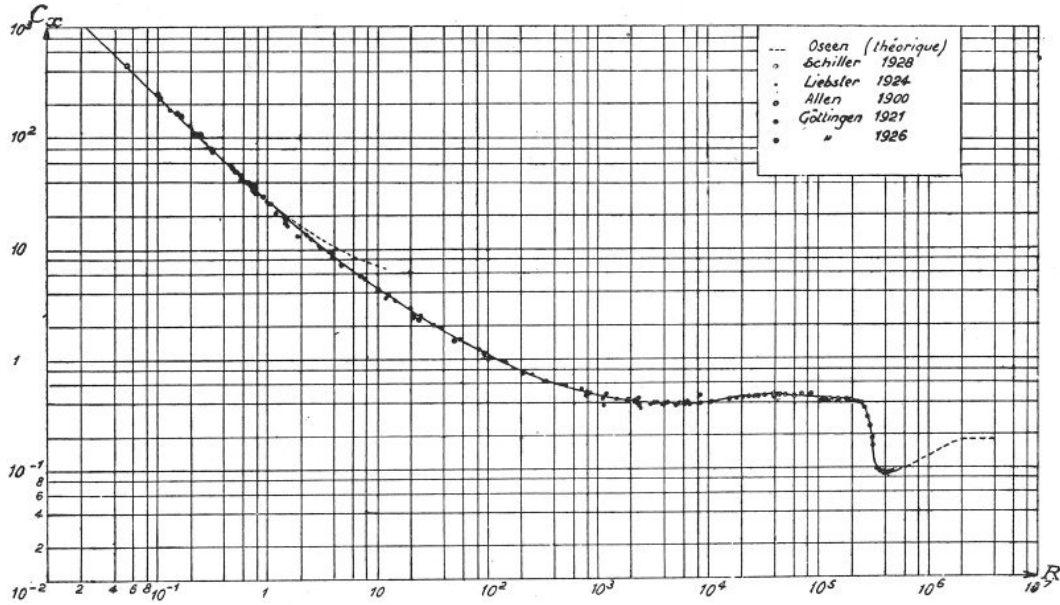


FIGURE 2.12 – Courbe représentant le coefficient de traînée C_D en fonction du nombre de Reynolds Re dans le cas de la sphère.

rapport e/l épaisseur relative.

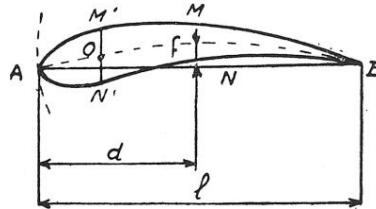


FIGURE 2.13 – Schéma d'un profil d'aile bidimensionnel.

Certains profils d'ailes ont été étudiés en détail par le NACA (National Advisory Committee for Aeronautics, qui deviendra la NASA). Chacun est repéré par un numéro appelé code NACA. Il en existe plusieurs versions qui se distinguent par le nombre de chiffres constituant le code. Le code à 4 chiffres, qui historiquement a été le premier à être utilisé, est construit à l'aide de trois nombres qui synthétisent les principaux paramètres géométriques du profil :

- f/l (1 chiffre) : flèche maximale exprimée en pourcentage de la corde ;
- d/l (1 chiffre) : position de la flèche maximale le long de la corde exprimée en $1/10$ de la longueur de la corde ;
- e/l (2 chiffres) : épaisseur maximale exprimée en pourcentage de la corde.

Par exemple, pour le profil NACA2412, on a $f/l = 0.02$, $d/l = 0.4$ et $e/l = 0.12$. Plus tard, des codes à 5 chiffres puis à 6 chiffres ont été utilisés.

Dans le cas des ailes, les phénomènes qui sont intéressants à étudier concernent la dépendance des coefficients aérodynamiques vis-à-vis de l'angle d'inclinaison i .

2.4.2 Modélisation

On peut se servir des résultats sur le cylindre. Pour cela, on utilise une application conforme $z = H(Z)$ qui fait correspondre le profil de l'aile et le disque de rayon R . La variable z représente le plan du profil et la variable Z le plan du disque. Différentes formes approchées pour l'application conforme peuvent être utilisées par exemple la transformation de Karman-Trefftz

$$\frac{z - mk}{z + mk} = \frac{(Z - k)^m}{(Z + k)^m}$$

où $1 \leq m \leq 2$ et k est complexe.

