

Les bases de la Mécanique des Milieux Continus (MMC)

ENSEM 1A NRJ - FISA

Cédric LAURENT, Professeur des universités

cedric.laurent@univ-lorraine.fr

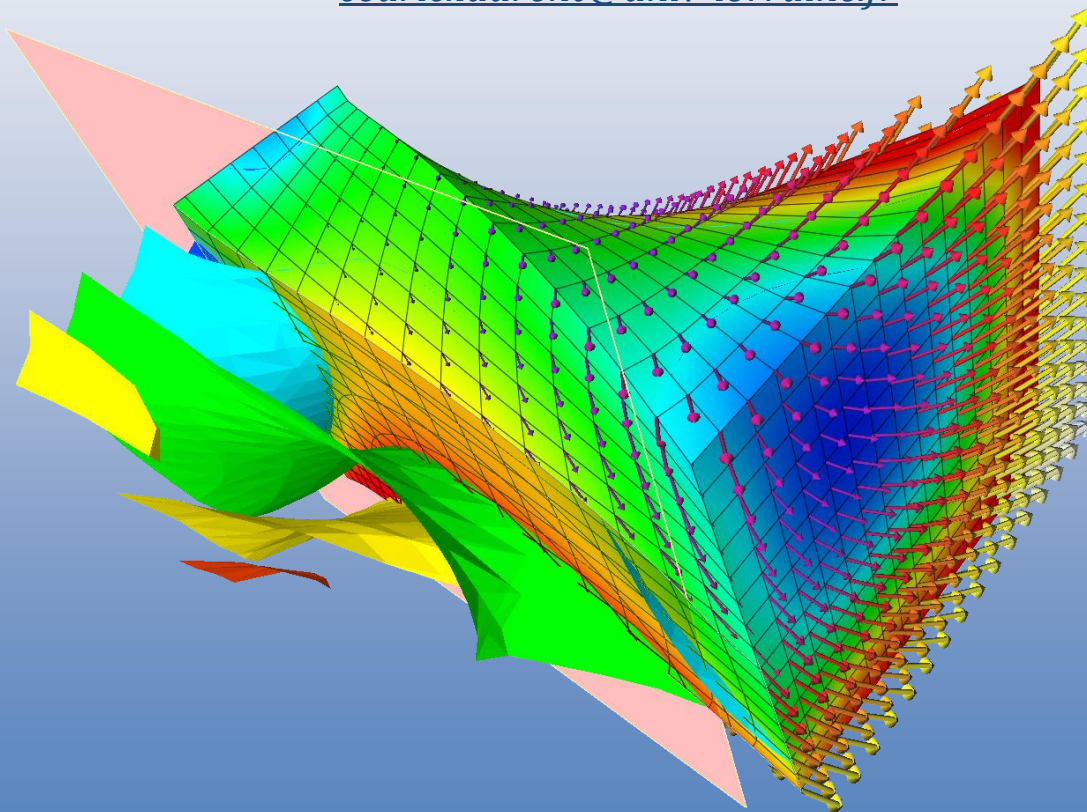


Table des matières

1. Rappels de mécanique	3
1.1. Positionnement dans l'espace	3
1.1.1. Espace utilisé et propriétés	3
1.1.2. Repérage des points et système de coordonnées	4
1.2. Mécanique du point matériel	8
1.2.1. Bagage mathématique : notions de calcul différentiel	8
1.2.2. Cinématique du point	11
1.2.3. Principes fondamentaux	14
1.3. Mécanique du solide indéformable	17
1.3.1. Du système de points matériels au solide indéformable	17
1.3.2. Rotation du solide autour d'un axe fixe	19
1.3.3. Cinématique du solide indéformable	23
1.3.4. Dynamique du solide indéformable	25
1.3.5. Cas particulier : problèmes de statique	26
1.4. Présentation de la mécanique des milieux continus	28
1.4.1. Positionnement et déroulement des chapitres suivants	28
1.4.2. Qu'est-ce qu'un milieu continu ?	29
1.4.3. Quelles sont les applications ?	30
2. Cinématique du milieu continu	33
2.1. Bagage mathématique : notions de calcul tensoriel	33
2.1.1. Définition du produit tensoriel de deux vecteurs	34
2.1.2. Ecriture matricielle d'un tenseur d'ordre 2	36
2.1.3. Rappels de calcul matriciel	37
2.1.4. Quelques opérations sur les tenseurs	41
2.1.5. Les tenseurs d'ordre 2 comme « application linéaire »	43
2.1.6. Opérateur « gradient »	44
2.2. Représentation du mouvement	50
2.2.1. Repérage des points matériels en mouvement	50
2.2.2. Description lagrangienne ou eulérienne?	52
2.2.3. Champs de déplacement, de vitesse et d'accélération	56
2.2.4. Quelques caractéristiques de la transformation	59
2.3. Le gradient de la transformation	63
2.3.1. Démonstration	63
2.3.1. Expression du gradient de la transformation	64
2.3.2. Transport d'un vecteur matériel	65
2.3.3. Jacobien de la transformation	67
2.3.4. Décomposition polaire	67
2.3.5. Transport d'un volume	68
2.3.1. Taux de dilatation volumique	69
2.4. Les déformations du milieu continu	70
2.4.1. Recherche d'un tenseur des déformations	70
2.4.2. Cas des transformations infinitésimales	72
2.4.3. Mouvement de corps rigide	78
2.5. Le taux (ou vitesse) de déformation	79
2.5.1. Vitesse de déformation et vitesse de rotation	79
2.6. La conservation de la masse	81
2.6.1. Bagage mathématique : opérateur divergence	81
2.6.2. Dérivée particulaire d'une intégrale de volume	86
2.6.3. Equation de continuité ou conservation de la masse	88
3. Modélisation des efforts intérieurs	91
3.1. Vecteur-contrainte	91
3.2. Tenseur des contraintes de Cauchy	93

3.2.1.	Définition	93
3.2.1.	Symétrie du tenseur des contraintes.....	94
3.2.1.	Interprétation des composantes du tenseur des contraintes	95
3.3.	Propriétés du tenseur des contraintes	96
3.3.1.	Bagage mathématique : diagonalisation d'une matrice	96
3.3.2.	Propriétés du tenseur des contraintes de Cauchy.....	98
3.4.	Equilibre: équation de la dynamique	99
4.	Note technique : les conditions aux limites.....	102
4.1.	Condition aux limites en efforts ou déplacements ?.....	102
4.2.	Condition aux limites écrite localement ou globalement ?	102
4.3.	Surface libre	103
4.4.	Tableau récapitulatif.....	104
5.	Application aux matériaux solides	107
5.1.	L'essai de traction	108
5.1.1.	Loi de comportement	108
5.1.2.	L'essai de traction	108
5.1.3.	Limite d'élasticité	110
5.1.4.	Cas unidimensionnel : définition du module d'Young	110
5.2.	Le matériau solide élastique linéaire isotrope	112
5.2.1.	Considérations générales	112
5.2.2.	Loi de comportement élastique linéaire isotrope	112
5.2.3.	Interprétation du module d'Young et du coefficient de Poisson	113
5.3.	Résolution d'un problème d'élastostatique	115
5.3.1.	Formulation du problème	115
5.3.2.	Principe de Saint-Venant.....	116
5.3.1.	Schéma de résolution classique (« approche en déplacement »).....	117
5.3.2.	Une méthode très utilisée : la méthode des éléments finis	118
5.4.	Introduction au dimensionnement	119
5.4.1.	Le dimensionnement	119
5.4.2.	Cas unidimensionnel.....	119
5.4.3.	Notion de contrainte équivalente	120
5.4.4.	Contrainte équivalente de Von Mises.....	121
6.	Application aux fluides	124
6.1.	Cinématique des fluides	125
6.1.1.	Description de la transformation.....	125
6.1.2.	Vitesse de déformation	125
6.1.3.	Bagage mathématique : rotationnel d'un champ de vecteurs.....	126
6.1.4.	Vorticité et tourbillon	128
6.2.	Lois de conservation	130
6.2.1.	Masse.....	130
6.2.2.	Quantité de mouvement.....	132
6.3.	Le fluide newtonien.....	134
6.4.	Equation de Navier-Stokes	135
6.4.1.	Démonstration et énoncé	135
6.4.2.	Utilisation	137
	Résumé des notations utilisées	141

1. Rappels de mécanique

1.1. Positionnement dans l'espace

1.1.1. Espace utilisé et propriétés

Dans tout ce cours, on utilisera l'espace physique **l'espace vectoriel euclidien orienté** $\mathbb{R}^3$. Les éléments de cet espace, appelés *vecteurs*, seront soulignés une fois : ainsi on notera par exemple $\underline{x}$ et $\underline{y}$ deux éléments de cet espace. Les notions présentées dans ce cours peuvent être généralisées à d'autres espaces : on considérera que cette généralisation sort du cadre de ce cours d'introduction.

Un vecteur $\underline{x}$ est **souligné une fois** : en s'avancant un peu sur les sections suivantes, ceci s'explique par le fait qu'un vecteur est un tenseur d'ordre 1. Un tenseur d'ordre 0 ne sera pas souligné, un tenseur d'ordre 2 sera souligné 2 fois, etc...

L'espace utilisé est muni d'un **produit scalaire**, fonction de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ notée par un point $\cdot$, qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}(\alpha \underline{x}) \cdot \underline{y} &= \alpha (\underline{x} \cdot \underline{y}) \\(\underline{x} + \underline{y}) \cdot \underline{z} &= \underline{x} \cdot \underline{z} + \underline{y} \cdot \underline{z} \\ \underline{x} > 0 &\Rightarrow \underline{x} \cdot \underline{x} > 0 \quad ; \quad \underline{x} \cdot \underline{x} = 0 \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}\end{aligned}$$

Le produit scalaire entre les vecteurs non nuls $\underline{x}$ et $\underline{y}$ s'écrit :

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \|\underline{x}\| \|\underline{y}\| \cos \theta(\underline{x}, \underline{y}) \quad \text{avec la norme } \|\underline{x}\| = (\underline{x} \cdot \underline{x})^{1/2}$$

où $\theta(\underline{x}, \underline{y})$ est l'angle entre $\underline{x}$ et $\underline{y}$ lorsque leurs origines coïncident.

- si les deux vecteurs sont perpendiculaires : $\underline{x} \cdot \underline{y} = 0$
- si les deux vecteurs sont parallèles : $\underline{x} \cdot \underline{y} = \|\underline{x}\| \|\underline{y}\|$
- le résultat du produit est un scalaire, comme son nom l'indique.

On peut également définir le **produit vectoriel** entre deux vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{y}$, qui est une fonction de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ notée par le symbole $\wedge$ et qui satisfait les propriétés ;

$$(\alpha \underline{x}) \wedge \underline{y} = \alpha (\underline{x} \wedge \underline{y})$$

$$(\underline{x} + \underline{y}) \wedge \underline{z} = \underline{x} \wedge \underline{z} + \underline{y} \wedge \underline{z}$$

Le vecteur $\underline{z} = \underline{x} \wedge \underline{y}$ est **perpendiculaire** aux deux vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{y}$, et la base formée par les trois vecteurs $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ est **directe**. La norme du vecteur $\underline{z} = \underline{x} \wedge \underline{y}$ est telle que :

$$\|\underline{z}\| = \|\underline{x} \wedge \underline{y}\| = \|\underline{x}\| \|\underline{y}\| \sin \theta(\underline{x}, \underline{y})$$

- si les deux vecteurs sont parallèles : $\underline{x} \cdot \underline{y} = 0$
- le résultat du produit est un vecteur, comme son nom l'indique.

1.1.2. Repérage des points et système de coordonnées

1.1.2.1 Convention d'Einstein

Comme l'espace physique sera toujours $\mathbb{R}^3$, un indice de coordonnées varie systématiquement de 1 à 3, et le signe somme ci-dessus peut paraître inutile. Pour alléger les notations, nous adopterons donc par la suite la **convention de sommation sur les indices répétés** dite **convention d'Einstein**.

A retenir 1-1

Lorsqu'un indice i apparaît deux fois dans la même expression, l'expression doit s'entendre comme la somme obtenue en donnant successivement à cet indice les valeurs : $i=1,2,3$.

L'indice répété est dit « **muet** », il peut changer de nom.

