

Philippe NABONNAND¹

L'apparition de la notion d'espace généralisé dans les travaux d'Élie Cartan en 1922

1. — Introduction

Dans un mémoire publié en 1922² sur les équations de la relativité générale, Élie Cartan explique qu'il a été amené à introduire « une conception géométrique nouvelle des espaces non euclidiens ». Si par la suite, il désignera ces espaces par diverses expressions – espaces à torsion, espaces non-holonomes³, espaces à connexion – la dénomination la plus fréquente reste celle d'espaces généralisés. Dans la présentation qu'ils font de l'œuvre mathématique d'Élie Cartan, Shiing-Shen Chern et Claude Chevalley⁴ expliquent qu'un espace généralisé au sens de Cartan est « un espace d'espaces tangents tels que deux espaces tangents infiniment proches soient reliés par une transformation infinitésimale d'un groupe de Lie donnéⁱ ». Un espace généralisé est donc un espace muni d'une connexion. Une difficulté de la construction de Cartan est que les « espaces tangents » ne sont pas

1 cf. note 1 p. 69.

2 [Cartan 1922a].

3 L'holonomie est une notion qui caractérise les systèmes mécaniques intégrables. Pour une analyse plus précise du lien de la théorie des espaces généralisés de Cartan à cette notion, on

peut consulter [Nabonnand 2009].

4 [Chern & Chevalley 1952, p. 221].

obligatoirement les espaces des vecteurs tangents mais sont simplement des espaces munis d'une structure – affine, projective, conforme... – attachée aux points d'une variété, la connexion permettant de passer d'un espace à l'autre⁵.

Dans ce qui suit, nous allons suivre comment Cartan décline l'argument de la généralisation de la notion d'espace durant l'année 1922. Nous nous intéresserons d'abord à l'article publié en 1922 dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* sur les équations d'Einstein évoqué ci-dessus, puis à cinq notes publiées la même année dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris*⁶ et enfin à une présentation de ses travaux destinées à une candidature infructueuse à l'Académie des sciences⁷. Les statuts éditoriaux de ces textes sont très différents ; le premier est un mémoire dans lequel Cartan établit un résultat important dans un contexte théorique très actif ; les notes aux *Comptes rendus* sont des textes courts (deux-trois pages) dans lesquelles Cartan met en place un programme de recherche autour de la notion d'espace généralisé ; le dernier texte est un document de synthèse dans lequel Cartan replace sa théorie des espaces généralisés dans la dynamique de ses recherches, explique les principes fondamentaux de celle-ci et annonce de manière programmatique les futurs mémoires consacrés aux espaces à connexion⁸.

Si l'année 1922 apparaît donc du point de vue des publications comme particulièrement féconde pour l'élaboration de la notion d'espace généralisé, il ne faut pas pour autant négliger les temps d'écriture des textes si l'on veut établir une chronologie fine de la conception du programme de recherche de Cartan sur les espaces à connexion. Par exemple, Cartan précise, dans l'introduction de son mémoire sur les équations d'Einstein, que ce dernier était déjà rédigé une année auparavant. De même, dans une annexe manuscrite⁹ (datée d'avril 1921¹⁰) à la présentation de ses travaux de 1912, après avoir longuement justifié de « la fécondité [de ses] méthodes et [de ses] points de vue [...] dans la théorie des systèmes de Pfaff et dans la théorie des groupes continus¹¹ », il annonce un article (à paraître dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*) dans lequel il applique aux « problèmes que

5 Chern et Chevalley [1952] précisent à cet égard que la généralité de la construction de Cartan a pu provoquer quelques mésinterprétations et celle-ci s'exprime de manière plus satisfaisante en utilisant la notion de fibré. On peut lire à cet égard la correspondance entre

Hermann Weyl et Élie Cartan sur cette question.

6 [Cartan 1922b, 1922c, 1922d, 1922e, 1922f].

7 [Cartan 1922g].

8 [Cartan 1923a, 1923b, 1924a, 1925].

9 [Cartan 1921].

10 Cette annexe manuscrite est rédigée à l'occasion de sa candidature à l'Académie des sciences en 1921 (4 avril).

11 [Cartan 1921, p. 43].

pose la théorie de la relativité généralisée » les mêmes techniques de résolution de systèmes de Pfaff utilisées dans son article sur les sous-groupes des groupes continus. Il ajoute qu'il y « étudie le système complet des invariants d'une forme différentielle quadratique sans faire le moindre emprunt aux procédés du Calcul différentiel absolu » et qu'il a démontré « que les équations de la gravitation d'Einstein sont les seules compatibles avec les conditions postulées par Einstein ». Cartan précise que « la même méthode s'appliquerait aux espaces généralisés de H. Weyl¹² et aussi à la théorie des invariants de l'équation obtenue en annulant une forme différentielle quadratique »¹³.

Cartan ne semble pas interagir sur cette question avec d'autres mathématiciens durant cette période¹⁴. Pour autant, il ne faut pas oublier que les années 1920 sont un moment de réception des théories d'Einstein dans les milieux académiques français. Ainsi, on peut dénombrer dans les *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences* 5 contributions « mathématiciennes » à la nouvelle théorie en 1920, 12 en 1921 et 11 (outre celles de Cartan) en 1922¹⁵.

2. — Une première construction de Cartan

Dans ses travaux ou sa correspondance, Cartan présente de plusieurs manières les notions de connexion et d'espace généralisé. Dans le mémoire sur les équations de la gravitation d'Einstein dans lequel il revient sur le traitement mathématique de la théorie de la relativité générale¹⁶, Cartan donne une première version partielle de sa théorie des espaces généralisés.

Le contexte théorique dans lequel Cartan situe l'origine des questions traitées dans son mémoire est clairement celui de la relativité générale. Pour autant, il revendique en même temps, la rigueur de son traitement, l'originalité de ses méthodes et le caractère géométrique de son approche. En effet, explique-t-il, si l'on écrit les équations d'Einstein sous la forme $T_{ik} = -G_{ik}$, où les T_{ik} désignent les composantes du tenseur de matière et G_{ik} un terme qui dépend des coordonnées x_i , des

fait état en ce qui concerne les années 1921-22 que de quelques lettres échangées avec Hermann Weyl (2), Gustave Juvet (1), Stanislas Zaremba (2) et Edgar B. Schieldrop (4) auxquelles il faut ajouter quelques notes dans un cahier.

15 Les principaux acteurs sont Adolphe Buhl (4 notes en 1920 et 1921), Jean-Marie Le Roux (5 en 1921 et 1922), et Paul Painlevé (4 notes en 1921 et 1922). On peut noter qu'en 1921, Émile Borel et Émile Picard propose eux-aussi une note concernant la théorie de la relativité.

16 [Cartan 1922a].

12 Cartan publie en 1922 une note aux *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences* [Cartan 1922h] et un article dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* [Cartan 1923c] sur la solution du problème de l'espace proposée par Hermann Weyl.

Sur cette solution, voir Erhard Scholz, *The problem of space in the light of relativity*, dans ce volume, p. 255.

13 [Cartan 1921, p. 53].

14 Le catalogue du *Nachlass* d'Elie Cartan (conservé aux Archives de l'Académie des sciences de Paris) ne

coefficients g_{ik} de la métrique et des dérivées premières et secondes de ces coefficients, alors le principe de relativité qui affirme l'indépendance de celles-ci par rapport aux changements de coordonnées, se traduit par une propriété de covariance de la forme différentielle quadratique $\sum G_{ik} dx_i dx_k$ ¹⁷. Cartan en conclut que « la recherche de toutes les équations de la gravitation revient donc à la recherche de toutes les formes différentielles quadratiques covariantes $\sum G_{ik} dx_i dx_k$ » ; un des objectifs de son article est de montrer « rigoureusement » que la seule « solution mathématiquement possible » de ce problème vérifiant deux conditions ajoutées par Albert Einstein¹⁸ est précisément celle proposée par ce dernier. Pour autant, Cartan ne limite pas l'ambition de son article à ce seul résultat de physique théorique mais ajoute que son « mémoire résout aussi implicitement, d'une manière rigoureuse, le problème de la détermination de tous les systèmes covariants de relations entre les x_i , les g_{ik} et leurs dérivées partielles des deux premiers ordres, ces relations étant linéaires par rapport aux dérivées du second ordre¹⁹ ».