On en déduit que $C_D = 0$ et C_L est relié à la circulation de la vitesse autour du profil d'aile.

2.4.3 Répartition de pression

La répartition de pression autour d'un profil d'aile est illustrée dans la figure 2.14 pour plusieurs valeurs de l'incidence. En général, on observe une zone de dépression au niveau de l'extrados, localisée près du bord d'attaque, et une zone de surpression du côté de l'intrados. Cette différence de pression des deux côtés de l'aile est à l'origine de la portance.

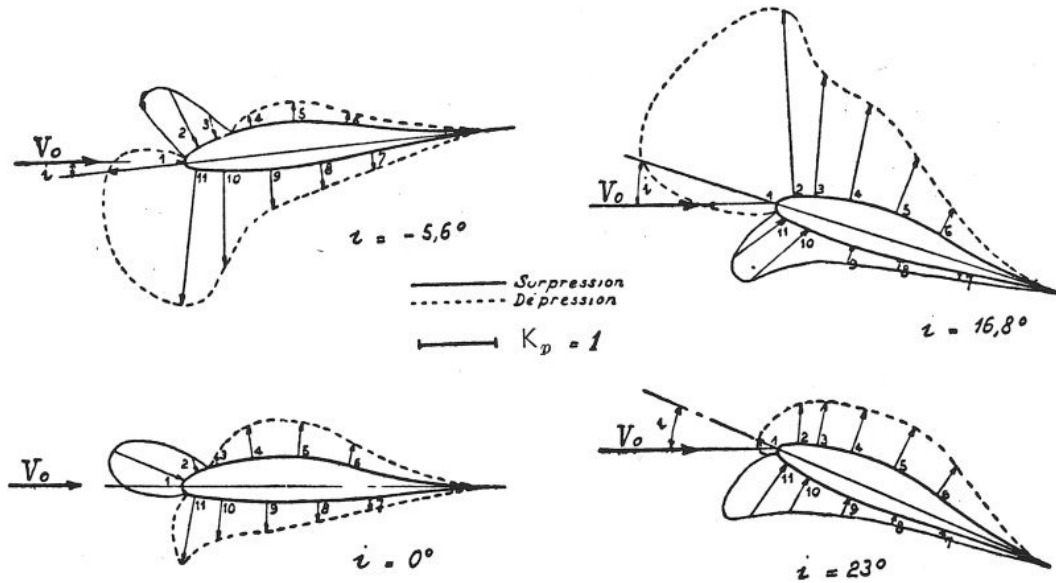


FIGURE 2.14 – Répartition de pression autour d'un profil d'aile en fonction de l'incidence i .

2.4.4 Portance

On a placé dans la figure 2.15 la variation de la portance lorsque l'incidence varie. Pour de faibles incidences, la couche limite reste collée au profil comme cela est représenté figure 2.16. Dans ce cas, le coefficient de portance croît linéairement avec l'incidence. Cependant, lorsque l'angle d'incidence devient proche de 15° , on peut assister au décollement de la couche limite ce qui provoque une chute de la portance : l'aile décroche.