Exemple 1-1

Prenons quelques exemples où des indices sont répétés:

$$a_i b_{ij} c_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_{ij} c_j = a_1 b_{11} c_1 + a_1 b_{12} c_2 + a_1 b_{13} c_3 + a_2 b_{21} c_1 + a_2 b_{22} c_2 + a_2 b_{23} c_3 + a_3 b_{31} c_1 + a_3 b_{32} c_2 + a_3 b_{33} c_3$$

Ainsi, le **produit scalaire** défini précédemment peut s'écrire dorénavant :

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = (x_i e_i) \cdot (y_j e_j) = x_i y_j \delta_{ij} = x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

De même, la **norme** d'un vecteur peut facilement s'écrire :

$$\|\underline{x}\|^2 = \underline{x} \cdot \underline{x} = x_i x_i = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

1.1.2.2 Repérage des points

L'observateur est réputé immobile et il est appelé **référentiel** $\mathcal{R}$. Cet observateur utilise un **repère orthonormé direct** (en général cartésien, cylindrique ou sphérique) noté R pour repérer les positions des objets matériels dans cet espace. Ce repère, qui est fixe dans $\mathcal{R}$, est caractérisé par un point d'origine et trois vecteurs formant une **base orthonormée directe** telle que :

$$\text{si } i \neq j, \text{ alors } \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = 0$$

$$\text{si } i = j, \text{ alors } \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = 1$$

Dans ce repère, un vecteur quelconque $\underline{x}$ peut être repéré par ses **composantes** x_1, x_2, x_3 de sorte que (en utilisant la convention d'Einstein):

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \underline{e}_i = x_i \underline{e}_i = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$$

De même, un point quelconque M peut être repéré par ses **coordonnées** x_1, x_2, x_3 qui sont les **composantes** du vecteur position $\underline{OM}$ dans le repère R (toujours en utilisant la convention d'Einstein):

$$\underline{OM} = \sum_{i=1}^3 x_i \underline{e}_i = x_i \underline{e}_i = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$$

Il apparaît bien évident ci-dessus que le vecteur possède trois composantes scalaires sur une base donnée de $\mathbb{R}^3$. Ces composantes changent si l'on change de base : le vecteur, lui, n'a pourtant pas changé : le vecteur est un **objet intrinsèque**. On ne devra en aucun cas par la suite mélanger les notations suivantes :

A retenir 1-2

$\underline{x}$: vecteur

x_i : composante du vecteur selon la direction $\underline{e}_i$

$$[\underline{x}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \text{vecteur-colonne des composantes de } \underline{x} \text{ dans la base } (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$$

1.1.2.3 Coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, la position du point M s'écrit :

$$\underline{OM} = \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 = x_i \underline{e}_i$$

Un vecteur quelconque $\underline{a}$ dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ s'écrira $\underline{a} = a_i \underline{e}_i$.

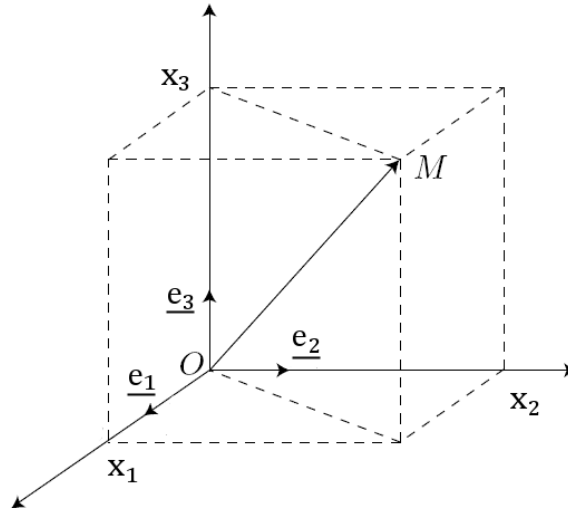


Figure 1: Coordonnées cartésiennes.

1.1.2.4 Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, la position du point M s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{OM} = \underline{x} &= x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 \\ &= r \cos \theta \underline{e}_1 + r \sin \theta \underline{e}_2 + z \underline{e}_3 \end{aligned}$$

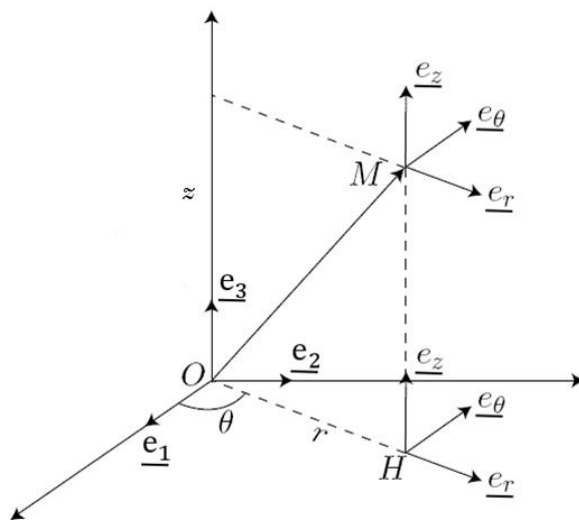


Figure 2: Coordonnées cylindriques.

La base locale en un point est donnée par:

$$\begin{aligned}\underline{e}_r &= \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2 \\ \underline{e}_\theta &= -\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2 \\ \underline{e}_z &= \underline{e}_3\end{aligned}$$

Par conséquent on a le vecteur position : $\underline{OM} = r\underline{e}_r + z\underline{e}_z$

Un vecteur quelconque $\underline{a}$ dans cette base locale s'écrira $\underline{a} = a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_z \underline{e}_z$.

1.1.2.5 Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, la position du point M s'écrit :

$$\begin{aligned}\underline{OM} = \underline{x} &= x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 \\ &= r \sin \theta \cos \varphi \underline{e}_1 + r \sin \theta \sin \varphi \underline{e}_2 + r \cos \theta \underline{e}_3 = r \underline{e}_r\end{aligned}$$

Un vecteur quelconque $\underline{a}$ dans cette base locale s'écrira $\underline{a} = a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_\varphi \underline{e}_\varphi$

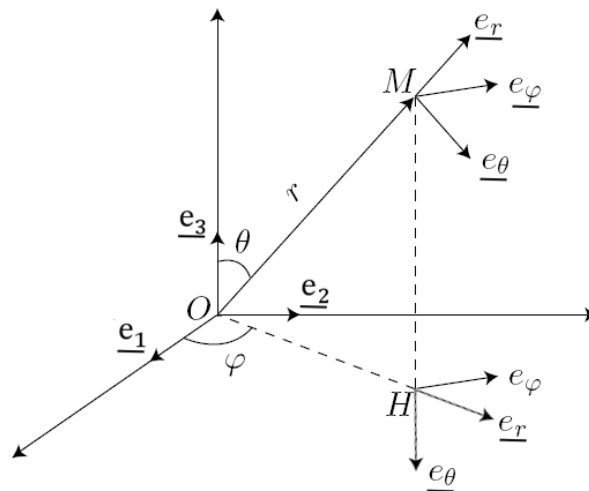


Figure 3: Coordonnées sphériques.

1.2. Mécanique du point matériel

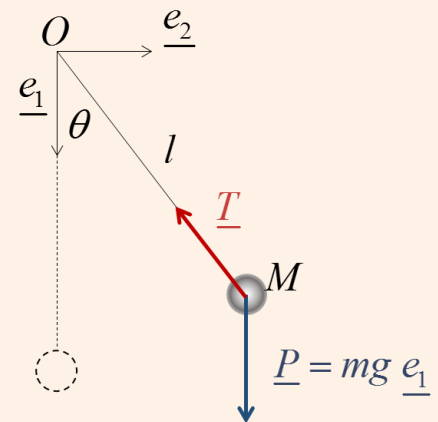
Exemple introductif 1-2 : le pendule

On cherche à connaître la période d'oscillation du pendule simple.

Le pendule de masse m est pendu à un fil de longueur l et soumis à deux efforts (le poids propre $\underline{P} = m\underline{g}$ et la tension du fil $\underline{T}$).

Dans la suite on va tâcher d'écrire proprement :

- la position, la vitesse et l'accélération de la masse
- sa quantité de mouvement et son moment cinétique



Les principes fondamentaux de la mécanique du point nous permettront ensuite d'écrire l'équation qui régit le mouvement du pendule, et d'en déduire sa période d'oscillation.

1.2.1. Bagage mathématique : notions de calcul différentiel

Comme la plupart des problèmes de physique, les problèmes de mécanique vont faire intervenir à plusieurs reprises les notions de **dérivée** et de **différentielle**. Les fonctions qui seront posées étant en général dépendantes **du temps et de l'espace**, on aura donc affaire à des **fonctions de plusieurs variables** qui interviendront au sein **d'équations différentielles**. Ces différentes notions sont succinctement rappelées dans les sections ci-dessous..

1.2.1.1 Dérivée partielle d'une fonction

On admet que f est une fonction de n variables, de sorte que l'on puisse noter :

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

On appelle *dérivée partielle première par rapport à x_j* la limite suivante si elle existe :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_j - h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h} \text{ que l'on note : } \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$$

D'un point de vue physique, considérons une fonction f qui affecte une altitude à chaque point d'une carte de randonnée de coordonnées x_1, x_2 (Figure 4). Dans ce cas, les deux dérivées partielles selon x_1 et x_2 évaluées au point M vont correspondre à la **variation** d'altitude (i.e. la pente) dans les directions x_1 et x_2 .

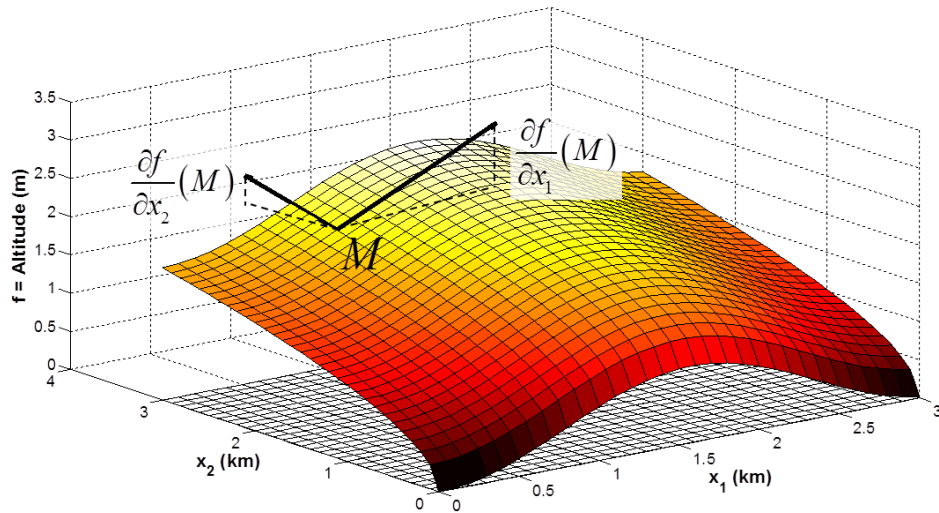


Figure 4: Les dérivées partielles de la fonction "altitude" sur une carte de randonnée vont donner la variation d'altitude dans les deux directions de la carte.

Si on veut évaluer la position d'un point voisin de M en fonction des dérivées partielles de la fonction f en ce point, on peut estimer que la fonction f est **linéaire** entre les deux points et on a :

$$\begin{aligned} f(x_1 + h_1, x_2) &= f(x_1, x_2) + h_1 \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \|h\| \varepsilon(h) \\ f(x_1, x_2 + h_2) &= f(x_1, x_2) + h_2 \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \|h\| \varepsilon(h) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

On dit dans ce cas que la fonction f admet un **développement limité** d'ordre 1 au point M .

Une fonction peut être dérivée **plusieurs fois** par rapport à une variable : on parle dans ce cas de la **dérivée partielle seconde, troisième, quatrième, ...** de la fonction. La dérivée p -ième de la fonction f s'écrit :

$$\frac{\partial^p f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i^p} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^{p-1} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i^{p-1}} \right) = \dots$$

1.2.1.2 Définition mathématique de la différentielle

On dit que la fonction f est **différentiable** en M s'il existe les applications $df(h)$ et $\varepsilon(h)$ telles que, pour tout h :

$$f(M+h) = f(M) + df(h) + \|h\| \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

On fait donc directement le lien avec l'équation précédente, et on peut écrire :

$$df(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} h_i$$

Dans ce cas, la quantité $df(h)$ représente la **variation** de la valeur de f pour une **variation infinitésimale** de h : on l'appelle la **différentielle** de la fonction f par rapport à h .

1.2.1.3 Cas d'une fonction d'une seule variable

Considérons maintenant le cas où la fonction f est fonction **d'une seule** variable x . Dans ce cas, on peut noter dx la variation **infinitésimale** de h . L'équation ci-dessous devient alors :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

On note alors que dans ce cas, les deux notations d ou ∂ peuvent s'utiliser indifféremment.

