

LES THÉORIES DE JAUGE POUR LE PHYSICIEN LAMBDA.

1. QU'EST-CE QU'UNE THÉORIE PHYSIQUE (CLASSIQUE) ?

DEGRÉS DE LIBERTÉ DISCRETS

On décrit un système par une ou plusieurs variables dynamiques (ou degrés de liberté)

par ex. la position x d'une particule.

On attribue à la particule des propriétés
(masse, charge, spin ...).

On cherche une équation qui gouverne la
dynamique c'est-à-dire les solutions donnent
l'évolution de x au cours du temps en fonction
de l'état antérieur et des contraintes
exercées sur la particule: c'est l'équation
du mouvement.

Programme compliqué qu'on aborde donc

par le cas le plus simple : la particule libre,
càd sans contrainte.

Principe d'inertie : $\vec{v} = \text{const.}$

$$\boxed{\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = 0}$$

donne la bonne solution :

$$\vec{v} = \text{const}$$

$$\vec{x} = \text{const} \times t.$$

Si en revanche ce n'est pas le cas ($\vec{v} \neq \text{const}$)
c'est qu'il y a une contrainte qu'on appelle la
force que l'on définit comme l'écart à l'inertie :

$$\boxed{\frac{\vec{F}}{m} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}}.$$

Ensuite on observe la nature et on détermine
dans diverses situations, la forme de $\vec{F}$ pour
que cette équ. du mouvement donne bien la
dynamique $\vec{x}(t)$ observée. Par exemple une
ellipse/hyperbole si $\vec{F}$ est une force centrale
 $\vec{F} \sim -\frac{\vec{x}}{x^3}$ etc.

Un certain nombre d'interactions à distance ont été
observées (gravitation, électricité, etc...) et
progressivement le concept de champ s'est imposé :

Dans le cas de la gravitation

$\vec{F}_{\text{grav.}}$ proportionnel à une caractéristique de la particule elle-même proportionnelle à la masse m .

On l'appelle la masse gravitationnelle et à défaut d'avoir une explication on pose

$m_{\text{grav}} = m$ (principe d'équivalence

cf Newton, Bessel, Eötvös, Dicke, Braginski etc ... (Nade)).

On peut donc poser

$$\frac{\vec{F}_{\text{grav.}}}{m_{\text{grav}}} = \vec{G}$$

et l'équation du mouvement devient

$$\boxed{\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{G}}$$

on appelle $\vec{G}$ le champ de gravitation, il est créé par des sources non spécifiées (autres que la particule test) et la dynamique d'une particule dans un champ de gravitation est indpt de sa masse, un fait conforme à l'expérience.

L'interaction à distance est maintenant conçue comme une interaction locale.

Le même concept de champ peut être élaboré pour la force électrique dès lors que l'on constate expérimentalement que

$\vec{F}_{el}$ proportionnelle à une caractéristique de la particule appelé la charge e qui est sans relation avec la masse.

On pose $\frac{\vec{F}_{el}}{e} = \vec{E}$ champ électrique

la dynamique est gouvernée par

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = e \vec{E}$$

elle dépend du rapport $\frac{e}{m}$. Malgré tout, le concept de champ reste pertinent pour traiter l'interaction à distance.

CHAPPS

Il reste la question de la dynamique du champ lui-même. On a vu qu'il est dû à des sources non explicités dans cette formulation, mais le champ lui-même obéit à une certaine dynamique donc à certaines équations du mouvement.

Par exemple, la gravitation newtonienne donne le champ $\vec{G}(\vec{x})$ en fonction de la distribution de masse $\rho(\vec{x})$

$$\text{div } \vec{G} = -4\pi G_N \rho(\vec{x})$$

$$G(\vec{x}) = -G_N \int d^3x' \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \rho(\vec{x}')$$

l'électromagnétisme obéit aux eqns de Maxwell:

$$\text{div } \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}, t)$$

sources

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}(\vec{x}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x}, t)$$

↑

sources.

avec

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

conforme à l'expérience.