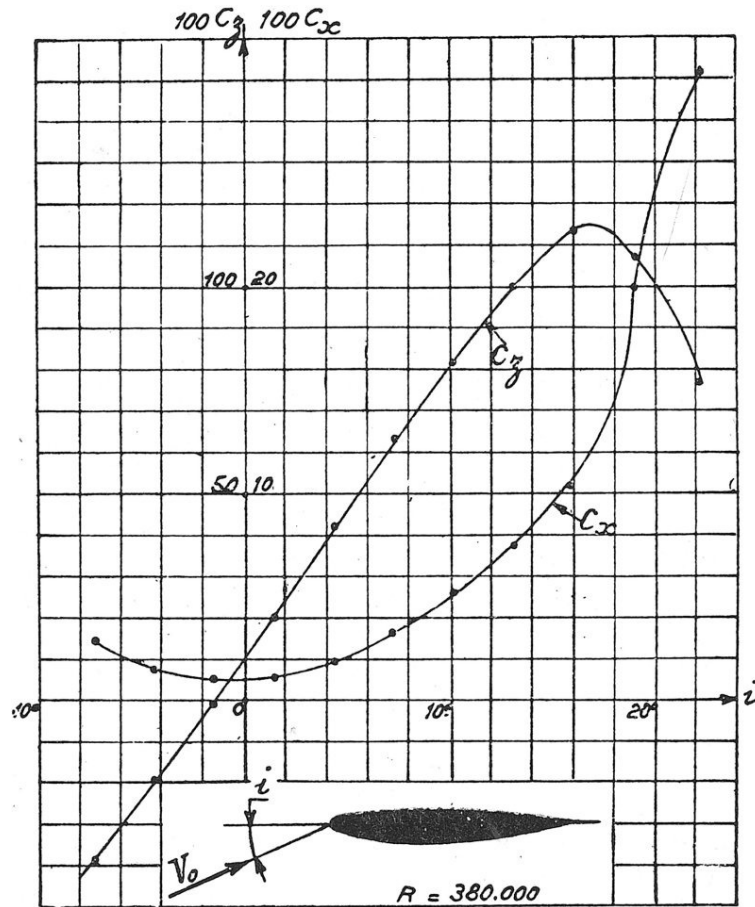


FIGURE 2.15 – Courbes représentant l'évolution des coefficients de traînée et de portance en fonction de l'incidence.

2.4.5 Traînée et polaire d'une aile

Lorsque l'incidence est faible, la traînée est peu importante car la forme du profil n'induit qu'un sillage de petite taille et le frottement est en général faible (voir figure 2.15). Par contre, elle augmente fortement lors du décrochage de l'aile.

Au lieu de tracer C_D en fonction de i , on préfère souvent représenter la courbe C_L en fonction de C_D pour plusieurs inclinaisons, appelée polaire du profil. Un exemple est donné dans la figure 2.17. La finesse est la pente de cette courbe $f = C_L/C_D$. En aérodynamique, on cherche à obtenir une finesse aussi élevée que possible.

2.5 Aile d'envergure finie

2.5.1 Géométrie

Par rapport au profil d'aile, on introduit plusieurs paramètres supplémentaires. On définit trois plans orthogonaux, schématisés dans la figure 2.18 : le plan de symétrie de l'aile (P_1), le plan (P_2) orthogonal au précédent et contenant la corde de référence du profil d'aile de (P_1) et le plan d'élévation (P_3) orthogonal aux deux précédents. L'envergure $2b$ est la distance séparant les deux

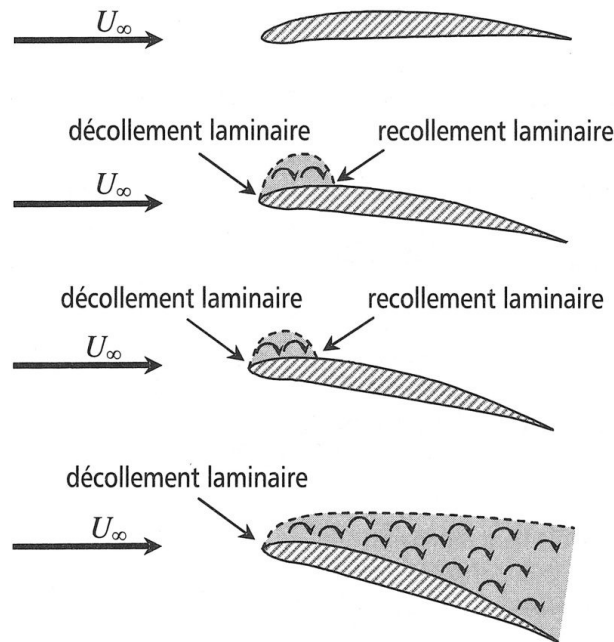


FIGURE 2.16 – Schéma représentant l'influence du décollement de la couche limite sur la portance d'une aile en fonction de l'incidence. Le dernier cas correspond au décrochage.

extrémités de l'aile. La surface de référence est la surface alaire définie comme la projection de l'aile sur (P_2) . Dans le cas où tous les profils sont identiques, on a $S = 2bl$. L'allongement est $\lambda = 4b^2/S$. On définit aussi la corde en tête l_t (c'est-à-dire la corde du profil placé à l'extrémité de l'aile), la flèche Λ , le vrillage (dans le cas où l'angle de calage des profils varie le long de l'envergure), l'effilement $\epsilon = l_t/l$, le dièdre δ .