1.2.1.4 Cas d'une fonction composée

Comme évoqué précédemment, les différentes fonctions qui seront manipulées seront souvent dépendantes du temps et de l'espace. Imaginons que f est une fonction de n variables toutes dépendantes du temps, de telle sorte que :

$$f = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

Si on veut calculer la variation de f en fonction du temps, on se trouve dans le cas d'une différentielle d'une fonction **composée** pour laquelle on a l'écriture suivante :

$$df(dt) = d(f \circ x_i)(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \times \frac{dx_i}{dt} \right) dt = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \times \frac{dx_i}{dt} \right) dt$$

La dérivée totale de f par rapport au temps devient donc :

$$\begin{aligned}\frac{df(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}\end{aligned}$$

1.2.2. Cinématique du point

1.2.2.1 Vecteur position

La **position** d'un point matériel noté M s'écrit comme rappelé précédemment :

$\underline{OM} = x_i \underline{e}_i = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$	dans un repère cartésien
$\underline{OM} = r \underline{e}_r + z \underline{e}_z$	dans un repère cylindrique
$\underline{OM} = r \underline{e}_r$	dans un repère sphérique

1.2.2.2 Vecteur vitesse

On définit la **vitesse** du point matériel par la dérivée temporelle du vecteur position dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$.

Dans le cas où on utilise un repère cartésien (fixe dans $\mathcal{R}$) on a alors :

$$\underline{v} = \underline{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \frac{d(x_i \underline{e}_i)}{dt} = \frac{d(x_i)}{dt} \underline{e}_i = \dot{x}_i \underline{e}_i \quad (\text{repère cartésien})$$

Dans le cas d'un repère cylindrique on obtient :

$$\underline{v} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \frac{d(r \underline{e}_r + z \underline{e}_z)}{dt} = \frac{dr}{dt} \underline{e}_r + r \frac{d\underline{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \underline{e}_z + z \frac{d\underline{e}_z}{dt} = \dot{r} \underline{e}_r + r \frac{d\underline{e}_r}{dt} + \dot{z} \underline{e}_z$$

Il convient dans ce cas de se rappeler que $\underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2$ et donc :

$$\frac{d\underline{e}_r}{dt} = \frac{d \cos \theta}{dt} \underline{e}_1 + \frac{d \sin \theta}{dt} \underline{e}_2 = -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \underline{e}_1 + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \underline{e}_2 = \dot{\theta} \overbrace{(-\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2)}^{\underline{e}_\theta} = \dot{\theta} \underline{e}_\theta$$

et donc au final :

$$\underline{v} = \underline{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_\theta + \dot{z} \underline{e}_z \quad (\text{repère cylindrique})$$

En effectuant la même démarche en coordonnées sphériques on arrive à :

$$\underline{v} = \underline{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi \quad (\text{repère sphérique})$$

1.2.2.3 Vecteur accélération

On définit **l'accélération** du point matériel comme la dérivée temporelle du vecteur vitesse dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$.

En suivant la démarche qui précède on arrive naturellement à :

$$\underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d\underline{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d^2 \underline{OM}}{dt^2} = \ddot{x}_i \underline{e}_i = \ddot{x}_i \underline{e}_i \quad (\text{repère cartésien})$$

$$\underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) \underline{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \right) \underline{e}_\theta + \ddot{z} \underline{e}_z \quad (\text{repère cylindrique})$$

$$\begin{aligned} \underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = & \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) \underline{e}_r \\ & + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \underline{e}_\theta \\ & + \left(r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta \right) \underline{e}_\varphi \end{aligned} \quad (\text{repère sphérique})$$

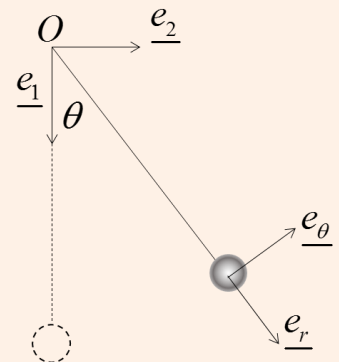
Application à l'exemple introductif

On cherche à écrire la position, la vitesse et l'accélération du pendule.

On peut alors travailler indifféremment dans une base cartésienne ou cylindrique, en utilisant évidemment les relations :

$$\begin{aligned} \underline{e}_r &= \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2 \\ \underline{e}_\theta &= -\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2 \\ \underline{e}_z &= \underline{e}_3 \end{aligned}$$

Travaillons tout d'abord dans un repère cartésien, où on fait le calcul :



$$\underline{x} = \underline{OM} = l \cos \theta \underline{e}_1 + l \sin \theta \underline{e}_2$$

$$\underline{v} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \frac{d(x_i)}{dt} \underline{e}_i = \frac{d(l \cos \theta)}{dt} \underline{e}_1 + \frac{d(l \sin \theta)}{dt} \underline{e}_2 = -l \dot{\theta} \sin \theta \underline{e}_1 + l \dot{\theta} \cos \theta \underline{e}_2$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \left(-l \ddot{\theta} \sin \theta - l \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \underline{e}_1 + \left(l \ddot{\theta} \cos \theta - l \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) \underline{e}_2 = l \ddot{\theta} (\cos \theta \underline{e}_2 - \sin \theta \underline{e}_1) - l \dot{\theta}^2 (\cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2)$$

On obtient alors une expression (assez complexe) de l'accélération.

Tentons d'effectuer le même calcul en utilisant le repère cylindrique (on se sert des résultats montrés dans les démonstrations précédentes):

$$\underline{x} = \underline{OM} = l \underline{e}_r$$

$$\underline{v} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \cancel{\frac{d}{dt} \underline{e}_r} + l \frac{d\underline{e}_r}{dt} = l \left(\frac{d \cos \theta}{dt} \underline{e}_1 + \frac{d \sin \theta}{dt} \underline{e}_2 \right) = \dot{\theta} l \overbrace{(-\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2)}^{\underline{e}_\theta} = \dot{\theta} l \underline{e}_\theta$$

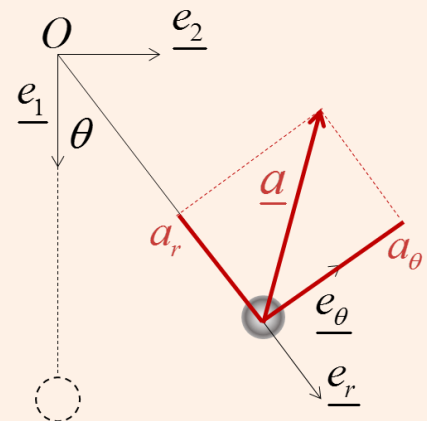
$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = l \frac{d(\dot{\theta} \underline{e}_\theta)}{dt} = l \ddot{\theta} \underline{e}_\theta + l \dot{\theta} \frac{d\underline{e}_\theta}{dt} = l \ddot{\theta} \underline{e}_\theta - l \dot{\theta}^2 \overbrace{(\cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2)}^{\underline{e}_r} = l \ddot{\theta} \underline{e}_\theta - l \dot{\theta}^2 \underline{e}_r$$

On observe (heureusement !) que les deux expressions obtenues sont égales.

Sans surprise, l'accélération possède deux composantes :

la composante a_θ correspondant à l'accélération angulaire,

et la composante a_r correspondant à l'accélération centripète.



1.2.2.1 Quantité de mouvement

On appelle *quantité de mouvement* le produit de la masse d'un point par son vecteur-vitesse (exprimé en $kg.m.s^{-1}$) :

$$\underline{p} = m \underline{v}$$

Application à l'exemple introductif

Nous venons dans la section précédente de calculer le vecteur vitesse associé au pendule au mouvement : sa quantité de mouvement s'écrit évidemment :

$$\underline{p} = m \underline{v} = ml \dot{\theta} \underline{e}_\theta = ml \dot{\theta} (\cos \theta \underline{e}_2 - \sin \theta \underline{e}_1)$$

1.2.2.1 Moment cinétique

On appelle *moment cinétique* d'un point matériel le *moment* de la quantité de mouvement $\underline{p}$ par rapport au point O (exprimé en $kg.m^2.s^{-1}$). On l'écrit donc :

$$\underline{L}_0 = \underline{OM} \wedge m\underline{v}$$

Application à l'exemple introductif

Le moment cinétique du pendule en mouvement peut s'écrire indifféremment en utilisant le système de coordonnées cartésien ou cylindrique :

$$\underline{L}_0 = \underline{OM} \wedge m\underline{v} = l\underline{e}_r \wedge ml\dot{\theta}\underline{e}_\theta = ml^2\dot{\theta}\underline{e}_z$$

$$\underline{L}_0 = (l \cos \theta \underline{e}_1 + l \sin \theta \underline{e}_2) \wedge ml\dot{\theta}(\cos \theta \underline{e}_2 - \sin \theta \underline{e}_1) = ml^2\dot{\theta}(\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_{=1})\underline{e}_3 = ml^2\dot{\theta}\underline{e}_3$$

1.2.3. Principes fondamentaux

1.2.3.1 Principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique (PFD) énonce que la somme vectorielle des efforts appliqués au point matériel (dont la masse est constante dans le temps) est égal à la variation de sa quantité de mouvement :

Equation fondamentale 1-1 : PFD pour un point matériel

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \frac{d(m\underline{v})}{dt} = m\frac{d\underline{v}}{dt} = m\underline{a} = \sum \underline{F}^{ext}$$

On en déduit que si la somme vectorielle des efforts extérieurs est nulle, il y a alors **conservation de la quantité de mouvement**.

On peut également se servir de cette définition pour introduire la notion d'effort extérieur : c'est ce qui conduit à une variation de la quantité de mouvement. Son unité est évidemment le Newton (N), équivalent au $kg.m.s^{-2}$.

Application à l'exemple introductif

Nous avons précédemment écrit la quantité de mouvement du pendule, dont la variation est égale à la somme des efforts $\underline{P} = m\underline{g}$ et $\underline{T}$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\underline{p}}{dt} &= m\underline{a} = ml \left(\ddot{\theta} \underline{e}_\theta - \dot{\theta}^2 \underline{e}_r \right) \\ \underline{T} &= -T \underline{e}_r \\ \underline{P} &= m\underline{g} = mg (\cos \theta \underline{e}_r - \sin \theta \underline{e}_\theta) \end{aligned} \right\} \frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{T} + \underline{P} \Rightarrow \begin{cases} ml \ddot{\theta} = -mg \sin \theta & (1) \\ T = ml \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta & (2) \end{cases}$$

La seconde équation permet de quantifier l'effort de tension dans le fil du pendule, tandis que la première de ces deux équations mène à une équation du mouvement, car les constantes m, l, g sont considérées connues :

$$\begin{aligned} \Rightarrow l \ddot{\theta} &= -g \sin \theta \\ \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta &= 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \end{aligned}$$

On vient de déduire la période d'oscillation du pendule.

1.2.3.2 Moment d'une force

On appelle *moment de la force* $\underline{F}$ par rapport au point O la quantité (en $N.m$) :

$$\mathfrak{M}_O(\underline{F}) = \underline{OM} \wedge \underline{F}$$

Application à l'exemple introductif

Calculons par exemple le moment des efforts extérieurs par rapport au point O dans le cas du pendule :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_O(\underline{P}) &= \underline{OM} \wedge \underline{P} = l \underline{e}_r \wedge mg (\cos \theta \underline{e}_r - \sin \theta \underline{e}_\theta) = -lmg \sin \theta \underline{e}_z \\ \mathfrak{M}_O(\underline{T}) &= \underline{OM} \wedge \underline{T} = l \underline{e}_r \wedge (-T \underline{e}_r) = \underline{0} \end{aligned}$$

Ce moment est sans surprise orienté selon $-\underline{e}_z$, et possède bien la dimension $m.kg.N.kg^{-1}=N.m$.

1.2.3.3 Conservation du moment cinétique

Tentons de dériver le moment cinétique défini ci-dessus :

$$\frac{dL_0}{dt} = \frac{d\underline{OM}}{dt} \wedge m\underline{v} + \underline{OM} \wedge \frac{d(m\underline{v})}{dt}$$

Le premier terme est évidemment nul car : $\frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \underline{v} \parallel m\underline{v}$

D'après le principe fondamental de la dynamique on a donc : $\frac{d\underline{L}_0}{dt} = \mathbf{OM} \wedge \sum \underline{F}^{ext}$

On remarque donc que la variation du moment cinétique par rapport au point O est égale à la somme des moments des efforts extérieurs par rapport au point O :

$$\frac{d\underline{L}_0}{dt} = \sum \mathfrak{M}_O(\underline{F}^{ext})$$

Si le moment des efforts extérieurs par rapport au point O est nul, il y a alors **conservation du moment cinétique**.