Pour satisfaire les eqns sans sources on définit

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad \text{car} \quad \text{div } \text{rot } \vec{A} = 0$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \partial_t \vec{A} \quad \text{car} \quad \text{rot } \vec{\nabla} \phi = 0,$$

ϕ et $\vec{A}$ sont appelés potentiels. Ils obéissent aussi à

des éqs du mouvement et a une dynamique gouvernée par des éqs de mouvement avec sources. Néanmoins ils ont une propriété particulière qui réside dans une certaine liberté à les définir :

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \partial_t \alpha$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \alpha$$

définit les mêmes $\vec{E}' = \vec{E}$ et $\vec{B}' = \vec{B}$ donc la même dynamique pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Choisir α à ce niveau c'est choisir une jauge.

MECANIQUE QUANTIQUE

Nous avons évoqué la dynamique de degrés de liberté discrets, celle de champs avec la gravitation newtonienne ou l'électromagnétisme. On peut étendre le schéma à la MQ .

Ainsi les variables dynamiques sont des fonctions d'onde (champ scalaire complexe)

$$\psi(\vec{x}, t) \text{ avec } \int d^3x |\psi(\vec{x}, t)|^2 < +\infty$$

et la dynamique est gouvernée par une équation de mouvement de la forme

$$i\hbar \partial_t \psi(\vec{x}, t) = H \psi$$

↑
hamiltonien pour x

per ex
 $e\phi$

$$H = \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla})^2 + V(\vec{x})$$

Il existe des systèmes plus compliqués pour lesquels un champ scalaire complexe ne suffit pas et la description nécessite de travailler avec plusieurs champs scalaires complexes qu'on regroupe en colonnes et qu'on appelle spinors (Pauli, Dirac), par ex

$$i\hbar \partial_t \Psi(\vec{x}, t) = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t)$$

↓
matrices

$$\text{ex } \hat{H} = c \vec{\alpha} \cdot (-i\hbar \vec{\nabla}) + \beta mc^2$$

Voilà ce qu'on peut appeler des exemples de théories physiques.

2. THÉORIES DE JANGE. LE CAS DE L'ELECTROMAGNETISME

CONTEXTE

les théories de jauge pour le physicien, dans le contexte de ce qui vient d'être dit sont des théories qui permettent une formulation élégante et féconde pour trouver comment, à partir de la dynamique d'une particule libre, on peut trouver assez simplement la forme des termes d'interaction avec les champs dus à des sources, comment écrire la dynamique

à la fois les variables décrivant les particules et les champs.

La méthode s'est avérée élégante pour la reconstruction d'une théorie connue, l'électro-
magnétisme ($U(1)$) et elle a ensuite permis
d'inventer de nouvelles interactions ($U(1)$,
 $SU(2)$, puis $SU(3)$). La puissance de cette
formulation réside en grande partie dans le
fait qu'elle se prête à une formulation lagran-
gienne, donc au moyen d'une action. La
simplicité de formulation est liée au fait
que l'action est scalaire et les prescriptions
imposées (action scalaire de Lorentz, ou
une invariante de jauge) limitent
évidemment les formes possibles.

Ultérieurement, dans un contexte quantique,
t'Hooft a montré que les théories de jauge
sont renormalisables, ce qui en fait des
candidates idéales pour décrire les interactions
fondamentales.

De nos jours, lorsque l'on tente de construire des
théories nouvelles pour expliquer les formes

nouvelles de matière, énergie et leurs interactions, au centre des constructions sur le même modèle.

KLEIN - GORDON

les théories du XIX^e et XX^e ont évolué vers des formulations, en termes de théorie des champs. Il s'agit du contexte adapté à l'émergence des théories de jauge. On peut mentionner Maxwell, Schrödinger, Dirac, ou encore la QFT. Si on se permet de choisir le cas le plus simple d'une théorie des champs relativiste ("classique") avec Klein-Gordon.