Dans l'étude de l'aile d'envergure finie, les paramètres les plus influents sont l'allongement et la flèche.

2.5.2 Traînée

Comme une aile est un objet profilé, la part de la traînée de forme dans la traînée totale est faible. Les deux principales contributions proviennent donc de la traînée de frottement (50%) et d'une traînée supplémentaire appelée traînée induite (40%).

L'allongement fini de l'aile est en effet à l'origine de l'apparition d'une traînée causée par la présence de tourbillons marginaux. En effet, lorsque l'aile a une envergure finie, la différence de pression entre l'intrados et l'extrados dévie les filets fluides et provoque l'apparition d'une nappe tourbillonnaire au bord de fuite et la formation de tourbillons en bout d'aile comme représenté figure 2.19. Il en résulte une diminution de la portance et une augmentation de la traînée.

La théorie de la ligne portante de Prandtl permet de relier la loi donnant la corde de l'aile dans la direction de l'envergure et la circulation Γ de la vitesse autour de l'aile. Elle permet de montrer que l'effet des tourbillons est de créer une vitesse verticale dirigée vers le bas et qui va être à l'origine d'une traînée supplémentaire, appelée traînée induite. Celle-ci vient s'ajouter à la traînée de forme et à la traînée de frottement. Le coefficient de traînée induite dépend du carré

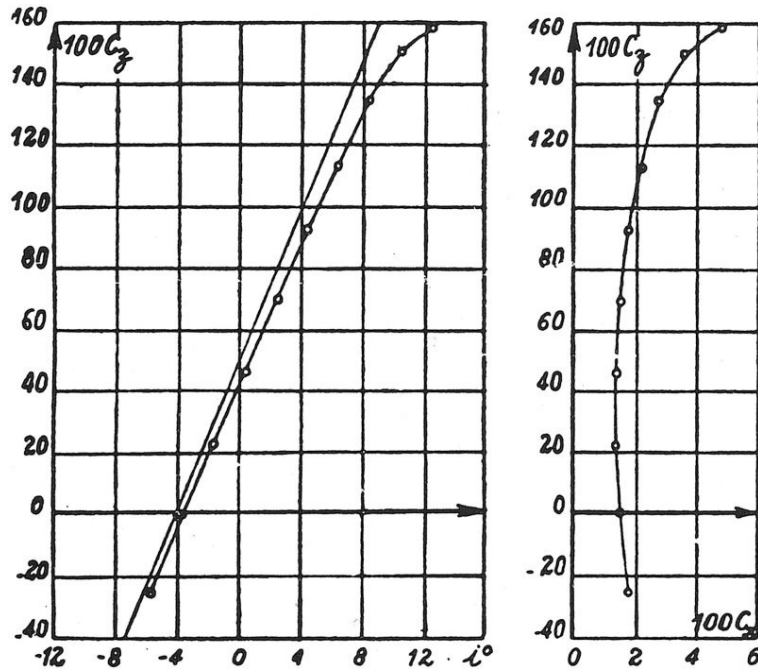


FIGURE 2.17 – Courbes représentant le coefficient de traînée C_D en fonction de l'incidence et la polaire d'une aile.

de la portance et vaut

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi \lambda e}$$

où le facteur d'efficacité e est un coefficient dépendant de la forme et du vrillage, et est compris entre 0.9 et 1 ($e = 1$ pour une aile elliptique).

Il est alors possible de calculer des formes d'aile permettant de réduire les effets négatifs des tourbillons sur les propriétés aérodynamiques de l'aile. Dans le cadre de cette théorie, l'aile elliptique présente les meilleures caractéristiques mais elle est plus compliquée à usiner par rapport à une aile rectangulaire. Un bon compromis est obtenu avec une aile à variation linéaire de corde qui correspond à un cas intermédiaire entre l'aile elliptique et l'aile rectangulaire et à laquelle est associé un coefficient d'effilement.