Application à l'exemple introductif

Nous avons précédemment calculé le moment cinétique du pendule :

$$\underline{L}_0 = ml^2 \dot{\theta} \underline{e}_z$$

La somme des moments des efforts extérieurs s'écrit, d'après ce qui précède :

Le moment des efforts $\underline{P}$ et $\underline{T}$ exprimé en O se calcule simplement :

$$\sum \mathfrak{M}_O(\underline{F}^{ext}) = \mathfrak{M}_O(\underline{P}) + \cancel{\mathfrak{M}_O(\underline{T})} = -lmg \sin \theta \underline{e}_z$$

Le théorème du moment cinétique nous permet donc d'écrire :

$$\frac{d\underline{L}_0}{dt} = \sum \mathfrak{M}_O(\underline{F}^{ext}) \Rightarrow \frac{d\left(ml^2 \dot{\theta} \underline{e}_z\right)}{dt} = -lmg \sin \theta \underline{e}_z$$

Et on en arrive à nouveau à l'équation du mouvement trouvée précédemment :

$$l \ddot{\theta} = -g \sin \theta$$

1.3. Mécanique du solide indéformable

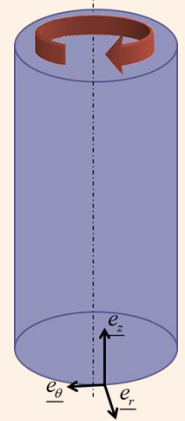
Exemple introductif 1-3 :

On s'intéresse au cas du solide en rotation autour d'un axe fixe $(0, \underline{e}_z)$ sous l'effet d'un couple constant $\underline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \underline{e}_z$ (la définition en sera donnée ensuite). On a vu dans ce cas que les vecteurs position et vitesse s'écrivaient :

$$\underline{OM} = r \underline{e}_r + z \underline{e}_z$$

$$\underline{v} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_\theta + \dot{z} \underline{e}_z$$

On cherche à connaître dans ce cas les équations qui régissent le mouvement de cet axe.



1.3.1. Du système de points matériels au solide indéformable

On définit désormais un système de N points, et on note donc les points $M^{(i)}$ de masse $m^{(i)}$, avec $i \in 1, N$. Nous allons reprendre les points précédents et observer ce qui est toujours vrai et ce qui ne l'est plus.

1.3.1.1 Centre de masse du système de points

On appelle centre de masse G (ou barycentre) le point qui « concentre » la masse du système, et on le calcule simplement à partir de sa définition :

$$\sum_{i=1}^N m^{(i)} \underline{GM}^{(i)} = \underline{0}$$

1.3.1.2 Grandeurs extensives

On dit d'une grandeur qu'elle est *extensive* si elle est proportionnelle à la quantité de matière mise en jeu (on dit sinon qu'elle est *intensive*).

- La masse est évidemment une grandeur extensive et on écrit : $m = \sum_{i=1}^N m^{(i)}$
- La quantité de mouvement est donc une grandeur extensive : $\underline{p} = \sum_{i=1}^N \underline{p}^{(i)} = \sum_{i=1}^N m^{(i)} \underline{v}^{(i)}$

On montre qu'elle est tout simplement égale à la quantité de mouvement du centre de masse du système de points.

- Le moment cinétique est une grandeur extensive et on a :

$$\underline{L}_0 = \sum_{i=1}^N \underline{L}_0^{(i)} = \sum_{i=1}^N \left(\underline{OM}^{(i)} \wedge m^{(i)} \underline{v}^{(i)} \right)$$

1.3.1.3 Efforts extérieurs et efforts intérieurs

On a précédemment introduit la notions d'efforts extérieurs $\underline{F}^{ext}$, qu'il convient maintenant de distinguer des efforts intérieurs $\underline{F}^{int}$ qui peuvent résulter d'interactions entre les différents points matériels. Ainsi le nœuds i est soumis à des efforts extérieurs sur ce point, et aux efforts intérieurs $\underline{F}^{(j \rightarrow i)}$ que peuvent exercer les $N-1$ autres points du système :

$$\underline{F}^{(i)} = \underline{F}^{(ext \rightarrow i)} + \underline{F}^{(int \rightarrow i)} = \underline{F}^{(ext \rightarrow i)} + \sum_{j \neq i} \underline{F}^{(j \rightarrow i)}$$

Les efforts totaux qui s'exercent sur le système de points s'écrivent donc :

$$\underline{F} = \underline{F}^{ext} + \underline{F}^{int} = \sum_{i=1}^N \underline{F}^{(ext \rightarrow i)} + \sum_{i=1}^N \underline{F}^{(int \rightarrow i)}$$

Il en serait évidemment de même pour le moment des efforts extérieurs et intérieurs. Or, par actions réciproques (3^{ème} loi de Newton « *les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et de sens contraires* ») on comprend aisément que la somme de tous les efforts intérieurs s'annule, et qu'on peut donc écrire :

$$\underline{F} = \underline{F}^{ext} = \sum_{i=1}^N \underline{F}^{(ext \rightarrow i)}$$

Par conséquent, on montre que les lois de **conservation de la quantité de mouvement** et de **conservation du moment d'inertie** sont toujours vérifiées dans le cas d'un système de N points.

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{p}}{dt} &= \sum \underline{F}^{ext} \\ \frac{d\underline{L}_0}{dt} &= \sum \mathfrak{M}_O(\underline{F}^{ext}) \end{aligned}$$

1.3.1.1 Extension au solide indéformable

Ce qui vient d'être dit précédemment s'étend facilement au cas d'un solide composé d'une infinité de points matériels. Les sommations qui viennent d'être faites deviennent maintenant des intégrales, de telle sorte que la masse du solide devienne par exemple :

$$M = \int_{\Omega} dm = \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad \text{où } \Omega \text{ est le volume du solide et } \rho \text{ sa masse volumique}$$

1.3.2. Rotation du solide autour d'un axe fixe

1.3.2.1 Moment d'inertie d'un solide

Reprenons la formule précédente concernant le moment cinétique d'un système de points matériels en l'adaptant à la nouvelle définition du corps solide :

$$\underline{L}_0 = \int_{\Omega} \underline{OM} \wedge \underline{v} dm$$

On obtient un *vecteur* moment cinétique calculé à partir du point O , centre du repère que l'on va considérer cylindrique étant donné que l'on étudie un solide en rotation.

Admettons que le solide soit en rotation autour d'un axe fixe d'axe $\underline{e}_z$ dans le repère cylindrique $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$. On peut alors chercher à calculer le moment cinétique autour de cet axe, c'est-à-dire à projeter le moment cinétique sur cet axe :

$$L_{0z} = \left(\int_{\Omega} \underline{OM} \wedge \underline{v} dm \right) \cdot \underline{e}_z$$

D'après les rappels de cinématique précédents, on peut réécrire ce terme en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} L_{0z} &= \left(\int_{\Omega} (r\underline{e}_r + z\underline{e}_z) \wedge \left(\dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta + \dot{z}\underline{e}_z \right) dm \right) \cdot \underline{e}_z \\ L_{0z} &= \int_{\Omega} \left(r^2 \dot{\theta} \underline{e}_z - r \dot{z} \underline{e}_\theta + z \dot{r} \underline{e}_\theta - z r \dot{\theta} \underline{e}_r \right) \cdot \underline{e}_z dm \\ L_{0z} &= \int_{\Omega} r^2 \dot{\theta} dm = \dot{\theta} \int_{\Omega} r^2 dm \end{aligned}$$

On vient donc d'introduire la notion de moment d'inertie I_{0z} par rapport à l'axe $(0, \underline{e}_z)$ en montrant que celui-ci est tel qu'on écrit le moment cinétique par rapport à cet axe :

$$L_{0z} = \dot{\theta} \int_{\Omega} r^2 dm = \dot{\theta} I_{0z}$$

Les valeurs de ces moments d'inerties pour quelques formes particulières (parallélépipèdes, cylindres, sphères) se trouvent aisément dans des tables.

Application à l'exemple introductif

Dans le cas du cylindre en rotation, on peut chercher à calculer explicitement le moment d'inertie du cylindre en développant l'intégrale :

$$I_{0z} = \int_{\Omega} r^2 dm = \int_0^R \int_0^L \int_0^{2\pi} r^2 \rho dV = \int_0^R \int_0^L \int_0^{2\pi} r^3 \rho dr d\theta dz = \rho \int_0^R \int_0^L \int_0^{2\pi} r^3 dr d\theta dz$$

$$I_{0z} = \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R [z]_0^L [\theta]_0^{2\pi} = \rho \frac{\pi L R^4}{2}$$

On trouve plus couramment une forme exprimée en fonction de sa masse $M = \rho \pi R^2 L$:

$$I_{0z} = \frac{MR^2}{2}$$

1.3.2.2 Moment d'une force par rapport à un axe

La rotation de ce solide autour de l'axe $(0, \underline{e}_z)$ peut être due à l'application d'un effort $\underline{F}$ au point M entraînant un moment autour de cet axe. On en profite pour introduire la notion de moment d'une force par rapport à un axe, qui est la projection du moment de la force $\underline{F}$ sur cet axe $(0, \underline{e}_z)$:

$$\mathfrak{M}_{0z}(\underline{F}) = (\underline{OM} \wedge \underline{F}) \cdot \underline{e}_z$$

$$\mathfrak{M}_{0z}(\underline{F}) = \left((r \underline{e}_r + z \underline{e}_z) \wedge (F_r \underline{e}_r + F_\theta \underline{e}_\theta + F_z \underline{e}_z) \right) \cdot \underline{e}_z$$

$$\mathfrak{M}_{0z}(\underline{F}) = (r F_\theta \underline{e}_z - r F_z \underline{e}_\theta + z F_r \underline{e}_\theta - z F_\theta \underline{e}_r) \cdot \underline{e}_z$$

$$\mathfrak{M}_{0z}(\underline{F}) = r F_\theta$$

Ce dernier résultat est le plus important : r correspond communément au « bras de levier », c'est-à-dire à la plus courte distance entre l'axe $(0, \underline{e}_z)$ et le point d'application de l'effort, tandis que F_θ correspond à la composante de l'effort qui fait entrer le solide en rotation.

Application à l'exemple introductif

Dans le cas du cylindre en soumis au seul couple $\underline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \underline{e}_z$ on a évidemment :

$$\mathfrak{M}_{Oz}(\underline{F}) = \underline{\mathcal{C}} \cdot \underline{e}_z = \mathcal{C}$$

1.3.2.1 Distribution des efforts

Un effort ponctuel appliqué au point M crée au point O le moment :

$$\mathfrak{M}_O(\underline{F}) = \underline{OM} \wedge \underline{F}$$

Est-il possible de calculer facilement le moment de cet effort en n'importe quel point P de l'espace ? La relation de Chasles nous permet d'écrire :

$$\mathfrak{M}_P(\underline{F}) = \underline{PM} \wedge \underline{F} = (\underline{PO} + \underline{OM}) \wedge \underline{F} = \underline{PO} \wedge \underline{F} + \underline{OM} \wedge \underline{F} = \underline{PO} \wedge \underline{F} + \mathfrak{M}_O(\underline{F})$$

Si on connaît le moment en un point de l'espace, on peut donc le calculer en n'importe quel point

$$\mathfrak{M}_P(\underline{F}) = \mathfrak{M}_O(\underline{F}) + \underline{PO} \wedge \underline{F}$$

Cette propriété de distribution des efforts nous rappelle fortement la propriété de distribution des vitesses vue précédemment.

1.3.2.2 Couple mécanique

On appelle *couple* $\underline{\mathcal{C}}$ un ensemble d'efforts dont la résultante est nulle mais dont le moment total est non nul. On montre facilement que la notion de couple (contrairement à la notion de moment vue précédemment) ne dépend pas du point considéré.

Démo : Considérons pour cela deux efforts $\underline{F}^{(1)}$ et $\underline{F}^{(2)}$ appliqués en deux points M et N et tels que $\underline{F}^{(1)} + \underline{F}^{(2)} = \underline{0}$, et calculons leur moment au point O :

$$\mathfrak{M}_O(\underline{F}^{(1)} + \underline{F}^{(2)}) = \underline{OM} \wedge \underline{F}^{(1)} + \underline{ON} \wedge \underline{F}^{(2)} \neq \underline{0}$$

Calculons le moment de ces deux mêmes efforts en un point P quelconque :

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_P(\underline{F}^{(1)} + \underline{F}^{(2)}) &= \underline{PM} \wedge \underline{F}^{(1)} + \underline{PN} \wedge \underline{F}^{(2)} \\ &= (\underline{PO} + \underline{OM}) \wedge \underline{F}^{(1)} + (\underline{PO} + \underline{ON}) \wedge \underline{F}^{(2)} \\ &= \underline{PO} \wedge (\underline{F}^{(1)} + \underline{F}^{(2)}) + \underbrace{\underline{OM} \wedge \underline{F}^{(1)} + \underline{ON} \wedge \underline{F}^{(2)}}_{\mathfrak{M}_O(\underline{F}^{(1)} + \underline{F}^{(2)})}\end{aligned}$$

CQFD.