Notations $\hbar = c = 1$.

$$x^\mu = (t, x, y, z)$$

$$ds^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$p^\mu = (E, \vec{p}), \quad p_\mu = \eta_{\mu\nu} p^\nu = (E, -\vec{p})$$

$$p_\mu p^\mu = E^2 - |\vec{p}|^2 = \text{const} = m^2 \quad \text{particule libre.}$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = (\partial_t, \vec{\nabla})$$

On cherche $S[\varphi, \varphi^*] = \int d^4x \mathcal{L}_0$ φ scalaire complexe.

- invariant de Lorentz
- quadratique en φ et $\partial\varphi$ pour obtenir une éq. du mouvement linéaire:

$$S = \int d^4x \left(\partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi \right)$$

signe
choisi pour
avoir une
énergie
positive

$$\left. \begin{aligned} [c] &= \frac{L}{T} = 1 \\ [h] &= \hbar L^2 T^{-1} = 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} L &= T \\ &= M^{-1} \end{aligned}$$

de la coeff vaut m^2
une masse au carré

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi^*} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \varphi^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$-m^2 \varphi \qquad \qquad \qquad \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi$$

donc $\boxed{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi = 0}$

$\underline{Rq}$: $p_\mu \rightarrow i\partial_\mu$ alors $(-p_\mu p^\mu + m^2) \varphi = 0$

$$\boxed{E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2}$$

particule libre avec $\hbar$
bon signe.

SYNTHÈSE U(1)

Le théorème de Noether a permis d'obtenir des lois de conservation à partir des symétries spatio-temporelles.

On envisage maintenant une symétrie interne

$$\boxed{\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x)} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha = \text{const}$

Car on sait en MQ que l'état d'un système physique est représenté par un "rayon" c-à-d un vecteur à la multiplication par un nb complexe de module 1 (ici normé) près.

Autrement dit, les résultats physiques (ex. éléments de matrice) sont inchangés si les vecteurs d'état sont multipliés par un facteur de phase global.

Cette symétrie laisse le lagrangien inchangé donc

$$\delta \mathcal{L}_0 = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \psi^*}}_{\alpha} \delta \psi^* + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu \psi^*)}}_{\downarrow} \delta (\partial_\mu \psi^*) + \psi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi = 0$$

infinitésimal

$$-i\alpha \psi^*$$

$$-i\alpha \partial_\mu \psi^*$$

$$0 = -i\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \psi^*} \psi^* + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \partial_\mu \psi^* + \psi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi \right)$$

$$-ie\alpha \partial_\mu \left[\underbrace{\varphi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \varphi^*}_{j^\mu} \right] = 0$$

ex KG $j^\mu = \varphi^* \partial^\mu \varphi - (\partial^\mu \varphi^*) \varphi$ (ou $\times e$)
 $\uparrow$
charge.

SYNTHÈSE $U(1)$ LOCALE

Ce qui assure l'invariance de la théorie par changement de phase global c'est que φ et sa dérivée obéissent à la même transformation

$$\varphi \rightarrow G\varphi \quad \partial_\mu \varphi \rightarrow G\partial_\mu \varphi$$

qui garantit que les combinaisons

$$\varphi^* \varphi \rightarrow \varphi^* G^{-1} G \varphi \quad \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi \rightarrow \partial_\mu \varphi^* G^{-1} G \partial^\mu \varphi$$

sont invariantes de jauge.