2.5.3 Effet de l'allongement et de la flèche

La pente de la courbe $C_L = f(i)$ augmente avec l'allongement comme indiqué dans la figure 2.20. Les flèches ont surtout un rôle au niveau des moments en jouant sur la stabilité de l'appareil.

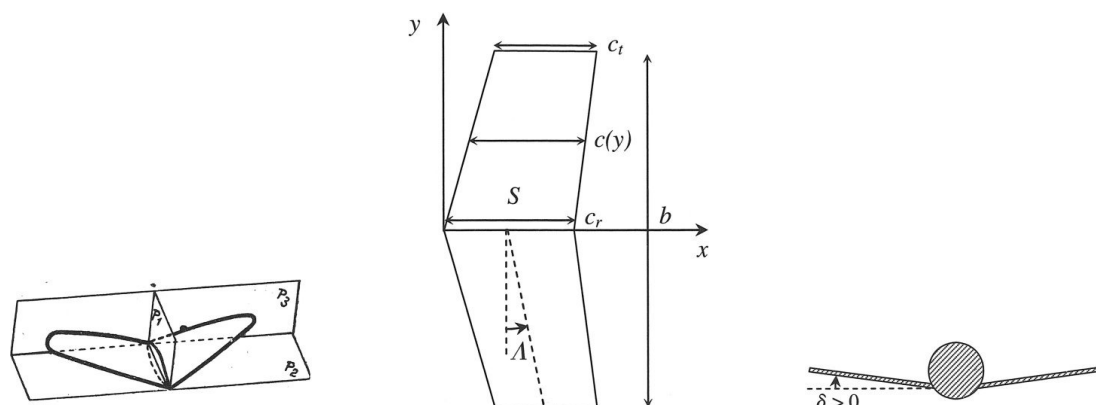


FIGURE 2.18 – Paramètres définissant une aile d'envergure finie.

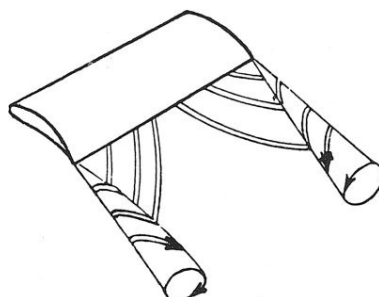


FIGURE 2.19 – Tourbillons marginaux apparaissant en bout d'aile.