1.3.2.3 Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation

Reprenons le théorème du moment cinétique énoncé précédemment :

$$\frac{d\underline{L}_O}{dt} = \sum \mathfrak{M}_O(\underline{F}^{ext})$$

Si on considère le solide en rotation autour de l'axe fixe $(0, \underline{e}_z)$ en raison de l'application d'un seul effort $\underline{F}$, on utilise les résultats précédents pour trouver :

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \frac{d(\dot{\theta} I_{Oz})}{dt} = r F_{\theta}$$

Si on généralise à plusieurs efforts extérieurs $\underline{F}^{ext(i)}$, et qu'on les associe à leurs bras de leviers $d^{(i)}$, on arrive alors au résultat :

$$\ddot{\theta} I_{Oz} = \sum_i d^{(i)} F_{\theta}^{(i)} = \sum_i \mathfrak{M}_{Oz}(\underline{F}^{(i)})$$

Le résultat de ce théorème constitue l'équivalent du **PFD** pour un solide en rotation autour d'un axe fixe en raison de l'applications des efforts extérieurs $\underline{F}^{ext(i)}$.

Application à l'exemple introductif

Dans le cas du cylindre en rotation, on a calculé précédemment :

$$I_{Oz} = \frac{MR^2}{2}$$

Le cylindre est uniquement soumis au couple $\underline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \underline{e}_z$ et on a par conséquent :

$$\ddot{\theta} I_{Oz} = \ddot{\theta} \frac{MR^2}{2} = \sum_i \mathfrak{M}_{Oz}(\underline{F}^{(i)}) = \mathcal{C} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{2\mathcal{C}}{MR^2}}$$

Ceci constitue l'équation du mouvement du cylindre en rotation. Le terme $\ddot{\theta}$ correspond à l'accélération angulaire et peut également s'exprimer comme la dérivée de la vitesse de rotation que l'on note $\Omega = \dot{\theta}$.

1.3.3. Cinématique du solide indéformable

1.3.3.1 Baqaqe mathématique : notion de champ de vecteurs ou de scalaires

On montre ci-dessous (Figure 5) deux exemples de *champs*, à travers un champ de température et un champ de vitesses. On comprend vite à partir de ces deux exemples une définition intuitive d'un champ de vecteurs vitesses : c'est une application qui, a un point de l'espace, associe un vecteur vitesse.

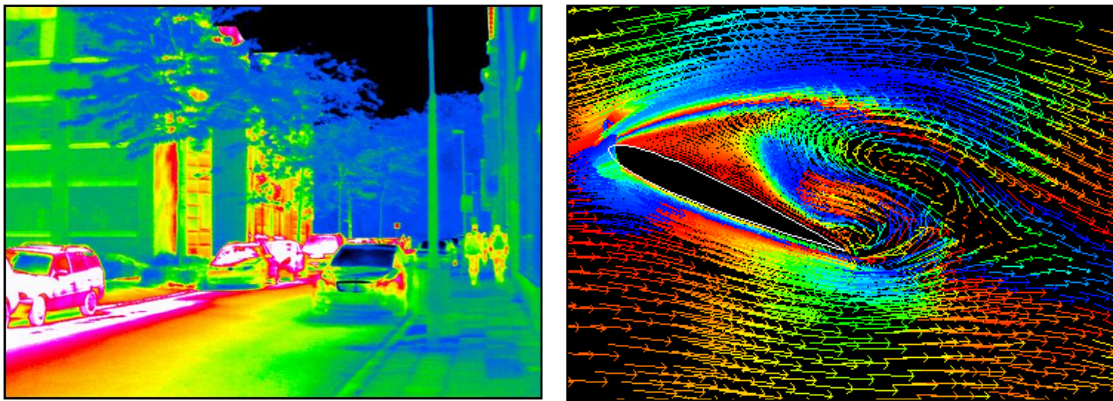


Figure 5: Exemples de champs. A gauche : champ de température (champ scalaire). A droite : profil des vitesses autour d'une aile (champ vectoriel).

Dans ce cas on note le champ de vitesses : $\underline{v}(\underline{x})$, avec $\underline{x}$ la position de n'importe quel point du solide.

1.3.3.2 Distribution des vecteurs vitesse

On va poser (sans la démontrer) la définition du champ de vecteur vitesses au sein d'un corps solide. Si l'on connaît le vecteur $\underline{\Omega}$, correspondant à la rotation du solide, alors on peut connaître la vitesse du point N appartenant au solide à partir de la vitesse du point M appartenant au solide en utilisant la relation primordiale :

$$\underline{v}(N) = \underline{v}(M) + \underline{NM} \wedge \underline{\Omega}$$

C'est la propriété de **distribution des vecteurs vitesse**.

- Vecteur rotation $\underline{\Omega}$: 3 degrés de liberté ; identique en tout point du solide
- Vecteur vitesse $\underline{v}$: 3 degrés de liberté du solide ; différent en chaque point du solide

NB : on peut regrouper ces deux vecteurs sous la forme d'un objet « torseur », de même que pour les forces et les moments. La notion de « torseur » ne sera pas utilisée dans ce cours, car non nécessaire à sa compréhension, et prêtant à confusion avec la notion de « tenseur » à venir.

Si le vecteur rotation $\underline{\Omega}$ est nul, on observe que tous les points ont la même vitesse : on dit alors que le corps est en *translation pure*.

On parle d'un mouvement de *rotation pure* s'il existe au moins un point du solide pour lequel le vecteur vitesse est nul.

Application à l'exemple introductif

On s'intéresse à nouveau au cas du cylindre en rotation autour d'un axe fixe $(0, \underline{e}_z)$. On a vu :

$$\underline{OM} = r\underline{e}_r + z\underline{e}_z$$

$$\underline{v} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta + \dot{z}\underline{e}_z$$

Sur l'axe, la vitesse est nulle et on a nécessairement $\underline{v}(O) = \underline{0}$.

On en déduit naturellement la vitesse en un point quelconque M :

$$\underline{v}(M) = \cancel{\underline{v}(O)} + \underline{MO} \wedge \underline{\Omega}$$

$$\underline{v}(M) = (-r\underline{e}_r - z\underline{e}_z) \wedge (\Omega_r \underline{e}_r + \Omega_\theta \underline{e}_\theta + \Omega_z \underline{e}_z) = -r\Omega_\theta \underline{e}_z + r\Omega_z \underline{e}_\theta - z\Omega_r \underline{e}_\theta + z\Omega_\theta \underline{e}_r$$

Par identification on obtient donc :

$$\begin{cases} \dot{r} = z\Omega_\theta \\ r\dot{\theta} = -z\Omega_r + r\Omega_z \\ \dot{z} = -r\Omega_\theta \end{cases}$$

Cette relation est vraie $\forall z$ ce qui implique $\Omega_\theta = 0$ et $\Omega_r = 0$ et donc : $\underline{\Omega} = \Omega_z \underline{e}_z = \dot{\theta} \underline{e}_z$

On en déduit une interprétation du vecteur rotation : sa direction constitue l'axe de rotation tandis que son intensité correspondant à la vitesse angulaire de rotation.

1.3.4. Dynamique du solide indéformable

1.3.4.1 Efforts extérieurs agissant sur un solide

On va distinguer ici les différents types d'efforts extérieurs pouvant agir sur un solide indéformable : efforts ponctuels, efforts linéiques, efforts surfaciques, pression et efforts volumiques (gravité ou champ magnétique).

- un **effort ponctuel** $\underline{F}$ a la dimension d'un effort (N) et possède un point d'application M . Au point O , il crée le moment :

$$\mathcal{M}_O(\underline{F}) = \underline{OM} \wedge \underline{F}$$

- un **effort linéique** $\underline{F}^L$ s'exprime en $N.m^{-1}$ et s'applique sur une ligne. On l'utilise en particulier en résistance des matériaux pour modéliser une charge (comme la neige) répartie le long d'une poutre. La résultante de cet effort s'écrit:

$$\underline{F} = \int_L \underline{F}^L dl$$

où dl représente un élément de ligne infinitésimal.

- un **effort surfacique** $\underline{F}^S$ s'exprime en $N.m^{-2}$ et s'applique sur la surface du solide. On peut l'utiliser pour modéliser une charge (comme la neige) répartie sur un toit. La résultante de cet effort s'écrit :

$$\underline{F} = \int_{\partial\Omega} \underline{F}^S dS$$

où $\partial\Omega$ est la frontière du solide et dS l'élément de surface.

- une **pression** p s'exprime également en $N.m^{-2}$ et représente **la norme** de l'effort surfacique qui s'applique dans la direction de la normale *entrante* de la surface du solide. C'est donc une quantité *scalaire* et non *vectorielle*, par définition nécessairement *positive*. La résultante de la pression s'exprime tout naturellement:

$$\underline{F} = \int_{\partial\Omega} -p \underline{n} dS \text{ avec } \underline{n} \text{ la normale } \textit{sortante}$$

- un **effort volumique** $\underline{F}^V$ s'exprime en $N.m^{-3}$ et s'applique en tout point du volume du solide. C'est donc une action à distance, comme la gravité ou le champ magnétique. La résultante de cet effort s'écrit :

$$\underline{F} = \int_{\Omega} \underline{F}^V d\Omega$$

où $d\Omega$ est un élément de volume infinitésimal.

1.3.4.2 Principe fondamental de la dynamique (PFD)

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la mécanique du solide indéformable est une combinaison de la conservation de la quantité de mouvement de son centre de masse (considéré alors comme un point matériel) et du théorème du moment cinétique. Comme précédemment on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{p}}{dt} &= \sum \underline{F}^{ext} \\ \frac{d\underline{L}_O}{dt} &= \sum \mathfrak{M}_O(\underline{F}^{ext}) \end{aligned}$$

où les efforts et moments peuvent résulter d'efforts ponctuels, linéiques, surfaciques ou volumiques.

1.3.5. Cas particulier : problèmes de statique

1.3.5.1 Principe fondamental de la statique (PFS)

Dans le cas où un solide indéformable est en équilibre, il y a conservation de sa quantité de mouvement ainsi que de son moment cinétique. On en déduit le couple de deux équations fondamentales suivant :

Equation fondamentale 1-2 : PFS pour un solide indéformable

$$\begin{aligned} \underline{0} &= \sum \underline{F}^{ext} \\ \underline{0} &= \sum \mathfrak{M}_O(\underline{F}^{ext}) \quad \forall O \end{aligned}$$

A retenir 1-3

Enoncé autrement : la somme des efforts et la somme des moments (quel qu'en soit le point d'application) qui s'appliquent à un solide indéformable à l'équilibre sont nulles.

1.3.5.1 Résolution par statique graphique pour les problèmes plans

Dans les cas simples auxquels sera confronté l'ingénieur, il arrive régulièrement qu'on ait recours au cas d'un solide soumis à **trois** forces dans le même plan. Dans ce cas, il est facile de montrer que :

- les trois efforts forment un triangle fermé (Figure 6) (car la somme vectorielle des efforts est nulle)
- les trois droites d'action des efforts sont parallèles **ou** concourantes (Figure 6).

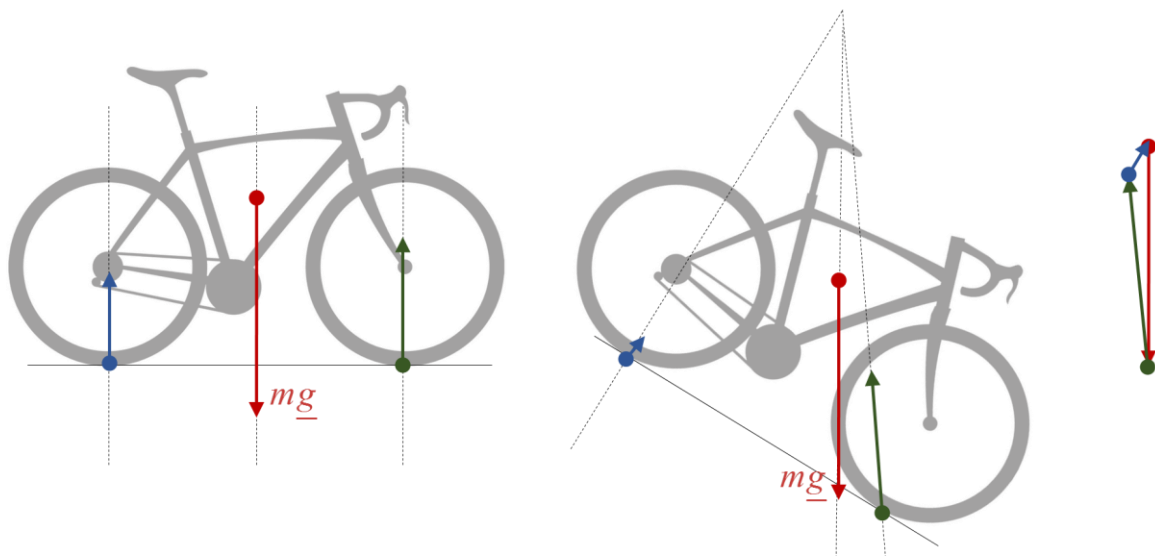


Figure 6: Statique graphique pour le cas d'un vélo à l'arrêt à plat (gauche) ou en pente (droite), ne freinant que de la roue avant. Les trois droites d'actions des forces peuvent être parallèles (gauche) ou concourantes (droite), et les trois efforts forment un triangle fermé.