L'idée fondamentale de Cartan est d'associer à une structure géométrique un système de Pfaff²⁰ à partir duquel il peut mettre en œuvre les techniques qu'il avait développées une quinzaine d'années plus tôt lorsqu'il s'intéressait à la classifications des groupes de Lie et des espaces symétriques²¹.

L'exemple emblématique plusieurs fois repris par Cartan pour expliquer ses techniques et introduire ses notations est celui de la théorie du trièdre mobile dans l'espace euclidien muni de coordonnées curvilignes²². Si l'on considère l'espace euclidien à trois dimensions muni de coordonnées curvilignes dans lesquelles la métrique s'exprime sous la forme

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2,$$

alors, comme l'explique Cartan, une telle expression de la métrique correspond à la donnée « en chaque point M de l'espace d'un trièdre trirectangle » et les formes linéaires $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ désignent « les composantes de la translation infiniment petite qui, jointe à une rotation infiniment petite autour d'un axe passant par M, fait passer du trièdre associé au point M au trièdre associé au point M + dM²³ ». En notant ω_{ij} , les

17 [Cartan 1922a, p. 1].

18 Les deux conditions sont la linéarité des G_{ik} par rapport aux dérivées secondes des g_{ik} et que « la loi de conservation [de l'énergie] soit respectée » [Cartan 1922a, p. 1]

19 [Cartan 1922a, p. 6].

Cartan fait allusion aux travaux d'Elwin Bruno Christoffel [Christoffel 1869] et au calcul différentiel absolu de Gregorio Ricci-Curbastro [Ricci 1886 & 1888] ; après avoir présenté son problème, il remarque :

« c'est le problème même étudié par Christoffel et en vue duquel a été fondé le calcul différentiel absolu. » [Cartan 1922a, p. 4].

20 Henri Cartan commence l'exposé sur les systèmes de Pfaff au séminaire de mathématiques (exposé 4-B) du 30 novembre 1936 en rappelant la définition de ces systèmes :

« On appelle système de Pfaff tout système obtenu en égalant à zéro un nombre fini de formes différentielles à r variables, $x_1, x_2, \dots, x_n$ (y compris des formes de degré zéro c'est-à-dire des fonctions des variables). La théorie de M. Cartan, qui a été développée dans le cas où les formes données sont de degré zéro ou un (systèmes de Pfaff proprement dits) s>tend aux formes de degré quelconque ; nous verrons d'ailleurs que l'intégration d'un système quelconque peut toujours se ramener à celle d'un système de Pfaff proprement dit. » [HCartan 1936]

L'idée d'aborder les groupes de transformations ou les structures géométriques en étudiant un système de Pfaff est centrale et récurrente dans les travaux d'Elie Cartan. Sur cette question, on peut consulter [Cogliati 2012] et [Chorlay 2007].

21 Voir [Cartan 1904, 1905, 1908, 1909].

22 Cartan a consacré dès 1910 un article sur les liens entre les techniques qu'il avait développées pour étudier les groupes continus et la théorie du trièdre mobile de Gaston Darboux [Cartan 1910].

23 [Cartan 1922a, p. 7].

composantes de la rotation infinitésimale, on obtient, pour un point de coordonnées x, y, z fixe par rapport au repère mobile les équations :

$$\begin{cases} dx + y\omega_{21} + z\omega_{31} + \omega_1 = 0 \\ dy + z\omega_{32} + x\omega_{12} + \omega_2 = 0 \\ dz + x\omega_{13} + y\omega_{23} + \omega_3 = 0 \end{cases}$$

qui expriment que la composition du mouvement infinitésimal du point avec la rotation infinitésimale et la translation infinitésimale qui permettent de passer du premier repère au repère infiniment voisin ne change pas les coordonnées du point. Cartan obtient comme conditions d'intégrabilité de ce système d'équations les formules suivantes

$$\omega'_i = \sum_{k \neq i} [\omega_k \omega_{ki}] \quad \omega'_{ij} = [\omega_{ik} \omega_{kj}] \quad (k \neq i, j) \quad ^{24}$$

qu'il identifie aux équations établies par Gaston Darboux dans sa théorie du repère mobile²⁵ et qui sont l'expression, dans ce cas particulier du groupe orthogonal, des formules dites de Maurer-Cartan.

Une première généralisation de ce résultat consiste, aux yeux de Cartan, à l'étendre aux espaces euclidiens de dimensions quelconques et aux « espaces euclidiens généralisés, tel que celui de Minkowski »²⁶, c'est-à-dire à des espaces munis d'une métrique définie quelconque $ds^2 = \sum_i \varepsilon_i \omega_i^2$ ($\varepsilon_i = \pm 1$), ce qui conduit à des équations de structure de la forme

$$(1) \quad \omega'_i = \varepsilon_i \sum_{k=1}^n [\omega_k \omega_{ki}] \quad \omega'_{ij} = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k [\omega_{ik} \omega_{kj}] .$$

De la même manière que dans l'espace euclidien à trois dimensions, ces équations traduisent la condition d'intégrabilité du système d'équations

$$(2) \quad dx_i + \omega_i + \varepsilon_i \sum_{k=1}^n x_k \omega_{ki} = 0$$

qui exprime que le point de coordonnées $x_1, \dots, x_n$ est fixe²⁷. De la même manière, les équations

$$(3) \quad d\xi_i + \varepsilon_i \sum_{k=1}^n \xi_k \omega_{ki} = 0$$

traduisent analytiquement que le vecteur de composantes $\xi_1, \dots, \xi_n$

²⁴ En langage moderne, ces équations s'écrivent :

$$d\omega_i = \sum_{k \neq i} \omega_k \wedge \omega_{ki} \quad d\omega_{ij} = \sum_{k \neq i} \omega_{ki} \wedge \omega_{kj} \quad (k \neq i, j)$$

²⁵ Voir par exemple [Cartan 1910, p. 146].

²⁶ [Cartan 1922a, p. 9].

²⁷ Cartan parle de « vitesse absolue nulle » ce qui montre bien qu'il conçoit l'ensemble des repères mobiles comme un espace.

reste parallèle à lui-même au cours du déplacement infinitésimal ; on retrouve ainsi dans le cas euclidien la notion de transport parallèle introduite par Tullio Levi-Civita²⁸. Cartan donne alors une interprétation géométrique de ces équations à partir de laquelle il va envisager différents modes de généralisation d'espace ; il considère une « demi-droite » issue d'un point mobile sur un contour fermé. Dans un espace euclidien²⁹, cette demi-droite « revient coïncider avec sa position initiale » quand le point M revient à sa position d'origine. Cette propriété géométrique³⁰ se traduit analytiquement par l'intégrabilité du système de Pfaff (2), ce qui est assuré par les équations de structure (1). Réciproquement, les équations (1) caractérisent les variétés euclidiennes, celles-ci étant « les seules pour lesquelles la notion de parallélisme de deux directions issues de deux points quelconques M et M' a une signification *absolue*, c'est-à-dire indépendante du chemin suivi pour aller de M à M'³¹ ».