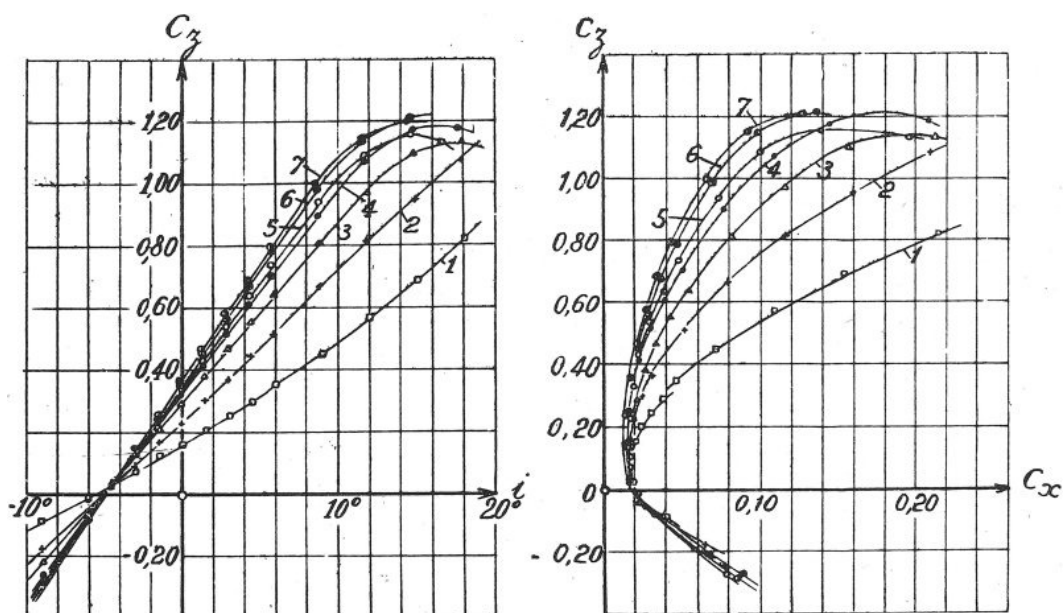


FIGURE 2.20 – Courbes représentant le coefficient de portance C_L en fonction de l'incidence i et la polaire pour plusieurs valeurs de l'allongement λ .

Chapitre 3

Installations expérimentales

3.1 Souffleries aérodynamiques

La grande majorité des souffleries utilisées de nos jours sont des souffleries fonctionnant par aspiration car l'écoulement de l'air est mieux contrôlé. On peut les classer en fonction du nombre de Mach de l'écoulement et du type de fonctionnement : à fonctionnement continu ou à rafales. A l'ENSEM, on dispose de trois souffleries faible vitesse, c'est-à-dire $Ma < 0.5$, et à fonctionnement continu.

Ce sont des souffleries de type Eiffel constituées de trois éléments (buse) : un convergent appelé collecteur, une chambre d'expériences, où se situe la veine d'essai, et un divergent appelé diffuseur. Le ventilateur est installé à l'extrémité du diffuseur. Dans les souffleries à retour (type Prandtl), on a de plus un circuit permettant de réinjecter le fluide de sortie en entrée ce qui permet de mieux contrôler certains paramètres. La veine fluide dans la chambre d'expériences peut être libre ou guidée. Le second cas est le plus fréquent (cas de l'ENSEM). A l'entrée du collecteur, on place un filtre ou une grille pour limiter la formation de tourbillons qui peuvent être créés par les perturbations de l'écoulement.

Comme on est en subsonique, le fluide est accéléré dans le collecteur et ralenti dans le diffuseur. Une étude plus précise peut être effectuée en décomposant l'écoulement dans le conduit en tranches transversales.

3.2 Mesure des vitesses

Il existe de nombreux dispositifs permettant de mesurer la vitesse, avec des conditions d'utilisation différentes : le tube de Pitot (la vitesse est obtenue à partir d'une différence de pression), l'anémomètre à moulinets (la vitesse est sensiblement proportionnelle à la vitesse de rotation), l'anémomètre à fil chaud (la vitesse est une fonction de la résistance électrique du fil à travers la convection forcée), la LDA (la vitesse est obtenue par effet Doppler sur des petites particules présentes dans l'écoulement). Pour une explication détaillée du fonctionnement de chacun, se reporter au chapitre sur la métrologie.

3.3 Mesure des efforts

Il y a plusieurs méthodes pour mesurer les efforts.

La composante due à la pression peut être obtenue à partir de la mesure de la répartition de pression le long du profil de l'objet à l'aide de prises de pression. Il suffit d'effectuer une intégration de ces efforts locaux pour obtenir la résultante et le moment résultant de pression.

Pour la mesure directe des efforts globaux (résultante aérodynamique et moment résultant), on utilise un dispositif appelé balance aérodynamique. Il en existe de différents types : rigides, à fils, mixtes. On dispose à l'ENSEM de balances rigides, c'est-à-dire d'appareils liés rigidement à l'objet et dont la réaction équilibre les efforts qui sont exercés sur l'objet par le fluide. Cette réaction est mesurée par des dynamomètres ou à travers la déformation calibrée d'éléments (par exemple).

Les coefficients peuvent aussi être obtenus indirectement à partir du champ de pression et du champ de vitesse autour de l'objet. Celui-ci peut être mesuré à l'aide d'un anémomètre à fil chaud (pour un écoulement d'air) ou par LDA (pour un écoulement d'eau). Dans ce cas, connaissant le champ de pression et de vitesse, on peut remonter à la force totale exercée par l'écoulement sur l'obstacle en faisant un bilan de quantité de mouvement.