On retrouverait évidemment les mêmes résultats en posant le système d'équation :

$$\begin{aligned}\underline{0} &= \sum \underline{F}^{ext} \\ \underline{0} &= \sum \mathcal{M}_O(\underline{F}^{ext}) \quad \forall O\end{aligned}$$

1.4. Présentation de la mécanique des milieux continus

1.4.1. Positionnement et déroulement des chapitres suivants

Les rappels de mécanique du point qui viennent d'être faits sont suffisants pour décrire certains phénomènes (trajectoires des planètes par exemple), et ont été complétés par des rappels de mécanique du solide indéformable qui permet d'en décrire davantage (mouvement et équilibre des structures rigides par exemple). Cependant, ces rappels ne permettent pas de traiter des phénomènes tels que la **mise en forme** d'une bouteille de verre ou l'**écoulement** de l'air autour d'une aile d'avion.

Un cadre plus général est donc nécessaire afin de traiter ce type de problématique: la **mécanique des milieux continus** (MMC) offre un cadre physique et mathématique permettant de résoudre des problèmes faisant intervenir **la déformation de corps soumis à un environnement mécanique donné**. Les simulations numériques, aujourd'hui très utilisées pour le calcul de structures et le dimensionnement de pièces mécaniques ou la modélisation des écoulements, ne doivent leur succès qu'à la **capacité de la MMC de décrire les relations qui régissent la déformation d'un corps soumis à un environnement mécanique**. La maîtrise de cette discipline, et des hypothèses qui peuvent ou ne peuvent pas être formulées selon le phénomène à décrire, est donc un **fondement nécessaire à l'ingénieur** qui sera amené à manipuler de tels outils.

On se portera dans un premier temps à étudier la **cinématique** du milieu continu (en introduisant la notion fondamentale de déformation) puis sur sa **dynamique** (en introduisant la notion non moins fondamentale de *contrainte*), avant d'étudier les cas particuliers des matériaux **solides** et **fluides** et leurs comportements. Les éléments mathématiques nécessaires au développement du raisonnement seront présentés *au fil de l'eau*, en appliquant directement chaque nouvelle notion mathématique.

1.4.2. Qu'est-ce qu'un milieu continu ?

La matière qui constitue les fluides et solides qui nous entourent est évidemment de **nature discrète** à l'échelle microscopique. Seulement, si on se place à une échelle suffisamment grande par rapport aux hétérogénéités de la matière, celle-ci peut être traitée comme un **milieu continu** : c'est une image de la réalité (Figure 7).

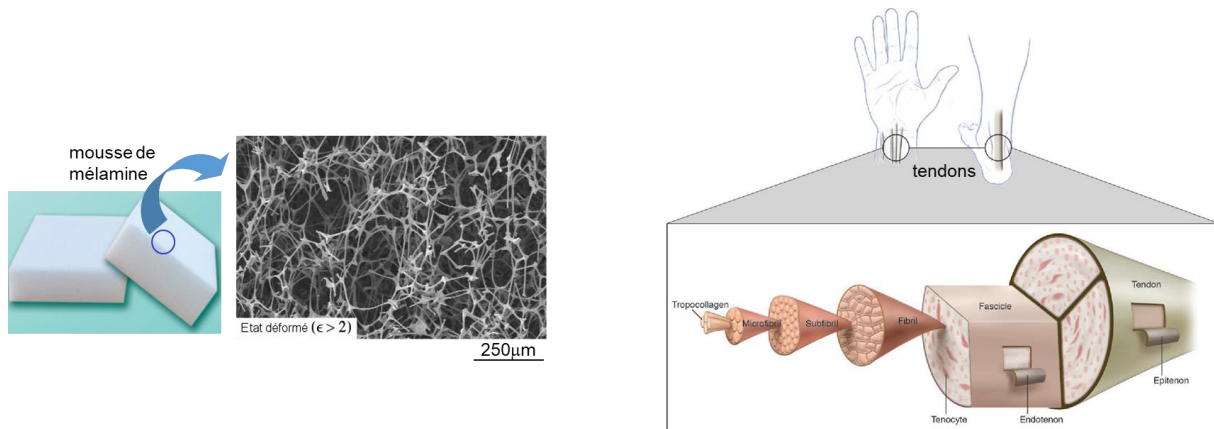


Figure 7 : Certains milieux peuvent être considérés continus à une certaine échelle, mais restent discontinus d'un point de vue microscopique. A gauche : une mousse de polymère ; à droite : un tendon.

Si on prend en revanche une échelle « trop » macroscopique, nous ne pouvons plus prétendre à exprimer l'état **local** de la matière, et on « moyenne » excessivement les hétérogénéités de l'état mécanique au sein du matériau.

L'hypothèse de milieu continu n'est donc valide qu'à condition de se placer à une échelle « **suffisamment grande** » pour que les variations locales des champs dues à l'hétérogénéité de la matière ne soient pas « observables », mais « **suffisamment petite** » pour pouvoir parler de matière et non d'un système matériel. On se doute bien que cette définition déjà floue devient réellement problématique lorsqu'il s'agit d'étudier un milieu composite ou granulaire...

Les matériaux (**fluides ou solides**, la distinction ne viendra qu'à la fin du cours de ce cours d'introduction) qui seront abordés seront considérés **homogènes** à l'échelle d'un **Volume Élémentaire Représentatif (VER)**, dont la taille dépend du type de matériau que l'on considère.

1.4.3. Quelles sont les applications ?

Comme souligné ci-dessus, la **simulation numérique** a pris une place conséquente dans les missions de l'ingénieur actuelles. Ces simulations n'ont de sens cependant que si une **validation** par l'expérience vient valider les résultats obtenus. Ce cours sera donc tourné vers l'apprentissage des outils nécessaires à **poser proprement le problème** avant de réaliser de telles simulations, et à **comprendre les résultats** qui en seront issus. Les méthodes numériques et les codes de calculs nécessaires seront vu ultérieurement dans le cursus ENSEM.

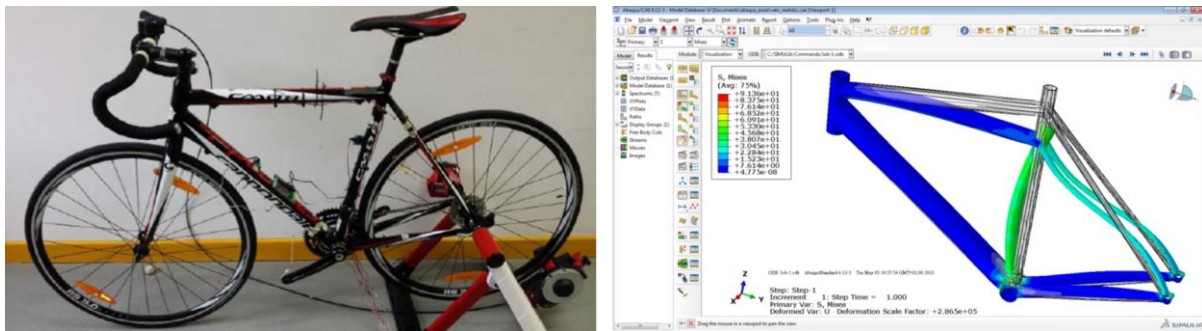
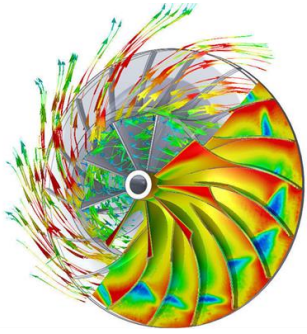


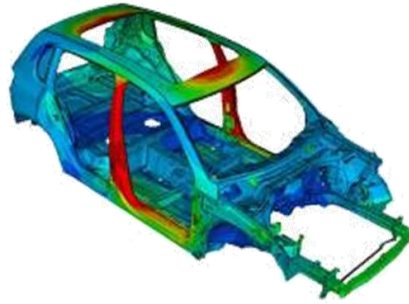
Figure 8 : Exemple d'étude réalisé à l'ENSEM en 2A et/ou 3A : étude expérimentale (gauche) et numérique (droite) de la déformation d'un cadre de vélo. Ces deux aspects nécessitent les notions de MMC qui seront abordés dans ce cours.

Une attention particulière sera également apportée à l'étude **d'essais expérimentaux** permettant de valider de telles simulations, ou permettant de **caractériser le comportement** des matériaux étudiés.

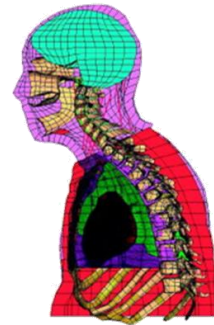
Les applications de ce type d'études en **recherche** ou dans l'**industrie** sont nombreuses : quelques exemples sont donnés ci-dessous et serviront d'illustrations aux concepts théoriques abordés dans ce cours.



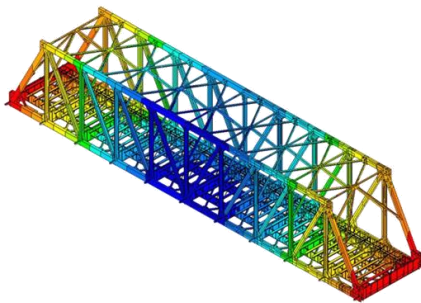
Etude de l'écoulement d'eau autour d'une turbine



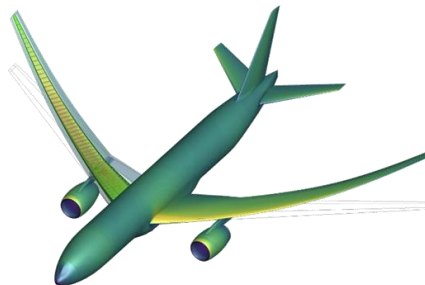
Dimensionnement d'un châssis d'automobile



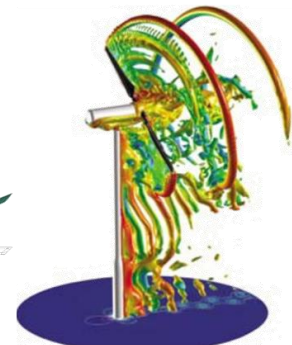
Modèle biomécanique pour l'analyse de risque de blessure



Dimensionnement d'une structure en treillis pour le génie civil



Etude de la flexion d'ailes d'avion



Etude de l'écoulement d'air autour d'une éolienne

Figure 9 : Quelques exemples d'applications industrielles nécessitant les notions de mécanique de milieux continus abordées dans ce cours.

Résumé du CHAPITRE 1 : ce qu'il faut savoir

- ✓ **Géométrie** dans des repères cartésiens, cylindriques, sphériques
- ✓ Changement de **base**
- ✓ Ecriture des **vecteurs position, vitesse** et **accélération**
- ✓ **Hypothèses** de la mécanique du **point** et de la mécanique du solide **indéformable**
- ✓ **Distribution** des vecteurs vitesses et calculs des **moments**
- ✓ Principe fondamentale de la **statique (PFS)**
- ✓ Principe fondamental de la **dynamique (PFD)**
- ✓ Conservation du **moment cinétique**
- ✓ Positionnement et hypothèses de la **Mécanique des Milieux Continus (MMC)**

Bagage mathématique associé

- ✓ Calcul **différentiel**
- ✓ Géométrie **vectorielle**

2. Cinématique du milieu continu

Exemple introductif 2-1 :

Nous allons traiter un exemple de transformation dans le plan, qui transforme l'objet en jaune ci-dessous (un carré de côté 1) en l'objet vert (un losange *décalé* par rapport à l'objet initial et dont la forme à changer).

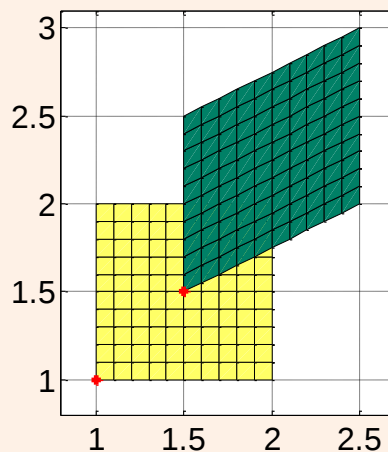


Figure 10 : Exemple de transformation plane.

Tout l'objet de ce chapitre consiste à répondre aux différentes questions suivantes :

- comment décrire proprement la transformation entre les deux objets ?
- comment décrire la position, la vitesse, l'accélération des points qui les composent ?
- comment décrire le changement de forme qui s'opère ?