Cartan précise que « les expressions ω_i sont les composantes de la *translation instantanée*, les expressions ω_{ij} celles de la *rotation instantanée* du système de référence mobile »³² et conclut que la donnée de la métrique sous forme canonique fournit les composantes de la translation instantanée du système et celles de la rotation instantanée « sont données sans ambiguïté » par les n premières équations (1), ce qu'il résume sous la forme d'un théorème :

À toute décomposition du ds^2 en carrés de la forme $[\sum_i \varepsilon_i \omega_i^2]$ correspondent, d'une manière et d'une seule, $\frac{n(n-1)}{2}$ expressions de Pfaff $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, linéaires en $dx_1, \dots, dx_n$, du $1, \dots, du_{n(n-1)/2}$ satisfaisant aux relations (2)

$$(4) \quad \omega'_i = \varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k \omega_{ki}]^{33}.$$

À partir de ce théorème, Cartan raisonne en partant du système d'équations (4) et des dérivées de celles-ci.

28 [Levi-Civita 1917].

29 Cartan utilise l'expression « variété euclidienne » [Cartan 1922a, p. 14].

30 Cette propriété sera désignée un peu plus tard par Cartan comme l'holonomie. Voir [Nabonnand 2009].

31 [Cartan 1922a, p. 15].

32 [Cartan 1922a, p. 11].

33 [Cartan 1922a, p. 13 Les x_i sont les variables d'espace et les u_j sont les paramètres introduits par la décomposition de la métrique. ω' désigne la différentielle extérieure de la forme ω .

La dérivée d'une équation du système (4) s'écrit

$$0 = \sum_{k=1}^{k=n} [\omega'_k \omega_{ki}] - [\omega_k \omega'_{ki}]$$

On obtient en remplaçant les ω'_k par leur valeur et en posant

$$\Omega_{ij} = \omega'_{ij} - \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega_{ik} \omega_{kj}],$$

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k \Omega_{ki}] = 0.$$

Les Ω_{ij} s'expriment comme une combinaison linéaire des crochets

des ω_k : $\Omega_{ij} = \sum_{(k,l)} A_{ij}^{kl} [\omega_k \omega_l]$, où les A_{ij}^{kl} « sont les coefficients de courbure de Riemann³⁴ » et vérifient donc les relations

$$A_{ij}^{kl} = -A_{ji}^{kl} = -A_{ij}^{lk} \quad A_{hi}^{kl} + A_{ki}^{lh} + A_{li}^{hk} = 0.$$

Dans son article sur les équations d'Einstein, Cartan a dès lors mis en place le cadre théorique dans lequel il va étudier les invariants des métriques définies par rapport à des changements de variables. Il a montré qu'avec son point de vue il retrouve les outils (courbure, calcul différentiel absolu, transport parallèle) utilisés dans la théorie de la relativité générale. Par contre, il n'insiste que très peu sur les conséquences géométriques de son analyse. En particulier, il n'évoque pas la possibilité de remplacer l'équation (4) et n'envisage donc pas la possibilité des espaces à torsion.

Dans les notes aux *Comptes rendus* qu'il publie la même année, même s'il continue à placer son travail par rapport aux nouvelles théories de physique (théorie d'Einstein, milieu élastique en équilibre, univers optique), il insiste sur la généralité de sa présentation et aborde la question de la torsion (qu'il présente comme « une généralisation de la notion de courbure³⁵ ») ainsi que la possibilité d'utiliser d'autres groupes de transformations que le groupe orthogonal³⁶.

34 [Cartan 1922a, p. 16]. Dans la note sur les équations de structure des espaces généralisés [Cartan 1922f], Cartan utilise aussi la dénomination «

symboles de Riemann-Christoffel ».

35 [Cartan 1922c].

36 [Cartan 1922e].

3. — La série des notes aux Comptes rendus de l'Académie des sciences

Élie Cartan publie en un peu plus de deux mois, entre le 13 février et le 24 avril 1922, cinq notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* toutes classées en géométrie³⁷, dans lesquelles il explique sa théorie des espaces généralisés et son intérêt pour la bonne compréhension des théories d'Einstein.

Les espaces à torsion

Comme on l'a vu plus haut, Cartan associe la courbure de Riemann à une rotation d'un repère mobile qui se transporte parallèlement (au sens de Levi-Civita) le long d'un parcours fermé infiniment petit. En se transportant ainsi le long du parcours fermé, l'origine du repère revient à sa position initiale mais le repère subit une rotation. Dans la note sur la généralisation de la notion de courbure³⁸, Cartan se propose de revenir sur ce résultat en évitant de reprendre la notion de transport parallèle (qu'il estime difficile à définir sans calcul) et en ne s'appuyant que sur des considérations géométriques élémentaires ; tout en faisant apparaître la signification profonde de la notion de transport parallèle, il est amené à généraliser « la notion même d'espace³⁹ ». Pour cela, il imagine « un espace qui, au voisinage immédiat de chaque point, ait tous les caractères de l'espace euclidien⁴⁰ » et que ces espaces soient reliés par une loi permettant de se repérer dans un de ces espaces à partir d'un espace voisin :

Les habitants de cet espace⁴¹ sauront, par exemple, repérer les points infiniment voisins d'un point au moyen d'un trièdre trirectangle ayant ce point A pour origine ; mais nous supposons en outre qu'ils ont une loi leur permettant de repérer, par rapport au trièdre d'origine A, tout trièdre de référence ayant son origine A' voisine de A ; en particulier cela aura un sens pour eux de dire que deux directions issues l'une de A, l'autre de A', sont parallèles. En définitive, un tel espace sera défini par la loi de repérage

37 Les quatre premières notes [Cartan 1922b, 1922c, 1922d et 1922e] sont présentées par Émile Borel et la dernière par Jacques Hadamard.

38 [Cartan 1922c].

39 [Cartan 1922c, p. 593].

40 [Cartan 1922c, p. 593].

41 On notera que Cartan utilise un style cher aux théoriciens de l'espace (comme par exemple Henri Poincaré ou Hermann von Helmholtz) en essayant de donner une idée d'un espace généralisé en imaginant le comportement d'habitants d'un tel monde.

mutuel (de nature euclidienne) de deux trièdres d'origines infiniment voisines. [Cartan 1922c, p. 593]

La donnée de la métrique ne suffit pas pour déterminer cette loi de repérage ; celle-ci ne définit que la translation infinitésimale entre deux repères infiniment voisins ; or, il est indispensable de définir une rotation infinitésimale qui peut être définie arbitrairement. Cartan reprend l'analyse du déplacement des trièdres de référence le long d'un contour fermé infiniment petit. À chaque déplacement infinitésimal, le trièdre subit une translation et une rotation infinitésimales ; en rapportant cette suite de déplacements dans l'espace euclidien de l'origine A, il considère la composition des translations et des rotations infinitésimales effectuées tout au long du parcours fermé. Lorsque le point mobile revient à l'origine, on ne retrouve pas le trièdre initial, celui-ci a subi une translation et une rotation qui ne dépendent que du contour fermé ; ces deux transformations infiniment petites⁴² mesurent la divergence entre l'espace non-euclidien considéré et l'espace euclidien :

On peut dire que l'espace donné se différencie de l'espace euclidien de deux manières : 1° par une courbure au sens de Riemann, qui se traduit par la rotation ; 2° par une torsion, qui se traduit par la translation. [Cartan 1922c, p. 595]

Cartan signale que cette manière de concevoir les espaces généralisés donne à la notion de transport parallèle telle qu'elle a été définie par Levi-Civita un relief nouveau puisqu'il signale qu'il est aisé de montrer que parmi toutes les lois de repérage entre deux repères infiniment voisins compatibles avec une métrique donnée, « il y a une et une seule pour laquelle la translation associée à un contour fermé infiniment petit quelconque est nulle⁴³ ».

