

Mathématiques Discrètes – TUTORATS

J.F. Pétrin, N. Brinzei

Tutorat n°1 : Algèbre de Boole

Formes normales de Lagrange

Exercice 1

Soient les fonctions de F3 suivantes :

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_3$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3)(x_2 + x_3).$$

1) Montrer que $f = g$ en complétant la table de vérité suivante :

x_1	x_2	x_3	x_1x_2	$x_1x_2 + x_3$	$x_1 + x_3$	$x_2 + x_3$	$(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

$$S_3(f) =$$

$$(0,0,1), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)$$

$$\overline{S_3(f)}$$

$$(\emptyset, \emptyset, \emptyset), (0,1,0), (1,0,0)$$

2) Déterminer le support $S_3(f)$ et en déduire la première forme normale de Lagrange de f

3) Déterminer $\overline{S_3(f)}$ et en déduire la deuxième forme normale de Lagrange de f .

Exercice 2

Soit la fonction f définie par la table de vérité suivante :

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\bigwedge_{x_1, x_2, x_3} \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} + \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3} + x_1 x_2 x_3$$

$$x_1, x_2, x_3 \in S_3(f)$$

$$x^E = x \text{ si } E=1$$

$$\overline{x} \text{ si } E=0$$

1) Déterminer le support $S_3(f)$ et en déduire la première forme normale de Lagrange de f (somme de mintermes).

2) Déterminer la deuxième forme normale de Lagrange de f (produit de maxtermes)

Simplifications algébriques

Simplifier de manière algébrique la fonction suivante :

$$f(w, x, y, z) = ((\overline{w} + y) + x \cdot y) \cdot (w \cdot \overline{x} + (y + \overline{w})) \cdot \overline{x}$$

Monômes maximaux

Soit f la fonction booléenne suivante :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1\overline{x_3} + \overline{x_1}x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4$$

1) Représenter le support de f dans le diagramme de Karnaugh ci-contre

$$\overline{x_4}$$

$$x_3$$

$$x_1x_2$$

	x_1	$\overline{x_1}$		
x_2	1	1	1	1
	1	1	1	1
$\overline{x_2}$	1	1	1	1
	1	1	1	1
	$\overline{x_3}$	x_3	$\overline{x_3}$	
	$\overline{x_4}$			$\overline{x_4}$
				x_4
				$\overline{x_4}$

Pos max $\leq C$ groupe + grand

x_4x_3 $x_3 \leq f$? on en déduit pour tous les ces avec x_3

B_0

0	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0

 G_1
 G_0

B_1

0	0	1	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0

G_1
 G_0

G_3 G_2

Hand-drawn diagram of a 2D array structure. The array is represented as a 4x4 grid. The grid is labeled B_2 on the left and G_1 , G_0 on the right. The grid contains the following values:

0	0	0	0
1	1	1	1
0	0	0	0
1	1	1	1

The grid is labeled G_3 G_2 on the bottom left.

B3

0	0	0	0
0	0	0	0
1	1	1	1
1	1	1	1

G1
G0

G3 G2

$$B_2 = G_2 \overline{G_3} + \overline{G_2} G_3 = G_2 \oplus G_3 \quad (= G_2 \oplus B_3) \quad (*)$$

$$B_0 = G_0 \overline{G_1} \overline{G_2} \overline{G_3} + \overline{G_0} G_1 G_2 \overline{G_3} + G_0 G_1 G_2 \overline{G_3} + \overline{G_0} \overline{G_1} G_2 \overline{G_3} \\ + G_0 \overline{G_1} G_2 G_3 + \overline{G_0} G_1 G_2 G_3 + G_0 G_1 \overline{G_2} G_3 + \overline{G_0} \overline{G_1} \overline{G_2} G_3$$

$$\textcircled{*} \quad x \oplus y = x \cdot \overline{y} + \overline{x} y$$

5

$$B_1 = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$$
$$= G_1 \oplus B_2$$

$$B_0 = G_1 \oplus G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \\ = G_0 \oplus B_1$$

$$x \oplus y \oplus z = (x \oplus y) \oplus z$$

$$= (x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y) \oplus z$$

$$= (x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y) \cdot \bar{z} + \overline{(x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y)} \cdot z$$

$$= x \cdot \bar{y} \bar{z} + \bar{x} y \bar{z} + (\overline{x \cdot \bar{y}} \cdot \overline{\bar{x} y}) \cdot z$$
$$= (x + y) \cdot (x + \bar{y}) \cdot z$$
$$= (x y + \bar{x} \bar{y}) \cdot z$$