2.1. Bagage mathématique : notions de calcul tensoriel

Dans la suite on va devoir traduire la façon dont le champ de vecteur déplacement (ou position) varie dans l'espace : cela pourra se faire en calculant le **gradient** du champ de déplacement, qui va se traduire par un objet mathématique inconnu : le **tenseur**.

On se propose dans ce cours d'introduction d'en faire une présentation très brève, et on verra qu'on peut vite utiliser les **matrices** pour manipuler les tenseurs d'ordre 2 qui vont nous intéresser dans ce cours. On en profitera au passage pour faire quelques rappels de calcul matriciel.

2.1.1. Définition du produit tensoriel de deux vecteurs

2.1.1.1 Définition générale du produit tensoriel

Afin de construire l'objet *tenseur*, il peut être utile de définir en premier lieu l'opération mathématique appelée **produit tensoriel** notée $\otimes$ qui peut être effectuée dans le cas général entre deux espaces vectoriels de natures différentes. Ainsi, nous nous restreindrons à des vecteurs appartenant à $\mathbb{R}^3$. Pour qu'on puisse la désigner comme « produit » cette opération doit respecter les règles suivantes :

→ distributivité de $\otimes$ par rapport à $+$ et réciproquement :

$$\forall (\underline{x}, \underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{x} \otimes (\underline{y}_1 + \underline{y}_2) = \underline{x} \otimes \underline{y}_1 + \underline{x} \otimes \underline{y}_2 \\ (\underline{y}_1 + \underline{y}_2) \otimes \underline{x} = \underline{y}_1 \otimes \underline{x} + \underline{y}_2 \otimes \underline{x} \end{array} \right.$$

→ associativité de $\otimes$ par rapport au produit extérieur :

$$\forall (\underline{x}, \underline{y}, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \quad (\alpha \underline{x}) \otimes \underline{y} = \underline{x} \otimes (\alpha \underline{y}) = \alpha (\underline{x} \otimes \underline{y})$$

Ces propriétés n'expriment ni plus ni moins que la bilinéarité du produit tensoriel. On introduit enfin le fait que le produit tensoriel $\underline{x} \otimes \underline{y}$ crée un élément appartenant à l'espace $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$, produit tensoriel de l'espace $\mathbb{R}^3$ par lui-même. On définit une base de cet espace de la façon suivante :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x} \text{ est écrit dans la base } \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \\ \underline{y} \text{ est écrit dans la base } \underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^* \end{array} \right\} \quad \underline{x} \otimes \underline{y} \text{ a pour base } \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j^*$$

2.1.1.2 Expression analytique de $\underline{x} \otimes \underline{y}$

D'après ce qui précède, on peut écrire les composantes des vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{y}$:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x} = x_i \underline{e}_i \\ \underline{y} = y_j \underline{e}_j^* \end{array} \right\} \quad \underline{x} \otimes \underline{y} = (x_i \underline{e}_i) \otimes (y_j \underline{e}_j^*) = x_i y_j (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j^*)$$

Si on fait varier les indices de 1 à 3 comme la convention d'Einstein (section 1.1.2.1) le permet, on remarque que ce produit possède 9 composantes sur la base de $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ qui peuvent être mises sous la forme suivante:

$$\underline{x} \otimes \underline{y} = x_i y_j (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j^*) = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j^*$$

dans le cas où $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont écrits dans des bases différentes $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ et $(\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^*)$.

Exemple 2-2

Exemple simple : prenons deux vecteurs orthogonaux exprimés dans la même base : $\underline{x} = 2\underline{e}_1$ et $\underline{y} = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$. On peut écrire le produit tensoriel :

$$\underline{x} \otimes \underline{y} = (2\underline{e}_1) \otimes (\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2) = 2\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 4\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2$$

2.1.1.3 Tenseur

Les notions qui précèdent s'étendent de manière évidente au cas où plus de deux vecteurs sont multipliés *tensoriellement*. On peut par exemple multiplier la quantité $\underline{x} \otimes \underline{y}$ par $\underline{z} \in \mathbb{R}^3$ de la façon suivante :

$$(\underline{x} \otimes \underline{y}) \otimes \underline{z} = \underline{x} \otimes (\underline{y} \otimes \underline{z}) = \underline{x} \otimes \underline{y} \otimes \underline{z} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$$

Une première définition mathématique d'un tenseur pourra donc être formulée comme suit :

A retenir 2-1

On appelle tenseur d'ordre n sur $\mathbb{R}^3$ tout l'élément de l'espace $\underbrace{\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^3}_n$

Lorsque l'ordre n du tenseur n'est « pas trop grand », on le soulignera un nombre de fois qui correspond à son ordre. Par exemple pour l'ordre 3:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{x} \otimes \underline{y} \otimes \underline{z} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$$

D'après la définition ci-dessus, on peut facilement déduire qu'un **vecteur est un tenseur d'ordre 1** puisqu'il appartient à l'espace $\mathbb{R}^3$: on le soulignera une seule fois.

On pourra également dire qu'un **scalaire est un tenseur d'ordre 0** qui appartient à l'espace $\mathbb{R}$: il ne sera donc pas souligné.

Dans la suite, un tenseur d'ordre n quelconque sera noté $\mathbf{T}^n$.

Exemple 2-3

Si les trois vecteurs $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ sont écrits dans la même base $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$, on peut par exemple écrire le produit :

$$\underline{\underline{T}} = \underline{x} \otimes \underline{y} \otimes \underline{z} = x_i \underline{e}_i \otimes y_j \underline{e}_j \otimes z_k \underline{e}_k = x_i y_j z_k \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \quad \text{qui possède 27 composantes.}$$

$$T_{ijk}$$

2.1.2. Ecriture matricielle d'un tenseur d'ordre 2

On a rappelé précédemment qu'un vecteur $\underline{x}$ était un **objet intrinsèque** (cas d'un vecteur-vitesse par exemple) qui a une existence physique séparée du repère qui est choisi pour décrire le référentiel. Les **composantes** de ce vecteur, projetées sur la base choisie pour décrire le référentiel, peuvent être écrites sous la forme d'un vecteur-colonne (ou matrice 3x1) :

$$[\underline{x}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La notation $[\underline{x}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}$ signifie donc « matrice des composantes du vecteur $\underline{x}$ dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ ».

Dans la suite, un tenseur sera également relié à une **quantité physique indépendante du repère dans lequel il est décrit**, c'est-à-dire qu'un tenseur est un **objet intrinsèque**. Dans le cas où on utilise une unique base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, on peut écrire :

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

La sommation sur i et j implique que le tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{T}}$ possède **9 composantes** dans le cas général, et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}} = & T_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + T_{12} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + T_{13} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \dots \\ & T_{21} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + T_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + T_{23} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \dots \\ & T_{31} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 + T_{32} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2 + T_{33} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \end{aligned}$$

Ainsi, **dans ce repère** $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, les **composantes** de ce tenseur d'ordre 2 peuvent être organisées sous la forme d'une matrice.

Par convention, le premier indice de T_{ij} correspond à la **ligne** de la matrice et le second indice à la **colonne** de cette matrice. On peut donc écrire les composantes du tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{T}}$ sous la forme :

$$[\underline{\underline{T}}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \text{Mat}\left(\underline{\underline{T}}, (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)\right) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

Il est essentiel en toute rigueur d'indiquer la base dans laquelle ces composantes sont écrites. On pourra lire « matrice des composantes du tenseur $\underline{T}$ dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ ». Néanmoins, lorsque **la base dans laquelle $\underline{T}$ est écrit est évidente**, on pourra s'abstenir de cette précision et noter uniquement cette matrice $[\underline{T}]$.

A retenir 2-2

Lors d'un changement de base, les **composantes** du tenseur vont naturellement changer, de même que la **matrice** qui le représente dans cette base : néanmoins, la **quantité physique** décrite par le tenseur va rester inchangée.

Dans ce cours d'introduction, on se placera **toujours en début de problème dans une base donnée**. Par conséquent on va se permettre de « **confondre** » les notions de **tenseur d'ordre 2** et de **matrice des composantes du tenseur**.

2.1.3. *Rappels de calcul matriciel*

Comme on vient de voir que les composantes d'un tenseur d'ordre 2 peuvent s'organiser au sein d'une matrice 3x3 (en dimension 3), il peut paraître utile de faire quelques rappels de notions de base de calcul matriciel.

2.1.3.1 Définition et notations

On utilisera dans cette section la notation suivante : $\mathbf{M}$ est un élément de l'espace $\mathcal{M}_{np}$ et désigne une **matrice** à n lignes et p colonnes . Cette matrice $\mathbf{M}$ est constituée d'éléments que l'on notera m_{ij} lorsqu'il est situé à la i -ème ligne et la j -ème colonne.

Sans rentrer dans les détails mathématiques, l'espace des matrices $\mathcal{M}_{np}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel : on peut additionner les matrices, et distribuer le produit par un scalaire λ de telle sorte que :

$$\lambda (\mathbf{M} + \mathbf{N})_{ij} = \lambda m_{ij} + \lambda n_{ij}$$

On organise les éléments m_{ij} sous forme d'un tableau à n lignes et p colonnes.

Exemple 2-4

La matrice suivante appartient à l'espace $\mathcal{M}_{23}$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ -2 & 15 & 12 \end{pmatrix} \text{ et dans ce cas par exemple } m_{21} = -2$$

Si de plus on a $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ on a alors $2\mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 4 & -10 & 30 \\ -3 & 29 & 24 \end{pmatrix}$

Lorsque la matrice appartient $\mathcal{M}_{1n}$ on parle de **matrice-ligne**.

Lorsque la matrice appartient $\mathcal{M}_{n1}$ on parle de **matrice-colonne**. On utilise en général cette forme $\mathcal{M}_{n1}$ pour représenter les composantes d'un vecteur dans $\mathbb{R}^n$.

Enfin, on appelle **matrice carrée** une matrice qui possède le même nombre de lignes et de colonnes, c'est-à-dire appartenant à $\mathcal{M}_{nn}$.

2.1.3.1 La somme matricielle

L'opérateur somme est défini entre deux matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ de mêmes dimensions, appartenant à l'espace $\mathcal{M}_{np}$. La somme entre les deux matrices appartient également à $\mathcal{M}_{np}$, et s'obtient simplement en sommant chacune des composantes de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$:

$$(\mathbf{M} + \mathbf{N})_{ij} = \mathbf{M}_{ij} + \mathbf{N}_{ij}$$

2.1.3.2 Le produit matriciel

Le produit matriciel entre $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ est bilinéaire (i.e. linéaire par rapport à $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$) et il est associatif (c'est-à-dire que $(\mathbf{MN})\mathbf{L} = \mathbf{M}(\mathbf{NL})$).

Si $\mathbf{M}$ appartient à $\mathcal{M}_{np}$ et $\mathbf{N}$ appartient à $\mathcal{M}_{pq}$ (notons bien que l'indice p est le même), le produit $\mathbf{MN}$ appartient à $\mathcal{M}_{nq}$ et le terme (i, j) du produit $\mathbf{MN}$ vaut :

$$(\mathbf{MN})_{ij} = \sum_{k=1}^p m_{ik} n_{kj}$$

Dans le cas où on se trouvera en dimension 3 avec des matrices carrées 3x3, on pourra alors utiliser la convention d'Einstein de telle sorte que :

$$(\mathbf{MN})_{ij} = \sum_{k=1}^3 m_{ik} n_{kj} = m_{ik} n_{kj}$$

Exemple 2-5

Soient les matrices suivantes appartenant à $\mathcal{M}_{23}$ et $\mathcal{M}_{31}$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ -2 & 15 & 12 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Le produit $\mathbf{MN}$ appartient à l'espace $\mathcal{M}_{21}$ et on a par exemple :

$$(\mathbf{MN})_{21} = \sum_{k=1}^3 m_{2k} n_{k1} = m_{21} n_{11} + m_{22} n_{21} + m_{23} n_{31} = -2 \times 4 + 15 \times 0 + 12 \times 10 = 112$$

2.1.3.3 Transposée d'une matrice

Si $\mathbf{M}$ appartient à $\mathcal{M}_{np}$, alors sa **transposée** notée $\mathbf{M}^T$ appartient à l'espace $\mathcal{M}_{pn}$ et on a la relation :

$$(\mathbf{M}^T)_{ij} = (\mathbf{M})_{ji}$$

Il est facile de montrer que la transposée d'un produit de deux matrices s'écrit :

$$(\mathbf{MN})^T = \mathbf{N}^T \mathbf{M}^T$$

De la même façon on montre aisément que $(\mathbf{M}^T)^T = \mathbf{M}$

Une matrice est dite **symétrique** si $m_{ij} = m_{ji}$: il est donc évident que la transposée d'une matrice symétrique est égale à la matrice elle-même.