Des équations de structure sont associées aux espaces généralisés. Cartan commence par rappeler que les espaces euclidiens et non-euclidiens sont associés à un groupe de déplacements. Ces groupes sont caractérisés par des équations de structure que l'on obtient en associant à chaque point de l'espace un repère et en considérant les

42 Cartan précise que leur ordre de grandeur est celui « de l'aire limitée par ce contour » [Cartan 1922c, p. 594].]

43 [Cartan 1922c, p. 594].

déplacements infinitésimaux qui permettent de passer d'un de ces repères à un repère infiniment voisin⁴⁴. Cartan reprend l'exemple de l'espace euclidien et explique que dans ce cas, ces déplacements infinitésimaux se décomposent en une translation et une rotation. En notant ω_i les composantes de la translation et ω_{ij} ⁴⁵ celles de la rotation, les formes différentielles ω « satisfont aux relations classiques⁴⁶ relatives aux déplacements à plusieurs paramètres⁴⁷ » :

$$(6) \quad \omega'_i = \sum_k [\omega_k \omega_{ki}] \quad \omega'_{ij} = \sum_k [\omega_{ik} \omega_{kj}] .$$

Dans le cas d'un espace euclidien généralisé⁴⁸, on obtient en utilisant la même procédure « des formules analogues mais non identiques⁴⁹ » :

$$(7) \quad \omega'_i = \sum_k [\omega_k \omega_{ki}] + \Omega_i \quad \omega'_{ij} = \sum_k [\omega_{ik} \omega_{kj}] + \Omega_{ij} .$$

44 Cartan rappelle que Lie décrivait la structure des groupes de transformations en considérant les transformations infinitésimales des groupes (algèbre de Lie). Cartan adopte un autre point de vue en associant à chaque groupe de transformations un système de Pfaff invariant par les transformations infinitésimales du groupe. Ce système de Pfaff reçoit une interprétation géométrique à la lumière de la théorie du repère mobile de Darboux (voir [Cartan 1910]). Cartan expose ici cette interprétation dans l'intention de la généraliser aux espaces généralisés.

45 $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$

46 Cartan donne comme référence le premier tome des *Leçons sur la théorie générale des surfaces* de Darboux [1887].

47 [Cartan 1922f, p. 1105].

48 Dans la note sur les équations de structure des espaces généralisés, Cartan utilise l'expression « espace euclidien déformé ». Cartan avait repris dans les années 1916-1920 la question de la déformation des surfaces dans différents espaces (espace euclidien, espace conforme, espace projectif) [Cartan 1916, 1917, 1918, 1920a, 1920b]. Dans ces travaux, il met en place plusieurs techniques pour relier l'analyse des systèmes de Pfaff et la géométrie infinitésimale. L'influence de ces travaux sur la théorie des connexions de Cartan fera l'objet d'une étude ultérieure.

Les Ω_i et Ω_{ij} sont présentés comme des termes correctifs qui expriment « la divergence entre l'espace considéré et l'espace euclidien ». Les Ω_i sont les composantes d'une translation infinitésimale et définissent la torsion de l'espace ; les Ω_{ij} sont les composantes d'une rotation infinitésimale (associée à un élément de dimension 2 de l'espace) et définissent la courbure de l'espace. Contrairement à ce qu'il a présenté dans le mémoire sur les équations d'Einstein, Cartan exprime le problème de la déformation des espaces homogènes associés à un groupe en toute généralité en envisageant dans un même geste les modifications des deux sortes d'équations de structure et faisant apparaître ensemble la torsion et la courbure⁵⁰. Il présente les espaces généralisés comme des continus de référentiels dont les espaces homogènes sont des cas particuliers. Cartan tient aussi à montrer que son point de vue englobe celui de Levi-Civita dans la mesure où la connexion de Levi-Civita est sans torsion :

Si le ds^2 est donné, la loi de parallélisme de M. Levi-Civita s'obtient en le décomposant de la manière la plus générale possible en une somme de carrés $\sum_i \omega_i^2$ et en déterminant les

49 [Cartan 1922f, p. 1105].

50 Cartan reprend le terme utilisé en géométrie des courbes pour désigner la seconde courbure ; la courbure d'une courbe « mesure » le défaut de linéarité et la torsion de celle-ci « mesure » son défaut de planéité. La courbure d'une variété «

mesure » le changement de direction d'un vecteur qui se déplace le long d'un lacet infinitésimal et la torsion représente la translation subie par ce même vecteur. Sur les liens entre cette notions de torsion et celle utilisée en théorie des courbes, on peut voir [Kiehn 1999].

$\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, ce qui est toujours possible d'une manière et d'une seule, par les conditions $\omega'_i = \sum_k [\omega_k \omega_{ki}]$. [Cartan 1922f, p. 1106]

*L'inscription du programme de recherche
dans un contexte de physique théorique*

Tout en insistant sur la nouveauté de sa construction des espaces géométriques, Cartan justifie son travail en détaillant ses applications en physique théorique. Il situe toutes les innovations géométriques dans le contexte des théories d'Einstein et présente les premiers éléments techniques dans le cadre de la théorie des milieux élastiques en équilibre⁵¹.

Dans la première note⁵², l'exemple d'introduction est comme dans le mémoire sur les équations d'Einstein, celui des variétés riemanniennes à trois dimensions (implicitement muni de la connexion de Levi-Civita⁵³). Cartan montre comment la théorie de Riemann permet de modéliser « un milieu matériel continu en équilibre sous la seule action de ses forces élastiques⁵⁴ ». L'état de tension d'un tel milieu est décrit « par un vecteur appliqué à un élément de surface orienté arbitraire du milieu et indiquant la résultante des actions exercées à travers cet élément de surface⁵⁵ ». Les composantes de ce tenseur sont donc des éléments d'intégrales de surface⁵⁶. Cartan montre alors que ce champ de vecteurs peut être interprété comme la courbure d'une métrique riemannienne. Il utilise pour cela la procédure fondamentale à partir de laquelle il fait apparaître les équations de structure des espaces généralisés : transporter parallèlement un trièdre de référence le long d'un contour fermé. La différence de position entre la position initiale et la position finale du trièdre fait apparaître une rotation infiniment petite qui peut être représentée par un vecteur⁵⁷ dont les composantes sont les coefficients de courbure riemannienne Ω_{ij} :

Il résulte de ce qui précède qu'on peut expliquer l'état d'un milieu élastique en équilibre en admettant que l'espace qui le contient est déformé et l'état de tension du milieu traduit physi-

chaque élément de surface du milieu : c'est en somme un vecteur dont les composantes sont éléments d'intégrales doubles [2-formes différentielles]. À l'état dynamique, un milieu matériel continu peut de même être caractérisé par un vecteur de l'espace-temps, mais qui serait appliqué à un élément de volume (à trois dimensions) de l'Univers : les composantes de vecteur sont donc des éléments d'intégrales triples [3-formes différentielles] dont les coefficients font intervenir la densité, la vitesse et l'état de tension du milieu ». [Cartan 1922g, p. 58-59]
52 [Cartan 1922b].

53 C'est-à-dire sans torsion.

54 [Cartan 1922b, p. 437].

55 [Cartan 1922b, p. 437].

56 En langage moderne, on dirait 2-forme différentielle.

57 Cartan explicite dans son mémoire sur les variétés à connexion affine ce calcul (seulement sous-entendu dans la première note) [Cartan 1923a, p. 368].