$$= x \bar{y} \bar{z} + \bar{x} y \bar{z} + x y z + \bar{x} \bar{y} z$$

$$\text{a) } f(w, x, y, z) = \sum m(1, 3, 4, 7, 9, 11, 12, 15)$$

$$\text{b) } f(w, x, y, z) = \prod M(3, 5, 6, 7, 12, 14, 15)$$

$$\text{c) } f(w, x, y, z) = y \cdot z + \bar{w} \cdot z + \bar{w} \cdot \bar{x} + w \cdot \bar{x} \cdot \bar{z} + w \cdot x \cdot (y + z)$$

$$\text{d) } f(w, x, y, z) = (\bar{y} + \bar{z}) \cdot (w + x + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + y + \bar{z})$$

2) À l'aide de tables de Karnaugh, simplifiez les fonctions phi-booliennes suivantes :

$$\text{a) } f(w, x, y, z) = \prod M(1, 3, 4, 9, 11, 14)$$

$$\text{avec } CI(w, x, y, z) = (6, 12, 13)$$

$$\text{b) } f(w, x, y, z) = \sum m(0, 7, 8, 10, 12, 13)$$

$$\text{avec } CI(w, x, y, z) = (1, 2, 5)$$

$$\text{c) } f(w, x, y, z) = \sum m(0, 1, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 15)$$

$$\text{avec } CI(w, x, y, z) = (4)$$

SOLUTIONS

3-1 Transformations

1) On va, dans un premier temps, écrire la fonction sous forme disjunctive – si elle n'est pas déjà sous cette forme. On en profitera alors pour la simplifier lorsque c'est possible. Ensuite, on complètera deux fois et on appliquera une fois le théorème de De Morgan.

$$\text{a) } f(w, x, y, z) = \bar{w} \cdot x \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} + w \cdot \bar{y} \cdot z$$

$$f(w, x, y, z) = \overline{\bar{w} \cdot x \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} + w \cdot \bar{y} \cdot z}$$

$$= \overline{\bar{w} \cdot x \cdot \bar{z}} \cdot \overline{x \cdot \bar{y}} \cdot \overline{w \cdot \bar{y} \cdot z}$$

$$= \overline{\bar{w} \cdot x \cdot \bar{z}} / x \cdot \bar{y} / w \cdot \bar{y} \cdot z$$

$$= (\bar{w} / x / \bar{z}) / (x / \bar{y}) / (w / \bar{y} / z)$$

$$= ((w / w) / x / (z / z)) / (x / (y / y)) / (w / (y / y) / z)$$

$$\text{b) } f(w, x, y, z) = (w + x) \cdot (\bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{w} + \bar{x} + \bar{y})$$

$$f(w, x, y, z) = (w \cdot \bar{y} + w \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} + x \cdot \bar{z}) \cdot (\bar{w} + \bar{x} + \bar{y})$$

$$= w \cdot \bar{y} \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{w} + x \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{y} \cdot \bar{x} + w \cdot \bar{z} \cdot \bar{x}$$

$$+ w \cdot \bar{z} \cdot \bar{x} + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{x} + x \cdot \bar{z} \cdot \bar{x} + w \cdot \bar{y} \cdot \bar{y} + w \cdot \bar{z} \cdot \bar{y}$$

$$+ x \cdot \bar{y} \cdot \bar{y} + x \cdot \bar{z} \cdot \bar{y}$$

$$= \bar{w} \cdot x \cdot \bar{y} + \bar{w} \cdot x \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} + w \cdot \bar{x} \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{y}$$

$$+ w \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$$

$$= \overline{\bar{w} \cdot x \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{x} \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{y} + x \cdot \bar{y}}$$

$$= \overline{\bar{w} \cdot x \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{x} \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{y} + x \cdot \bar{y}}$$

$$= \overline{\bar{w} \cdot x \cdot \bar{z}} \cdot \overline{w \cdot \bar{x} \cdot \bar{z}} \cdot \overline{w \cdot \bar{y}} \cdot \overline{x \cdot \bar{y}}$$

$$= \overline{\bar{w} \cdot x \cdot \bar{z}} / w \cdot \bar{x} \cdot \bar{z} / w \cdot \bar{y} / x \cdot \bar{y}$$