Chapitre 4

Exemples

4.1 Objets volants

Exemples : avions, planeurs, ailes delta, parapentes, oiseaux, etc.

L'étude aérodynamique des objets volants est centrée sur l'étude des ailes. Se reporter aux sections 2.4 et 2.5. On pourra compléter l'étude en analysant la contribution éventuelle due au fuselage.

Amélioration des performances par des dispositifs auxiliaires

Pour améliorer les performances d'un avion, divers dispositifs existent. Ainsi, les *winglets* sont de petits éléments placés en bout d'aile qui permettent d'atténuer les tourbillons marginaux, et donc la traînée induite. Ils offrent de plus l'avantage de créer un supplément de portance. Au niveau de la traînée de frottement, le décollement de la couche limite laminaire peut être retardé en aspirant le fluide à la paroi. On peut aussi utiliser des *riblets*, sorte de petites rainures placées à la surface de l'aile et qui diminuent le coefficient de frottement de la couche limite turbulente. Pour jouer sur la portance, on utilise des dispositifs hypersustentateurs. Ainsi, en ayant un volet de bord de fuite pivotable, on augmente globalement la portance pour tous les angles d'incidence. A l'aide d'un bec de bord d'attaque, d'un volet ou d'un déflecteur, on ne joue que sur l'angle de décrochage.

4.2 Véhicule

Exemples : automobiles, trains.

Dans le cas d'un véhicule automobile, la traînée de pression est prépondérante par rapport à la traînée de frottement. On est donc conduit à étudier la répartition de la pression le long du profil dont une forme typique est représentée sur la figure 4.1. Pour diminuer la traînée de pression, on cherche à réduire les zones en surpression à l'avant du véhicule et celles en dépression à l'arrière. Le sillage du véhicule est complexe. En effet, aux tourbillons qui sont générés par le décollement des couches limites à l'arrière du véhicule s'ajoutent des tourbillons issus de l'avant.

En ce qui concerne la portance, elle augmente en général avec la vitesse du véhicule ce qui peut provoquer une perte d'adhérence, en particulier pour les voitures de sport de type Formule 1.

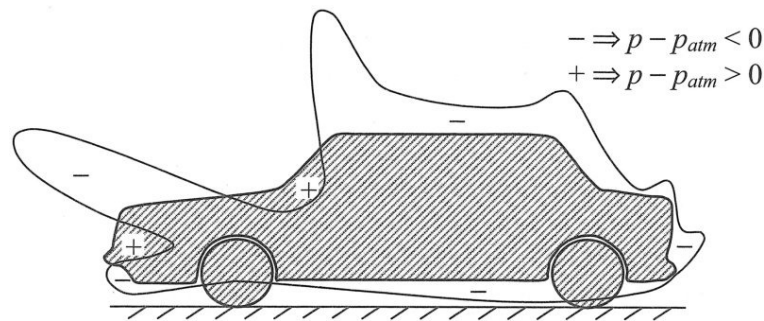


FIGURE 4.1 – Répartition de pression autour d'un véhicule automobile.

Cependant, par rapport aux avions, il faut ici tenir compte du sol : une dépression apparaît entre le véhicule et le sol qui a un effet positif sur l'adhérence. Celle-ci peut être renforcée en jouant sur la forme du conduit d'air sous le véhicule. Dans le cas où cela ne suffit pas, il faut rajouter des ailerons.

Amélioration des performances par des dispositifs auxiliaires

Les Formules 1 sont équipées de nombreux dispositifs permettant d'améliorer l'adhérence du véhicule sur la chaussée sans que cela ait une influence négative sur la traînée. Parmi ceux-ci, on peut citer les déflecteurs, les ailerons arrière ou avant. Les diffuseurs sont quant à eux placés sous le véhicule. L'effet de ces dispositifs sur la répartition de pression est schématisé dans la figure 4.2.