51 Dans la présentation de ses travaux [Cartan 1922g], Cartan précise : « [Einstein], comme on sait, identifie les propriétés géométriques de l'Univers, considéré comme un espace de Riemann, avec ses propriétés physiques ; cela revient à affirmer la possi-

bilité de donner une interprétation purement géométrique du tenseur qui caractérise l'état d'un milieu matériel continu. Or à l'état statique, un milieu élastique est complètement caractérisé par le vecteur qui représente la tension (ou la pression) qui s'exerce sur

quement cette déformation géométrique. Un fluide parfait en équilibre (et par suite de pression constante) correspondrait à un espace non euclidien de courbure constante, le vecteur qui manifeste la courbure de chaque élément de surface étant normal à cet élément. [Cartan 1922b, p. 438]

Cartan applique la même procédure à « l'Univers d'Einstein » à quatre dimensions. Il attache à chaque élément de volume (à trois dimensions) un vecteur à 10 composantes⁵⁸ et fait apparaître de la même manière que précédemment une rotation associée à chaque élément de surface orienté. Cartan montre alors que le tenseur d'Einstein se calcule géométriquement à partir des rotations associées aux faces d'un parallélépipède infinitésimal.

De la même manière, Cartan justifie l'introduction de la notion de torsion en expliquant d'une part qu'elle permet de révéler la signification profonde du parallélisme de Levi Civita⁵⁹ mais aussi en pointant que la notion d'espaces à torsion « conduira en même temps à des images géométriques d'Univers matériels plus riches physiquement que notre Univers, au moins tel qu'on le considère d'habitude » et qu'en outre cela explicitera « la vraie raison des lois fondamentales auxquelles obéit le tenseur d'énergie (loi de symétrie, loi de conservation)⁶⁰ ». Comme nous l'avons vu plus haut, Cartan associe à chaque contour infinitésimal fermé une rotation (qui exprime la courbure) et une translation (qui exprime la torsion). La rotation peut être représentée par un vecteur et la translation par un couple. Cartan annonce qu'il peut démontrer la loi de conservation⁶¹ :

Si l'on considère un volume infiniment petit, les vecteurs et les couples associés aux différents éléments de surface qui limitent le volume se font équilibre. [Cartan 1922c, p. 594]

Ce résultat permet d'obtenir « une image géométrique d'un milieu matériel continu en équilibre sous la seule action de ses forces élastiques⁶² » dans le cas où ces forces se manifestent sur chaque élément de surface par une force unique (tension ou pression) et aussi par un couple de forces (torsion). Cartan prend le soin de rapporter son point

58 De même qu'en dimension 3, les 9 coefficients du tenseur qui définit la tension d'un milieu élastique se réduisent à 6, les 16 coefficients du tenseur considéré par Cartan dans l'espace de dimension 4 se réduisent à 10.

59 La connexion de Lévi-Civita est l'unique connexion sans torsion asso-

ciée à une métrique riemannienne.

60 [Cartan 1922c, p. 593].

61 Cartan donne une idée de la démonstration de ce principe de conservation dans la première note [Cartan 1922b, 439] dans le cas où il n'y a que des forces de tension. Une démonstration rapide

dans le cas général (qui utilise la formule d'Ostrogradski) est esquissée dans la note sur les équations de structure des espaces généralisés [Cartan 1922f, p. 1106] et explicitée dans le mémoire sur les variétés à connexion affine [Cartan 1923a, p. 373-377].

62 [Cartan 1922c, p. 594]

de vue de la note sur l'action euclidienne⁶³ que les frères Cosserat avaient publiée en annexe de la seconde édition du traité de mécanique rationnelle de Paul Appell ainsi qu'à la théorie des espaces généralisés d'Hermann Weyl⁶⁴. Dans la note dans laquelle il donne quelques éléments de réflexion sur les rapports entre la théorie des espaces généralisés et la théorie d'Einstein⁶⁵, Cartan insiste sur la *loi générale de conservation* liée aux espaces déformés selon laquelle la somme des déplacements infinis petits associés aux différents éléments de surface qui limitent un élément de volume de l'espace est nulle. Il présente les espaces de Weyl comme des espaces euclidiens déformés à condition de considérer comme groupe euclidien non le groupe orthogonal mais celui des similitudes. Dans ce cas, il est associé à chaque contour infinitésimal fermé (en suivant le déplacement d'un trièdre de référence le long du contour fermé) «1° une rotation, qui traduira la courbure proprement dite de l'espace ; 2° une translation, qui traduira sa torsion ; 3° une homothétie qui traduira ce qu'on peut appeler sa courbure d'*homothétie*⁶⁶ » :

L'Univers de H. Weyl, qui est naturellement à quatre dimensions, n'a pas de torsion ; sa courbure d'homothétie se traduit, sur chaque élément de surface, par l'élément d'intégrale double qui définit le champ électromagnétique, et qui n'est autre que la différence entre le rapport d'homothétie associé au contour fermé qui limite la surface et l'unité. [Cartan 1922d, p. 736]

L'espace conforme généralisé

À plusieurs reprises, Cartan évoque la possibilité de généraliser sa construction en déformant non plus l'espace euclidien ou l'espace affine⁶⁷, mais d'autres espaces comme l'espace projectif ou l'espace conforme. Il suffit, selon Cartan, de considérer un espace qui possède au voisinage de chaque point les propriétés d'un espace affine, projectif ou conforme et de se donner une loi qui permette de passer d'un système de référence attaché à un point à celui attaché à un point infiniment proche. En 1922, Cartan ne donne que quelques précisions

63 [Cosserat 1909]. Sur les travaux en mécanique d'Eugène et François Cosserat, on peut consulter [Brocato & Chatzis 2009]. Dans leur présentation, E. et F. Cosserat considère l'action d'un trièdre attaché aux points de l'espace comme un invariant [Cosserat 1908, 612]. La loi de

conservation de Cartan généralise ce point de vue. Pour une reconstruction en termes modernes de la théorie des corps déformables des frères Cosserat, voir [Hehl & Obukhov 2007] (Je remercie Ehrard Scholz de m'avoir signalé cette référence).

64 Voir dans ce volume, le chapitre 6.

65 [Cartan 1922d].

66 [Cartan 1922d, p. 736].

67 Dans la note [Cartan 1922d], l'espace affine déformé est déjà présenté comme une généralisation de l'espace euclidien déformé.

concernant l'espace conforme généralisé qui est donc présenté comme « un espace qui jouit, au voisinage de chaque point, de toutes les propriétés de l'espace conforme et pour lequel on a une loi de repérage mutuel de deux systèmes de référence attachés à deux points infiniment voisins⁶⁸ ». Comme on l'a vu, Cartan est particulièrement soucieux en 1922 d'inscrire sa théorie dans le contexte des nouvelles théories physiques. Ce seront donc des questions de propagation de la lumière qui serviront de justification à la considération de l'espace conforme généralisé. Les propriétés d'une figure d'un espace conforme sont celles conservées par les transformations conformes, présentées comme celles « qui conservent l'équation obtenue en annulant une forme quadratique de différentielles à coefficients constants⁶⁹ » :

En relativité restreinte la propagation de la lumière se fait d'après l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0$: cette équation définit un Univers conforme à quatre dimensions ; les rayons lumineux jouent dans cet univers le même rôle que les droites isotropes dans l'espace conforme ordinaire [Cartan 1922e, p. 857].

Le groupe conforme est engendré par les translations, les homothéties, les rotations et les élations⁷⁰. De même que pour les espaces euclidiens déformés (les espaces riemanniens) la donnée de la métrique était insuffisante à définir l'espace généralisé, la connaissance de l'équation obtenue en annulant une forme quadratique ne suffit pas pour définir l'espace conforme généralisé. Il faut aussi préciser une loi de « repérage mutuel de deux systèmes de référence attachés à deux points infiniment voisins ». Cette loi permet d'associer à chaque contour fermé infiniment petit passant par un point A une transformation conforme infiniment petite que l'on peut décomposer « 1° en une translation ; 2° en une homothétie de centre A ; en une rotation autour de A ; en une élation de centre A⁷¹ ». Parmi l'infinité d'espaces conformes généralisés correspondant à une équation $ds^2 = 0$, il en est un et un seul pour lequel la courbure d'homothétie et la courbure de Ricci⁷² sont nulles et qui de ce fait est particulièrement lié à cette équation. Cartan propose de qualifier de tels espaces de *normal* et

68 [Cartan 1922e, p. 857].