$$= (\bar{w} / x / \bar{z}) / (w / \bar{x} / \bar{z}) / (w / \bar{y}) / (x / \bar{y})$$

$$= ((w / w) / x / (z / z)) / (w / (x / x) / (z / z)) / (w / (y / y)) / (x / (y / y))$$

$$\text{c) } f(w, x, y, z) = (w + y) \cdot (\bar{x} + \bar{z}) \cdot (\bar{w} + \bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{y} + z + \bar{x} \cdot \bar{y})$$

$$f(w, x, y, z) = (w + y) \cdot (\bar{x} + \bar{z}) \cdot (\bar{w} + \bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{y} + z + \bar{x} \cdot \bar{y})$$

$$= (w + y) \cdot x \cdot z \cdot (\bar{w} + \bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{y} + z + x + y)$$

$$= (w + y) \cdot x \cdot z \cdot (\bar{w} + \bar{y})$$

$$= (w \cdot \bar{w} + y \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{y} + y \cdot \bar{y}) \cdot x \cdot z$$

$$= (\bar{w} \cdot y + w \cdot \bar{y}) \cdot x \cdot z$$

$$= \bar{w} \cdot x \cdot y \cdot z + w \cdot x \cdot \bar{y} \cdot z$$

$$= \overline{\bar{w} \cdot x \cdot y \cdot z + w \cdot x \cdot \bar{y} \cdot z}$$

$$= \overline{\bar{w} \cdot x \cdot y \cdot z} \cdot \overline{w \cdot x \cdot \bar{y} \cdot z}$$

$$= \overline{\bar{w} \cdot x \cdot y \cdot z} / w \cdot x \cdot \bar{y} \cdot z$$

$$= (\bar{w} / x / y / z) / (w / x / \bar{y} / z)$$

$$= ((w / w) / x / y / z) / (w / x / (y / y) / z)$$

2) On va, dans un premier temps, écrire la fonction sous forme conjonctive – si elle n'est pas déjà sous cette forme – en appliquant la distributivité de la loi + sur la loi ·. On en profitera alors pour la simplifier lorsque c'est possible. Ensuite, on complètera deux fois et on appliquera une fois le théorème de De Morgan.

$$\text{a) } f(w, x, y, z) = \bar{w} \cdot x \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} + w \cdot \bar{y} \cdot z$$

$$f(w, x, y, z) = (\bar{w} \cdot x \cdot \bar{z} + x) \cdot (\bar{w} \cdot x \cdot \bar{z} + \bar{y}) + w \cdot \bar{y} \cdot z$$

$$= x \cdot (\bar{w} + \bar{y}) \cdot (x + \bar{y}) \cdot (\bar{z} + \bar{y}) + w \cdot \bar{y} \cdot z$$

$$= x \cdot (\bar{w} + \bar{y}) \cdot (\bar{z} + \bar{y}) + w \cdot \bar{y} \cdot z$$

$$= (x \cdot (\bar{w} + \bar{y}) \cdot (\bar{z} + \bar{y}) + w) \cdot (x \cdot (\bar{w} + \bar{y}) \cdot (\bar{z} + \bar{y}) + \bar{y})$$

$$\cdot (x \cdot (\bar{w} + \bar{y}) \cdot (\bar{z} + \bar{y}) + z)$$

$$= ((x + w) \cdot (\bar{w} + \bar{y} + w) \cdot (\bar{z} + \bar{y} + w))$$

$$\cdot ((x + \bar{y}) \cdot (\bar{w} + \bar{y} + \bar{y}) \cdot (\bar{z} + \bar{y} + \bar{y}))$$

$$\begin{aligned}
& \cdot ((x+z) \cdot (\overline{w} + \overline{y} + z) \cdot (\overline{z} + \overline{y} + z)) \\
&= (w+x) \cdot (w+\overline{z}+\overline{y}) \cdot (x+\overline{y}) \cdot (\overline{w} + \overline{y}) \cdot (\overline{y} + \overline{z}) \cdot (x+z) \\
& \cdot (\overline{w} + \overline{y} + z) \\
&= (w+x) \cdot (\overline{w} + \overline{y}) \cdot (\overline{y} + \overline{z}) \cdot (x+z) \\
&= \overline{\overline{(w+x)} \cdot \overline{(\overline{w} + \overline{y})} \cdot \overline{(\overline{y} + \overline{z})} \cdot \overline{(x+z)}} \\
&= \overline{(w+x)} + \overline{(\overline{w} + \overline{y})} + \overline{(\overline{y} + \overline{z})} + \overline{(x+z)} \\
&= \overline{(w+x)} \downarrow \overline{(\overline{w} + \overline{y})} \downarrow \overline{(\overline{y} + \overline{z})} \downarrow \overline{(x+z)} \\
&= (w \downarrow x) \downarrow (\overline{w} \downarrow \overline{y}) \downarrow (\overline{y} \downarrow \overline{z}) \downarrow (x \downarrow z) \\
&= (w \downarrow x) \downarrow ((w \downarrow w) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow ((y \downarrow y) \downarrow (z \downarrow z)) \downarrow (x \downarrow z)
\end{aligned}$$