On peut ensuite s'interroger sur la possibilité d'une symétrie de transformation de jauge locale

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = e^{ie\alpha(x)} \varphi(x) = G(x) \varphi(x)$$

mais cette fois

$$\partial_\mu \varphi(x) \rightarrow \partial_\mu (G(x) \varphi(x)) = (\partial_\mu G) \varphi + G \partial_\mu \varphi \neq G \partial_\mu \varphi$$

ce qui compromet l'invariance du lagrangien.
 Pour restaurer cette propriété on introduit une
 dérivée covariante à laquelle on demande

$$\partial_\mu \psi \rightarrow G(x) \partial_\mu \psi$$

Pour cela on introduit un champ A_μ

$$\partial_\mu = \partial_\mu + ie A_\mu$$

de la propriété demandée sera assurée si A_μ a
 les bonnes propriétés :

$$\begin{aligned} \partial'_\mu \psi' &= (\partial_\mu + ie A'_\mu) G \psi \\ &= (\partial_\mu G) \psi + G \partial_\mu \psi + ie A'_\mu G \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } G \partial_\mu \psi &= G (\partial_\mu + ie A_\mu) \psi \\ &= G \partial_\mu \psi + ie G A_\mu \psi \end{aligned}$$

$$ie A'_\mu G = ie G A_\mu - \partial_\mu G$$

$$A'_\mu = G A_\mu G^{-1} - \frac{1}{ie} (\partial_\mu G) G^{-1}$$

Rq: ces relations sont connues :

si on pose $A_\mu = (\phi, -\vec{A})$ on obtient

$$\phi' = \phi + \partial_t \alpha(x, t)$$

$$\vec{A} = \vec{A} - \vec{\nabla} \alpha(x, t)$$

où en reconnaissant les transformations le jauge les
potentiels électromagnétiques dont dérivent les
champs $\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \phi$ $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Que faire maintenant de cette dérivée ∂_μ ?
On a vu que L_0 n'est pas invariant par la
symétrie locale $G(x)$. Peut-on construire un
lagrangien qui le soit?

Ainsi: $\varphi, \partial\varphi$ dans $L_0 \rightarrow \varphi, \mathcal{D}\varphi$ qui définit
 $L = L_0 + \text{termes}$

$$L = (\partial_\mu \varphi)^* (\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi$$

et par construction invariant sous $G(x)$ et
valable

$$L = (\partial_\mu - ieA_\mu) \varphi^* (\partial^\mu + ieA^\mu) \varphi - m^2 \varphi^* \varphi$$

$$= L_0 - ieA_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi + ieA^\mu (\partial_\mu \varphi^*) \varphi + e^2 A_\mu A^\mu \varphi^* \varphi$$

particule
libre

interaction
particule - champ de jauge

Mais maintenant que nous avons introduit
un champ de jauge il faut aussi construire

Le lagrangien du champ de jauge libre.

$$\mathcal{L}_A \sim \frac{1}{2} (\partial A)^2 - \frac{1}{2} m_A^2 A^2$$

$\nearrow$ réel
 $\uparrow$ énergie cinétique du champ libre
 $\nwarrow$ terme de masse des df de jauge.

La prescription d'invariance de jauge impose $m_A = 0$ et d'utiliser la courbure $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \alpha - \partial_\nu \partial_\mu \alpha = F_{\mu\nu}$. On forme donc

$$\underline{\text{Rq:}} \quad F_{\mu\nu} = \frac{1}{ic} [D_\mu, D_\nu]$$

$$\mathcal{L}_A = a \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A_\mu} = 0$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 2a \partial_\mu (2 \bar{F}^{\mu\nu}) = 4a \partial_\mu \bar{F}^{\mu\nu}$$

$$\underline{\text{Rq:}} \text{ avec } m_A : \quad \partial_\mu \bar{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4a} m_A^2 A^\nu \quad (\text{Proca}).$$

on fixe les unités par $a = -\frac{1}{4}$ et en l'absence de sources on doit avoir

$$\boxed{\partial_\mu \bar{F}^{\mu\nu} = 0 \quad \text{donc } m_A = 0}$$

et $\boxed{\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu}}$ $\underline{\text{Rq:}} \text{ Schwarzschild}$

$\mathcal{L}$ le lagrangien qui est invariant par changement de jauge local est donc