69 [Cartan 1922e, p. 857].

70 En géométrie projective, une homologie est une perspective qui laisse invariants tous les points d'un hyperplan ne contenant pas le centre de l'homologie. Une élation, parfois appe-

lée homologie singulière, est une perspective qui laisse invariants les points d'un hyperplan contenant le centre de perspective (voir [Coxeter 1961, p. 247-248]. Cartan précise que « c'est l'existence de ces élations qui distingue l'espace conforme de l'espace

euclidien des similitudes dont l'Univers de H. Weyl peut être considéré comme une déformation. » [Cartan 1922e, p. 857-858].

71 [Cartan 1922e, p. 858].

72 La courbure de Ricci est la trace de la courbure sectionnelle.

d'appeler « *Univers optique* d'Einstein » l'espace conforme généralisé normal associé à l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0$:

C'est conformément aux propriétés géométriques de cet Univers optique que se fait la propagation de la lumière. [Cartan 1922e, p. 859]

Cartan a centré son esquisse de la construction des espaces conformes généralisés autour des transformations conformes et de leur décomposition en translations, rotations, homothéties et élations. Dans la dernière note sur les équations de structure des espaces généralisés qui insiste plus sur la notion de groupe de transformations, Cartan évoque la généralisation de la construction des espaces généralisés en termes de groupe de transformations :

On conçoit que ce qui a été fait pour le groupe euclidien, dans les équations de structure ont été déformées [...], peut se répéter pour n'importe quel groupe, fini ou infini. [Cartan 1922f, p. 1106]

C'est autour de la notion d'équations de structure des groupes de transformations que Cartan structure l'exposé de son programme de recherche dans le texte qu'il rédige entre 1921 et 1922 à l'occasion d'une première candidature à l'académie des sciences.

4. — La présentation de ses travaux par lui-même en 1922

La rédaction d'une notice sur ses travaux scientifiques est un exercice obligé pour les candidats à l'Académie des sciences de Paris. Élie Cartan en a rédigé plusieurs, en 1912, en 1922⁷³ et en 1931, l'année de son élection⁷⁴. Il s'agit de présenter l'ensemble de ses travaux scientifiques de manière cohérente en insistant sur les lignes de force de manière à convaincre le lecteur (et la section de l'Académie des sciences) de la fécondité des méthodes et du caractère crucial des résultats du candidat⁷⁵.

Dans sa notice de 1922, Cartan présente ses premiers travaux sur les espaces généralisés en annonçant la parution imminente de son article sur les équations de la gravitation d'Einstein⁷⁶. Compte tenu

73 En mai 1922, Élie Cartan est présenté en deuxième ligne par la section de Géométrie. Il avait déjà été présenté en troisième ligne en 1919 et 1921.

74 [Cartan 1912] et [Cartan 1922g].

75 Une autre fonction, non moins importante est d'aider les rapporteurs

désignés par la section de l'Académie à rédiger leur rapport.

76 Sur cet aspect de son travail, Cartan ne cite dans la bibliographie que son article sur les équations de la gravitation d'Einstein en le présentant comme devant paraître prochainement.

des délais d'impression de la notice et de la procédure de classement des candidats, on peut raisonnablement penser que Cartan a rédigé ce texte de présentation des travaux à la fin de l'année 1921 ou au tout début de l'année 1922. Il présente sa nouvelle théorie des espaces généralisés dans un paragraphe consacré aux « applications à la théorie des invariants intégraux, à la mécanique et à la théorie de la relativité » de ses recherches sur l'équivalence des systèmes différentiels. Cartan insiste pour poser le problème de l'équivalence de deux systèmes différentiels vis-à-vis d'un groupe de transformations comme le fondement commun de la plupart de ses travaux, que ce soit ceux de sa théorie des groupes continus ou ceux concernant la déformation des surfaces. Ce problème, dont Cartan précise qu'il a été résolu en général par Sophus Lie et qu'il aborde « d'un point de vue très différent et en apparence très particulier⁷⁷ » s'énonce :

Étant donnés d'une part un système de n expressions de Pfaff linéairement indépendantes $\omega_1, \dots, \omega_n$ en $x_1, \dots, x_n$ et m fonctions indépendantes $y_1, \dots, y_m$ des x ; d'autre part un système de n expressions de Pfaff linéairement indépendantes $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ en $X_1, \dots, X_n$ et m fonctions indépendantes $Y_1, \dots, Y_m$ des X ; reconnaître s'il existe un changement de variables transformant les $y_1, \dots, y_m$ dans les fonctions $Y_1, \dots, Y_m$, et tel de plus, que par ce changement de variables, $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ se déduisent de $\omega_1, \dots, \omega_n$ par une substitution linéaire appartenant à un groupe linéaire donné Γ , les coefficients des équations finies de ce groupe pouvant dépendre de $y_1, \dots, y_m$. [Cartan 1922g, p. 41-42]

Comme l'objectif de l'article sur les équations d'Einstein consiste à étudier « le système complet des invariants d'une forme différentielle quadratique⁷⁸ », le problème revient à traiter le cas particulier de l'équivalence de deux formes différentielles quadratiques. Cet article est d'abord présenté comme une contribution à la théorie de la relativité. Cartan insiste pour préciser que sa démarche a pour point de départ le fait qu'Einstein « identifie les propriétés géométriques de l'Univers, considéré comme un espace de Riemann, avec ses propriétés physiques⁷⁹ » et qu'il s'agit donc « de donner une interprétation

77 [Cartan 1922g, p. 41].

78 [Cartan 1922g, p. 58].

79 [Cartan 1922g, p. 58].

purement géométrique du tenseur qui caractérise l'état d'un milieu matériel continu⁸⁰ ». Une fois assuré l'ancrage de son travail dans le domaine de la physique théorique, Cartan explique comment il généralise la théorie du repère mobile (géométrie différentielle des espaces euclidiens) aux espaces de Riemann en adjoignant « des termes complémentaires Ω_{ij} , qui sont des éléments d'intégrales doubles⁸¹ » aux formules (2)

$$(1) \quad \omega'_i = \sum_k [\omega_k \omega_{ki}] \quad \text{ou} \quad \int \omega_i = \iint \sum_k [\omega_k \omega_{ki}]$$

$$(2) \quad \omega'_{ij} = \sum_k [\omega_{ik} \omega_{kj}] \quad \text{ou} \quad \int \omega_{ij} = \iint \sum_k [\omega_{ik} \omega_{kj}]$$

que vérifient les composantes de la translation et de la rotation infinitésimales qui permettent de passer d'un système de référence à un système infiniment voisin. Ces termes sont interprétés géométriquement comme « la résultante des rotations qui permettent de passer du système de référence associé à tout point du contour au système de référence associé au point infiniment voisin⁸² » lorsque l'on décrit un contour fermé infiniment petit. Les composantes de cette rotation infinitésimale qui sont nuls dans le cas de l'espace euclidien (espace plat) définissent dans le cas général la courbure de Riemann.

Son travail résumé, Cartan évoque les pistes de généralisation. Il envisage la possibilité de modifier aussi les formules (1) en introduisant la torsion :

La rotation instantanée du système de référence mobile définie par la condition de maintenir la validité des formules (1), coïncide naturellement avec celle qui résulte de la théorie du parallélisme de Levi-Civita. Mais rien n'empêche théoriquement de la définir autrement et même suivant une loi arbitraire : cela reviendrait à modifier les formules (1) sous la forme plus générale

$$\omega'_i = \sum_k [\omega_k \omega_{ki}] + \Omega_i$$

où les Ω_i sont des éléments d'intégrales doubles ; ces quantités définissent une translation instantanée attachée à tout contour

80 [Cartan 1922g, p. 59].