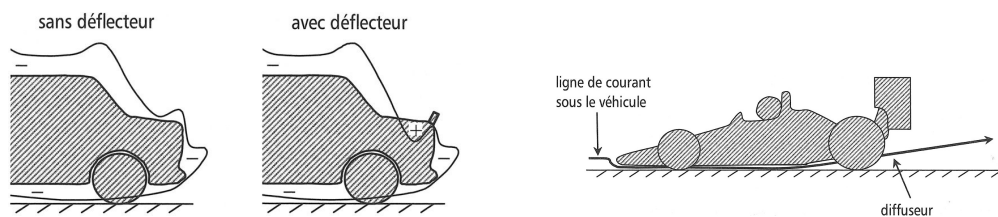


FIGURE 4.2 – Effet d'un déflecteur et d'un diffuseur sur la répartition de pression autour d'un véhicule.

4.3 Construction

Exemples : étude de l'effet du vent sur les immeubles et les ponts.

Pour cette étude, on se reportera avec profit à la section 2.1 qui concerne la plaque plane en incidence non nulle.

4.4 Nautique

Exemples : coques de bateaux, voiles.

L'étude du profil aérodynamique des coques de bateaux présente des différences importantes avec les autres objets. En effet, l'obstacle baigne ici dans deux fluides différents (air et eau). Il faut maintenant tenir compte des ondes à l'interface eau/air. Celles-ci induisent une traînée importante appelée résistance de vagues (ou traînée d'onde, à ne pas confondre avec la traînée d'onde des écoulements compressibles). De sorte qu'au final, la résistance à l'avancement d'un bateau est principalement due à la résistance de vagues et à la résistance visqueuse. On a donc ici deux paramètres qui interviennent : le nombre de Froude pour la résistance de vagues et le nombre de Reynolds (ainsi que la rugosité) pour la résistance visqueuse. En général, les maquettes utilisées pour les essais ne permettent pas de respecter la similitude pour ces deux paramètres en même temps. On choisit très souvent d'utiliser le même nombre de Froude et de corriger les mesures pour tenir compte de la résistance visqueuse.

4.5 Jeux de plein air

Exemples : ballon de football, de rugby ; balles lisses, rugueuses (balle de golf, balle de tennis) ; volants de badmington, etc.

On pourra étudier les conséquences de la forme du ballon, de la rugosité de sa surface (voir figure 4.3), de l'effet Magnus, etc. sur les trajectoires.

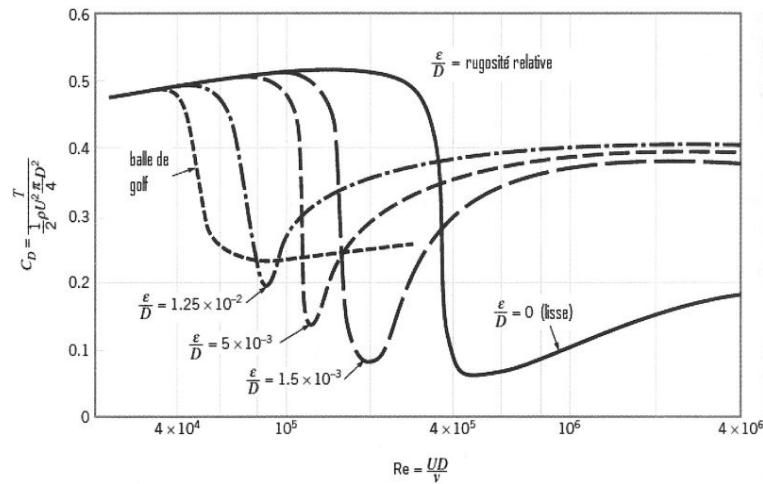


FIGURE 4.3 – Effet de la rugosité de la surface d'une balle sur le nombre de Reynolds critique Re_c .

4.6 Interaction de corps simples

Exemples : piles de ponts.

Chapitre 5

Références

1. S. Amiroudine, J.-L. Battaglia, *Mécanique des fluides*
2. J.-P. Brancher, *Mécanique des fluides fondamentale*
3. P. Chassaing, *Mécanique des fluides*
4. T. Faure, *Dynamique des fluides appliquée*
5. E.L. Houghton, P.W. Carpenter, *Aerodynamics*
6. P. Rebuffet, *Aérodynamique expérimentale*
7. F. Richecœur, *Aérodynamique*
8. M. Souhar, *Aérothermie*