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = (\partial_\mu \varphi)^* (\partial^\mu \varphi) - m \varphi^* \varphi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

les équations du mouvement annoncées sont pour le champ de matière

$$\frac{\delta}{\delta \varphi^*} \int \mathcal{L}_{\text{tot}} d^4x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{tot}}}{\partial \varphi^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{tot}}}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)} = 0 \quad \text{KG sans champ}$$

et pour le champ de jauge

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu} \int \mathcal{L}_{\text{tot}} d^4x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{tot}}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{tot}}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 0$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{tot}}}{\partial A_\nu} \equiv J^\nu \quad \text{Maxwell (Weyl)}$$

avec $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ car $F^{\mu\nu}$ antisymétrique

$$\text{donc } \partial_\nu J^\nu = 0$$

J^ν est bien le courant conservé de $\mathcal{L}$ par la transformation globale: $J^\nu = j^\nu + \text{termes supplém.}$

KG sans champ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{br}}}{\partial \psi^*} = -m^2 \psi - ie A_\mu \partial^\mu \psi + e^2 A_\mu A^\mu \psi$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{br}}}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} = \partial_\mu \partial^\mu \psi + ie A^\mu \partial_\mu \psi + ie (\partial_\mu A^\mu) \psi$$

$$\text{d'où } \boxed{\partial_\mu \partial^\mu \psi + m^2 \psi + \underbrace{2ie A_\mu \partial^\mu \psi - e^2 A_\mu A^\mu \psi}_{\text{termes d'interaction}} = 0}$$

termes d'interaction

particule (ψ)-champ (A_μ)

On est bien parti de la particule libre et la prescription donnée par la formulation de jauge engendre automatiquement les termes d'interaction et les équations du champ. C'est donc une méthode très féconde qui a permis généralisation dès lors que l'on cherche des variables dynamiques plus riches que de simples champs scalaires complexes, d'où $SU(2)$ et $SU(3)$ en particulier.

Higgs

Bien que le mécanisme ait été introduit pour la même raison, on peut en donner une idée ici.

Le problème est le suivant : on a un quelconque de jauge avec une masse nulle pour le champ de jauge A_μ . Supposons toutefois que A_μ soit couplé à un certain champ de matière de spin unitaire (donc ψ scalaire complexe) et tel que au-dessus d'une certaine température ce champ acquiert une valeur moyenne non nulle ψ_0 . (celle-ci n'est nulle au-dessous de cette température) alors le lagrangien devient

$$\mathcal{L} = -m^2 |\psi_0|^2 + \underbrace{e^2 |\psi_0|^2 A_\mu A^\mu}_{\frac{1}{2} m_A^2} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

alors le champ de jauge devient massif et la symétrie de jauge est dite spontanément brisée.

Rémarques sur (2)

Si on imagine une forme de matière plus complexe, décrite par exemple par un "spinor à 2 composantes scalaires complexes"

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

on pourra imaginer des symétries plus élaborées.
 À côté des changements de phase "scalaire" $U(1)$
 on peut envisager d'opérer sur ψ avec des
 matrices 2×2

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{ig Z^a \alpha^a} \psi(x)$$

$$Z^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Z^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad Z^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{su}(2).$$

La même construction fonctionne. Si $\alpha^a = \alpha^a(x)$
 est local alors on imagine un dérivée
 covariante

$$D_\mu = \partial_\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + ig \underset{\substack{\uparrow \\ (2 \times 2)}}{A_\mu}$$

donc on ne se contente
 abéliser.

Il en résulte des équations du mouvement
 non linéaires qui remplacent les équations de
 Maxwell, un champ de jauge qui possède
 la charge qui le véhicule (pas comme le
 photon qui n'a pas de charge électrique)

de cela découlait ce qu'on appelle les courants faibles (développés en 1979 au LEP) et l'interaction faible.

Point faible à priori de ces théories de jauge: l'invariance de jauge exige que la masse des particules dérive du champ de jauge (les bosons de jauge) soit nulle ce qui n'est pas nécessairement le cas dans la nature, d'où les mécanismes tels que celui de Higgs.

Autre point faible: aucune contrainte sur le fermions.