81 [Cartan 1922g, p. 60].

82 [Cartan 1922g, p. 60].

fermé infiniment petit. On arrive ainsi à la notion d'une variété ayant le même ds^2 que précédemment, mais munie d'une courbure nouvelle qu'on pourrait appeler courbure de translation, ou mieux, torsion par opposition à la courbure ordinaire des espaces de Riemann. [Cartan 1922g, p. 61]

De la même manière qu'il avait tenu à préciser que sa théorie des espaces courbes s'inscrivait aussi dans le cadre général de la physique théorique einsteinienne, Cartan donne quelques indications pour interpréter physiquement les espaces à torsion :

[...] les espaces à trois dimensions doués de torsion fournissent une image géométrique d'un milieu matériel en équilibre pour lequel les forces élastiques se manifesteraient sur chaque élément de surface par une force et un couple. [Cartan 1922g, p. 62]

L'autre piste de généralisation reprend un mode plus mathématique puisqu'inhérent à la théorie d'équivalence des systèmes de Pfaff. En effet, Cartan envisage les problèmes d'équivalence en considérant le groupe de référence en toute généralité⁸³. Lorsqu'il applique sa méthode à la question des déformations des surfaces ou des hypersurfaces, il traite le problème dans des espaces projectifs, euclidiens, non-euclidiens ou conformes. Dans la même veine, il évoque une généralisation de la théorie des espaces à torsion « en considérant un espace qui serait non pas euclidien, mais conforme, affine ou projectif au voisinage de chaque point⁸⁴ ». Il ajoute que comme dans le cas euclidien, la structure des espaces généralisés est définie par les équations de structure du groupe original modifiées à l'aide de termes qui « manifestent les divergences qui se produisent, quand on parcourt un contour fermé infiniment petit, entre les propriétés de l'espace considéré et celles d'un espace qui serait rigoureusement, et dans toute son étendue, conforme, affine, projectif, etc.⁸⁵ ». Cartan cite deux exemples de telles généralisations qui ont aussi trait à des questions de physique théorique et qui donneront lieu quelques mois plus tard à des notes dans les *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences* ; il évoque les espaces généralisés de H. Weyl construits à partir du groupe des similitudes et pour lesquels apparaissent une

83 Cartan précise même que l'on peut envisager des problèmes d'équivalence plus généraux, comme par exemple, celui de l'équivalence de « deux systèmes d'équations différentielles ordinaires dont la solution

générale dépend de fonctions arbitraires d'un argument » [Cartan 1922g, p. 43].

84 [Cartan 1922g, p. 62].

85 [Cartan 1922g, p. 62].

courbure de rotation (courbure de Riemann) et une courbure d'homothétie qui fournit une représentation géométrique du champ électromagnétique. Il présente les espaces généralisés construits à partir de l'espace conforme comme résultant de l'annulation d'« une forme quadratique de différentielles » :

C'est en somme dans un espace à quatre dimensions de cette nature que, dans la théorie de la relativité généralisée, se fait la propagation de la lumière. [Cartan 1922g, p. 62]

Au moment de la rédaction de sa notice de 1922, Cartan a déjà défini son programme de recherche sur les espaces généralisés. Ce travail de conception et d'organisation s'est effectué au cours du second semestre 1921. En effet, comme signalé dans l'introduction, seuls les débuts de ce programme sont évoqués dans le complément à sa notice de 1912 rédigé en avril 1921⁸⁶.

Comme il n'a pas encore publié de mémoires⁸⁷ sur ce sujet, la théorie des espaces généralisés n'apparaît dans la notice de 1922 que comme une application à la physique théorique mais les indications que donne Cartan sur les pistes ouvertes par sa théorie laissent entrevoir la fécondité du sujet. Émile Borel ne s'y trompe pas dans son rapport sur la candidature de Cartan à l'Académie des sciences. Après avoir évoqué le résultat concernant les invariants d'une forme différentielle quadratique à quatre variables, il souligne la nouveauté du point de vue de Cartan :

La méthode géométrique suivie par M. Cartan l'a mis sur la voie d'une généralisation qui avait échappé aux nombreux mathématiciens qui s'étaient occupés de ces questions du point de vue purement analytique. Il arrive ainsi à attacher à un même espace une courbure nouvelle à laquelle il donne le nom de constante de translation, ou de torsion par opposition à la courbure ordinaire des espaces de Riemann. [...] Ces notions sont étendues par M. Cartan à l'espace conforme et l'ont conduit à des considérations fort intéressantes, qu'il n'a pas encore complètement développées et dont le rôle en Physique mathématique paraît devoir être

⁸⁶ [Cartan 1921].

⁸⁷ Dans la bibliographie de sa notice de 1912 et dans celle du complément de 1921, Cartan cite ses notes aux Comptes rendus. Dans la notice de 1922, il ne se réfère qu'aux mémoires.

important. [É. Borel, rapport complémentaire sur les travaux d'Élie Cartan, mai 1922]⁸⁸

5. — Conclusion

Entre 1916 et 1920, avec ses travaux sur la déformation des surfaces, Cartan s'était convaincu de la pertinence d'utiliser les techniques de systèmes différentiels dans le domaine de la géométrie différentielle. La période de la réception de la théorie générale lui permet de poursuivre dans cette direction en donnant du « tenseur[-matière] une définition qui, tout en ayant toute la précision voulue, pût s'exprimer en langage purement géométrique⁸⁹ ». Tout en justifiant l'intérêt de ses travaux en les situant à l'interface entre géométrie et physique, Cartan se démarque des travaux de physique théorique en revendiquant avec insistance la rigueur de ses méthodes et en expliquant que son point de vue conduit à « une conception géométrique nouvelle des espaces non euclidiens », ce qui l'amène à définir très tôt un programme de travail autour de sa théorie des espaces généralisés.

Les différentes précisions chronologiques contenues dans les articles de Cartan et l'annexe manuscrite à la présentation de ces travaux rédigée en avril 1921 montrent 1) que Cartan avait démontré dès avril 1921 la plupart des résultats contenus dans le mémoire sur les équations d'Einstein et obtenu ainsi une première théorie des espaces riemanniens et lorentziens⁹⁰, 2) qu'il a élaboré au cours du second semestre 1921 le programme de recherche sur les espaces généralisés en envisageant d'une part la notion de torsion⁹¹ et d'autre part une généralisation de ses méthodes aux espaces affines, conformes et projectifs⁹².

En 1922, Cartan justifie son programme en montrant qu'il fournit un cadre adéquat pour géométriser plusieurs problèmes de physique théorique, en insistant particulièrement sur le cas de la relativité générale. Il ne poursuivra pas dans cette intention et présentera à partir de 1924 son programme de recherche sur les espaces généralisés comme

88 Académie des sciences, dossier personnel d'Élie Cartan.

89 [Cartan 1922 b, p. 437].

90 Ces résultats sont décrits dans la note aux Comptes rendus publiée le 13 février 1922 [Cartan 1922 b]. On peut rappeler aussi que Cartan cite son article sur les

équations d'Einstein dans son annexe à sa notice rédigée en avril 1921 [Cartan 1921].