$$\text{b) } f(w, x, y, z) = (w+x) \cdot (\overline{y} + \overline{z}) \cdot (\overline{w} + \overline{x} + \overline{y})$$

$$\begin{aligned}
f(w, x, y, z) &= \overline{\overline{(w+x)} \cdot \overline{(\overline{y} + \overline{z})} \cdot \overline{(\overline{w} + \overline{x} + \overline{y})}} \\
&= \overline{(w+x)} + \overline{(\overline{y} + \overline{z})} + \overline{(\overline{w} + \overline{x} + \overline{y})} \\
&= \overline{(w+x)} \downarrow \overline{(\overline{y} + \overline{z})} \downarrow \overline{(\overline{w} + \overline{x} + \overline{y})} \\
&= (w \downarrow x) \downarrow (\overline{y} \downarrow \overline{z}) \downarrow (\overline{w} \downarrow \overline{x} \downarrow \overline{y}) \\
&= (w \downarrow x) \downarrow ((y \downarrow y) \downarrow (z \downarrow z)) \downarrow ((z \downarrow z) \downarrow (y \downarrow y)) \\
&\downarrow ((w \downarrow w) \downarrow (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y))
\end{aligned}$$

$$\text{c) } f(w, x, y, z) = (w+y) \cdot (\overline{x} + \overline{z}) \cdot (\overline{w} + \overline{x} + \overline{y}) \cdot (\overline{y} + z + \overline{x} \cdot \overline{y})$$

$$\begin{aligned}
f(w, x, y, z) &= (w+y) \cdot x \cdot z \cdot (\overline{w} + \overline{x} + \overline{y}) \cdot (\overline{y} + z + x + y) \\
&= (w+y) \cdot x \cdot z \cdot (\overline{w} + \overline{y}) \\
&= \overline{\overline{(w+y)} \cdot \overline{x} \cdot \overline{z} \cdot \overline{(\overline{w} + \overline{y})}} \\
&= \overline{(w+y)} + \overline{x} + \overline{z} + \overline{(\overline{w} + \overline{y})} \\
&= \overline{(w+y)} \downarrow \overline{x} \downarrow \overline{z} \downarrow \overline{(\overline{w} + \overline{y})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (w \downarrow y) \downarrow (x \downarrow x) \downarrow (z \downarrow z) \downarrow (\overline{w} \downarrow \overline{y}) \\
&= (w \downarrow y) \downarrow (x \downarrow x) \downarrow (z \downarrow z) \downarrow ((w \downarrow w) \downarrow (y \downarrow y))
\end{aligned}$$

3-2 Simplifications algébriques

- 1) Donnez la table de vérité de la fonction $f(x, y, z)$ représentée par le logigramme, puis simplifiez cette fonction de manière algébrique. La table de vérité montre que la fonction est définie par le maxterme M_0 . On a donc $f(x, y, z) = x + y + z$.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2) Simplifiez de manière algébrique la fonction suivante :