91 Cette généralisation est annoncée dans la note aux Comptes rendus publiée le 27 février 1922 [Cartan 1922c].

92 Les espaces affines déformés sont évoqués dans la note aux Comptes ren-

dus parues le 13 mars 1922 [Cartan 1922d], les espaces conformes déformés dans la note parue le 27 mars [Cartan 1922e] et le programme de généralisation des résultats obtenus dans le cadre riemannien est annoncé dans notice rédigée fin 1921-début 1922.

relevant essentiellement de la géométrie différentielle⁹³. En 1922, Cartan a parfaitement conscience du potentiel du point de vue qu'il a explicitement développé dans son article sur les équations d'Einstein⁹⁴ et ne se prive pas d'évoquer dans les notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, ainsi que dans la présentation de ses travaux, les diverses généralisations qu'il envisage, laissant en même temps apparaître une tension entre l'imaginaire de la géométrie infinitésimale à la Darboux (théorie du repère mobile) et son approche technique par les groupes de transformations.

Texte original des citations :

i Roughly speaking, a generalized space (espace généralisé) in the sense of Cartan is a space of tangent spaces such that two infinitely near tangent spaces are related by an infinitesimal transformation of a given Lie group. Such a structure is known as a connection [Chern & Chevalley 1952, p. 221].

⁹³ Voir [Nabonnand 2009].

⁹⁴ [Cartan 1922 a]

Bibliographie

Bourguignon Jean Pierre

- [1992] Transport parallèle et connexions en géométrie et en physique, *in* Luciano Boi, Dominique Flament & Jean-Michel Salanskis (éds.), *1830-1930: A Century of Geometry : Epistemology, History, and Mathematics*, Berlin-Heidelberg-New York : Springer Verlag, 1992, p. 150-164.

Brocato Maurizio & Chatzis Konstantinos

- [2009] Les frères Cosserat, brève introduction à leur vie et à leurs travaux en mécanique, préface à la 2e édition de [Cosserat 1908b].

Cartan Élie

- [1904] Sur la structure des groupes infinis de transformations, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, (3) 21 (1904), p. 153-206.
- [1905] Sur la structure des groupes infinis de transformations (suite), *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, (3) 22 (1905), p. 219-308.
- [1908] Les sous-groupes des groupes continus de transformations, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, (3) 25 (1908), p. 57-194.
- [1909] Les groupes de transformations continus, infinis, simples, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, (3) 26 (1909), p. 93-161.
- [1910] La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile, *Bulletin des sciences mathématiques*, 34 (1910), p. 250-284 ; OC III 1, p. 145-178.
- [1912] *Notice sur les travaux scientifiques de M. Élie Cartan* (1912), dossier personnel d'Élie Cartan.
- [1916] La déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien réel à n dimensions, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 44 (1916), p. 65-99 ; OC III 1, p. 185-219.
- [1917] La déformation des hypersurfaces dans l'espace conforme réel à dimensions, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 45 (1917), p. 57-121 ; OC III 1, p. 221-285.
- [1919] Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 47 (1919), p. 125-160 ; OC III 1, p. 321-356.
- [1920a] Sur la déformation projective des surfaces, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, (3) 37 (1920), p. 259-356 ; OC III 1, p. 441-538.
- [1920b] Sur le problème général de la déformation, *Comptes rendus du congrès des mathématiciens de Strasbourg*, 1920, p. 397-406 ; OC III 1, p. 539-548.
- [1920c] Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 48 (1920), p. 132-208 ; OC III 1, p. 357-432.
- [1921] *Notice sur les travaux scientifiques de M. Élie Cartan* (1912), avec un complément manuscrit daté d'avril 1921, Archives de l'Académie des sciences de Paris, dossier personnel d'Élie Cartan.

- [1922a] Sur les équations de la gravitation d'Einstein, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1 (1922), p. 141-203 ; OC III 1, p. 549-611.
- [1922b] Sur une définition géométrique du tenseur d'énergie d'Einstein, *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences*, 174 (1922), p. 437-439 ; OC III 1, p. 613-615..
- [1922c] Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion, *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences*, 174 (1922), p. 593-595 ; OC III 1, p. 616-618.
- [1922d] Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité, *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences*, 174 (1922), p. 734-736 ; OC III 1, p. 619-621.
- [1922e] Sur les espaces conformes généralisés et l'Univers optique, *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences*, 174 (1922), p. 857-859 ; OC III 1, p. 622-624.
- [1922f] Sur les équations de structure des espaces généralisés et l'expression analytique du tenseur d'Einstein, *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences*, 174 (1922), p. 1104-1106 ; O.C. III-1, p. 625-627..
- [1922g] Exposé de ses travaux (1922), Archives de l'Académie des sciences de Paris, dossier personnel d'Élie Cartan.
- [1922h] Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl dans la théorie de l'espace métrique, *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences*, 174 (1922), p. 82-85 ; OC III-1, 629-632.
- [1923a] Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie), *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, (3) 40 (1923), p. 325-412 et (3) 41 (1924), p. 1-25 ; OC III 1, p. 659-746 & p. 799-823.
- [1923b] Les espaces à connexion conforme, *Annales de la Société polonaise de mathématiques*, 2 (1923), p. 171-221 ; OC III 1, p. 747-799.
- [1923c] Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2 (1923), p. 167-192 ; OC III-1, p. 633-658.
- [1924a] Sur les variétés à connexion projective, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 52 (1924), p. 205-241 ; OC III 1, p. 825-861.
- [1924b] Les récentes généralisations de la notion d'espace, *Bulletin des sciences mathématiques*, 48 (1924), p. 294-320.
- [1925a] Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie), *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, (3) 42 (1925), p. 17-88.
- [1925b] La géométrie des espaces de Riemann, *Mémorial des sciences mathématiques*, 9 (1925), p. 1-61.

Henri Cartan

- [1933-1939] Les systèmes de Pfaff, exposé 4-B du séminaire de mathématiques, in Michèle Audin (éd.), *Le séminaire de mathématique 1933-1939*, <http://books.cedram.org/MALSM/>.

Chern Shiing-Shen & Chevalley Claude

- [1952] Élie Cartan and his mathematical work, *Bulletin of the American Society*, 58 (1952), p. 217-250.

- Chorlay Renaud
[2007] *L'émergence du couple local/global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux (1851-1953)*, Thèse, Université Paris 7, 2007.
- [2009] Passer au global : le cas d'Élie Cartan, 1922–1930, *Revue d'histoire des mathématiques*, 15 (2009), 231-316.
- Cogliati Alberto
[2012] *Continuous groups of transformations. Elie Cartan's structural approach*, thèse de l'université de Milan, 2012.
- Cosserat Eugène & Cosserat François
[1896] Sur la théorie de l'élasticité, Premier mémoire, *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, (1) 10 (3-4) (1896), p. 11-1116.
- [1908] *Théorie des corps déformables*, Paris : Hermann, 1908 ; 2^e édition (avec une préface de M. Brocato et K. Chatzis [Brocato et Chatzis 2009]), Paris : Hermann, 2008.
- [1909] Note sur la théorie de l'action euclidienne, in Paul Appell, *Traité de mécanique rationnelle*, t. III : Équilibre et mouvement des milieux continus, Paris, Gauthier-Villars, 1909 (2e édition), p. 557-629.
- Coxeter Harold Scott MacDonald
[1961] *Introduction to Geometry*, New York-London-Sydney-Toronto : John Wiley & Sons, 1961 ; cité d'après la 2^e éd., 1969.
- Darboux Gaston
[1887] *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, 1ère partie, Paris : Gauthier, 1887.
- Hehl Friedrich W. & Obukhov Yuri N.
[2007] Torsion in geometry and in field theory, <http://arxiv.org/abs/0711.1535>.
- Kiehn R. M.
[1999] The many faces of torsion, <http://www2.pair.com/csdn/pdf/manyface.pdf>.
- Levi-Civita Tullio
[1917] Nozione di parallelismo in una varietà qualunque et conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 42 (1917), p. 173-204.
- Nabonnand Philippe
[2009] La notion d'holonomie chez Élie Cartan, *Revue d'histoire des sciences*, 62-1 (2009), p. 221-245.