$$\begin{aligned}
f(w, x, y, z) &= \overline{(\overline{w} + \overline{y}) + x \cdot y} \cdot \overline{(w \cdot \overline{x} + (y + \overline{w}))} \cdot \overline{x} \\
&= \overline{((\overline{w} + \overline{y}) + x \cdot y) + (w \cdot \overline{x} + (y + \overline{w}))} \cdot \overline{x} \\
&= \overline{(\overline{w} + \overline{y}) \cdot \overline{x \cdot y}} + \overline{(w \cdot \overline{x} \cdot (y + \overline{w}))} \cdot \overline{x} \\
&= \overline{((w + y) \cdot (\overline{x} + \overline{y}))} + \overline{(\overline{w} + x) \cdot (\overline{y} \cdot w))} \cdot \overline{x} \\
&= (w \cdot \overline{x} + y \cdot \overline{x} + w \cdot \overline{y} + y \cdot \overline{y}) + (\overline{w} \cdot \overline{y} \cdot w + x \cdot \overline{y} \cdot w) \cdot \overline{x} \\
&= (w \cdot \overline{x} + y \cdot \overline{x} + w \cdot \overline{y}) + (x \cdot \overline{y} \cdot w) \cdot \overline{x} \\
&= (y \cdot \overline{x} + w \cdot \overline{y}) + (x \cdot \overline{y} \cdot w) \cdot \overline{x} \\
&= (y \cdot \overline{x} + w \cdot \overline{y} + x \cdot \overline{y} \cdot w) \cdot \overline{x} \\
&= (y \cdot \overline{x} + w \cdot \overline{y}) \cdot \overline{x} \\
&= y \cdot \overline{x} + w \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}
\end{aligned}$$

3-3 Simplifications par Karnaugh

1) À l'aide de tables de Karnaugh, simplifiez les fonctions booléennes suivantes :

$$\text{a) } f(w, x, y, z) = \sum m(1, 3, 4, 7, 9, 11, 12, 15)$$

Table de Karnaugh remplie																Regroupements																							
y/z				00				01				11				10				y/z				00				01				11				10			
wx				00				01				11				10				wx				00				01				11				10			
00								1												00								1											
01				1								1								01				1								1							
11				1												1				11				1								1							
10								1				1								10								1				1							

$$f(w, x, y, z) = x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot z + y \cdot z$$

$$b) f(w, x, y, z) = \prod M(3, 5, 6, 7, 12, 14, 15)$$

Table de Karnaugh remplie					Regroupements				
yz wx	00	01	11	10	00	01	11	10	
00			0						
01		0	0	0					
11	0		0	0					
10									

$$f(w, x, y, z) = (w + \bar{x} + \bar{z}) \cdot (\bar{w} + \bar{x} + z) \cdot (w + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + \bar{y})$$

$$c) f(w, x, y, z) = y \cdot z + \bar{w} \cdot z + \bar{w} \cdot \bar{x} \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{x} \cdot \bar{z} + w \cdot x \cdot (y + z)$$

Table de Karnaugh remplie					Regroupements				
yz wx	00	01	11	10	00	01	11	10	
00	1	1	1	1					
01		1	1	1					
11		1	1	1					
10	1		1	1					

$$f(w, x, y, z) = \bar{x} \cdot \bar{z} + \bar{w} \cdot z + x \cdot z + w \cdot y$$

$$d) f(w, x, y, z) = (\bar{y} + \bar{z}) \cdot (w + x + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + y + \bar{z})$$

Table de Karnaugh remplie					Regroupements				
yz wx	00	01	11	10	00	01	11	10	
00			0	0					
01		0	0						
11		0	0						
10									

$$f(w, x, y, z) = (w + x + \bar{y}) \cdot (\bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + \bar{z})$$

2) À l'aide de tables de Karnaugh, simplifiez les fonctions phi-booléennes suivantes :

$$a) f(w, x, y, z) = \prod M(1, 3, 4, 9, 11, 14) \text{ avec } CI(w, x, y, z) = (6, 12, 13)$$

Table de Karnaugh remplie					Regroupements				
yz wx	00	01	11	10	00	01	11	10	
00		0	0						
01	0								
11	Φ	Φ		0					
10		0	0						

$$f(w, x, y, z) = (\bar{x} + z) \cdot (x + \bar{z})$$

$$b) f(w, x, y, z) = \sum m(0, 7, 8, 10, 12, 13) \text{ avec } CI(w, x, y, z) = (1, 2, 5)$$

Table de Karnaugh remplie					Regroupements				
yz wx	00	01	11	10	00	01	11	10	
00	1	Φ		Φ					
01		Φ	1						
11	1	1	1						
10	1			1					

On voit ici que le deuxième regroupement horizontal (correspondant au monôme $w \cdot x \cdot \bar{y}$) n'est pas nécessaire. La table minimale est donc :

yz wx	00	01	11	10
00	1			Φ
01			Φ	1
11	1	1	1	
10	1			1

et l'expression de la fonction simplifiée est :

$$f(w, x, y, z) = \bar{w} \cdot x \cdot z + w \cdot x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \bar{z}$$