Une matrice est dite **antisymétrique** si $m_{ij} = -m_{ji}$: il est donc évident que la transposée d'une matrice antisymétrique est égale à la **l'opposé** de matrice elle-même.

2.1.3.4 Matrice identité

La matrice identité est l'**élément neutre** de la multiplication matricielle dans l'espace des matrices carrées.

On la note $\mathbf{I}$, et donc par définition : $\mathbf{M} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M}$.

On montre facilement que les éléments de cette matrice sont :

$$(\mathbf{I})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Dans le cas où tous les éléments d'une matrice sont nuls lorsque $i \neq j$, on parle de **matrice diagonale** : la **matrice identité** est donc diagonale. Par exemple, pour l'espace $\mathcal{N}_{33}$ elle s'écrit :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.3.5 Trace d'une matrice

La **trace** d'une matrice carrée notée $tr(\mathbf{M})$ est la **somme** de ses éléments diagonaux, c'est-à-dire :

$$\mathbf{M} \in \mathcal{N}_{nn} \quad tr(\mathbf{M}) = \sum_{k=1}^n m_{kk} = m_{11} + m_{22} + \dots + m_{nn}$$

On montre donc facilement par exemple que la trace de la matrice identité de dimension 3 est égale à 3.

2.1.3.6 Déterminant d'une matrice et matrice inverse

Le calcul du **déterminant** d'une matrice carrée noté $\det \mathbf{M}$ est nécessaire pour vérifier son **inversibilité**. On s'intéressera ici uniquement au calcul des déterminants des matrices appartenant à $\mathcal{N}_{22}$ et $\mathcal{N}_{33}$.

Pour calculer le déterminant d'une matrice appartenant à $\mathcal{N}_{nn}$, une figure explique davantage qu'une longue phrase :

$$\det \mathbf{M} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}$$

$$\det \mathbf{M} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} = m_{11}m_{22}m_{33} + m_{12}m_{23}m_{31} + m_{21}m_{32}m_{13} - m_{31}m_{22}m_{13} - m_{21}m_{12}m_{33} - m_{32}m_{23}m_{11}$$

On énonce (sans démonstration ici) que, **si le déterminant d'une matrice est non nulle**, alors cette matrice est **inversible**. La **matrice inverse** de $\mathbf{M}$ est notée $\mathbf{M}^{-1}$, et on a la propriété suivante :

$$\text{si } \det M \neq 0 \text{ alors il existe } \mathbf{M}^{-1} \text{ telle que } \mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I}$$

2.1.4. Quelques opérations sur les tenseurs

2.1.4.1 Récapitulatif des opérations utilisées

Les différents rappels qui viennent d'être faits sur les matrices permettent de constituer le tableau suivant concernant les quelques opérations qui seront régulièrement faits sur les tenseurs :

Opération	Notation tensorielle	Ecriture matricielle
Addition	$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$	$S_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$
Multiplication tensorielle entre $\underline{x} = x_i \underline{e}_i$ et $\underline{y} = y_i \underline{e}_i$	$\underline{\underline{T}} = \underline{x} \otimes \underline{y}$	$T_{ij} = x_i y_j$ $[\underline{\underline{T}}] = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix}$
Produit scalaire (ou « produit contracté ») entre deux tenseurs $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$	$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$ $\underline{\underline{P}} \neq \underline{\underline{Q}}$	$P_{ik} = A_{ij} B_{jk}$ $Q_{ik} = B_{ij} A_{jk}$
Produit scalaire entre le tenseur $\underline{\underline{A}}$ et le vecteur $\underline{b}$	$\underline{p} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{b}$ $\underline{q} = \underline{b} \cdot \underline{\underline{A}}$ $\underline{p} \neq \underline{q}$	$p_i = A_{ij} b_j \Rightarrow \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ $q_j = b_i A_{ij} \Rightarrow \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
Trace du tenseur $\underline{\underline{A}}$	$Tr(\underline{\underline{A}})$	$Tr(\underline{\underline{A}}) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$
Tenseur identité	$\underline{\underline{I}}$	$[\underline{\underline{I}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Déterminant du tenseur $\underline{\underline{A}}$	$\det \underline{\underline{A}}$	$\det \underline{\underline{A}} = \det [\underline{\underline{A}}] = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$
Inverse du tenseur $\underline{\underline{A}}$	$\underline{\underline{A}}^{-1}$	matrice $[\underline{\underline{A}}]^{-1}$ telle que : $[\underline{\underline{A}}] \cdot [\underline{\underline{A}}]^{-1} = [\underline{\underline{A}}]^{-1} \cdot [\underline{\underline{A}}] = [\underline{\underline{I}}]$
Transposé du tenseur $\underline{\underline{A}}$	$\underline{\underline{A}}^T$	$[\underline{\underline{A}}]^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

Tableau 1 : opérations sur les tenseurs.

Exemple 2-6

Calculons par exemple le déterminant du tenseur $\underline{\underline{T}}$ défini comme suit :

$$\underline{\underline{T}} = 2\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 4\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 3\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

La matrice représentative de ce tenseur s'écrit : $\left[\underline{\underline{T}}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Le déterminant de $\underline{\underline{T}}$ se calcule donc de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \det \underline{\underline{T}} = \det \left[\underline{\underline{T}}\right] &= T_{11}T_{22}T_{33} + \cancel{T_{12}T_{23}T_{31}} + \cancel{T_{13}T_{21}T_{32}} - \cancel{T_{13}T_{22}T_{31}} - \cancel{T_{12}T_{21}T_{33}} - \cancel{T_{11}T_{23}T_{32}} \\ &= T_{11}T_{22}T_{33} = 6 \end{aligned}$$

Exemple 2-7

Tentons ici de prouver un résultat qui sera utilisé à plusieurs reprises dans la suite: $\underline{b} \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{b}$

Cherchons tout d'abord à calculer la transposée d'un produit :

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \Rightarrow T_{ik} = A_{ij}B_{jk}$$

$$\underline{\underline{T}}^T = (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^T \Rightarrow \left(\underline{\underline{T}}^T\right)_{ki} = A_{ij}B_{jk} = B_{jk}A_{ij} = \left(\underline{\underline{B}}^T\right)_{kj} \cdot \left(\underline{\underline{A}}^T\right)_{ji} \Rightarrow \underline{\underline{T}}^T = \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{A}}^T$$

Ce résultat permet de montrer: $\underline{\underline{T}}^T = \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{A}}^T$

Appliquons cette règle au cas du produit d'un vecteur par un tenseur d'ordre 2 :

$$\underline{a} = \underline{b} \cdot \underline{\underline{T}} \Rightarrow [\underline{a}]^T = ([\underline{b}] \cdot [\underline{\underline{T}}])^T = [\underline{\underline{T}}]^T \cdot [\underline{b}]^T = \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{b}$$

On vient donc bien de montrer: $\underline{b} \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{b}$

Dit autrement : on peut indifféremment placer un vecteur d'un côté ou de l'autre du produit scalaire avec un tenseur d'ordre 2 à condition de transposer ce tenseur .

2.1.5. Les tenseurs d'ordre 2 comme « application linéaire »

Au sens du produit de deux tenseurs d'ordre 2 défini ci-dessus, **un tenseur d'ordre 2 peut être vu comme l'application linéaire :**

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}} &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \underline{x} &\rightarrow \underline{\underline{T}} \cdot \underline{x} \end{aligned}$$

En ce sens, un tenseur d'ordre 2 est un **objet intrinsèque** qui permet de « transformer un vecteur en un autre vecteur ».

2.1.6. Opérateur « gradient »

2.1.6.1 Champ de tenseurs

La définition de champs **scalaires** et **vectoriels** a déjà été rappelée ci-dessus. Par extension, on définira par un **champ de tenseurs** ou **champ tensoriel** une application qui va d'un ouvert Ω de l'espace physique (typiquement le volume du milieu que l'on va considérer) vers l'espace vectoriel d'un certain ordre (dans l'exemple ci-dessus d'ordres 0 et 1).

Cette définition étant prise, en identifiant un point M quelconque de l'ouvert Ω à son vecteur position $\underline{x} = \underline{OM}$, on peut poser qu'un champ de tenseurs est une fonction qui à tout $\underline{x}$ associe le tenseur $\mathbf{T}^n(\underline{x})$ d'ordre n :

$$\underline{x} \in \Omega \rightarrow \mathbf{T}^n(\underline{x}) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^3$$

Dans la suite, on pourra pour alléger la notation utiliser l'expression $\mathbf{T}^n$ plutôt que $\mathbf{T}^n(\underline{x})$: il ne faudra cependant pas perdre de vue qu'il s'agit bien d'un **champ de tenseurs**, et donc qu'il existe un tenseur *a priori* différent pour chaque point de Ω .

2.1.6.2 Opérateur Nabla

Il peut être utile pour la suite d'introduire ici l'**opérateur Nabla** qui a pour définition :

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i \quad \text{ou encore} \quad [\underline{\nabla}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

On a précisé dans cette notation le repère **cartésien** dans lequel on a écrit l'opérateur nabla.

On peut par exemple calculer la quantité suivante (a étant un scalaire quelconque):

$$[\underline{\nabla}a]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = a[\underline{\nabla}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Ces notations sont évidentes en coordonnées **cartésiennes**. En revanche, pour des systèmes de coordonnées **cylindriques** ou **sphériques** qui « tournent avec le point », les dérivées doivent prendre en compte ce mouvement du repère.

Ainsi, on montre qu'en **coordonnées cylindriques** cet opérateur s'écrit :

$$[\underline{\nabla}]_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

De même, en **coordonnées sphériques** il s'écrit :

$$[\underline{\nabla}]_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

2.1.6.3 Gradient d'un champ de scalaires

Si l'on applique l'opérateur **nabla** ci-dessus à un champ **scalaire** quelconque, on observe que le résultat est un champ de **vecteurs** dont les composantes sont les dérivées partielles du champ scalaire dans les trois directions.

Considérons la fonction scalaire $T(\underline{x})$ (par exemple la température d'un milieu). Le vecteur $\underline{Grad}(T(\underline{x}))$ est un champ de vecteurs qui va dans le sens de l'évolution maximale de la température, et qui pointe de sa valeur minimale (froid) vers sa valeur maximale (chaud). L'expression des dérivées partielles contenues dans le gradient

dépend du type de base (cartésienne, cylindrique, sphérique) utilisé. On donne dans le tableau ci-dessous (Tableau 2) les expressions du gradient d'un champ de scalaires dans ces 3 cas :

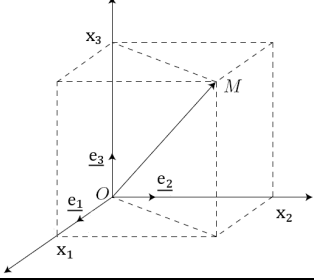
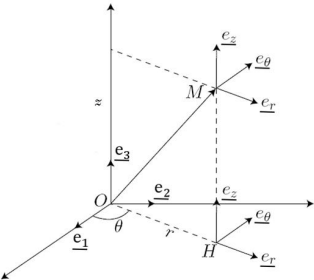
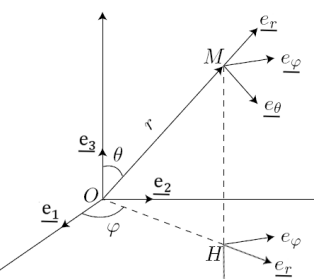
Gradient d'un champ de scalaires	
Coordonnées cartésiennes 	$[\underline{Grad} T] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{pmatrix}$
Coordonnées cylindriques 	$[\underline{Grad} T] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}$
Coordonnées sphériques 	$[\underline{Grad} T] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$

Tableau 2 : Expressions du gradient d'un champ de vecteurs dans les différents systèmes de coordonnées.

2.1.6.4 Gradient d'un champ de vecteurs

Soit $\underline{t}(\underline{x})$ un champ de tenseurs d'ordre 2 défini en tout point du milieu. L'analyse locale de ce champ autour du point de coordonnées $\underline{x}$ consiste à écrire la quantité :

$$d\underline{T} = \underline{T}(\underline{x} + d\underline{x}) - \underline{T}(\underline{x})$$

En linéarisant l'expression de la différentielle $d\underline{T}$, on montre qu'il existe une « application linéaire » qui au vecteur $d\underline{x}$ fait correspondre $d\underline{T}$: c'est un champ de

tenseurs d'ordre 2 qu'on nomme **gradient du champ** $\underline{T}(\underline{x})$ et qu'on peut définir sous forme mathématique :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{Grad}}(\underline{T}(\underline{x})): \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \\ \underline{dx} &\rightarrow d\underline{T} = \underline{\underline{Grad}}(\underline{T}(\underline{x})) \cdot \underline{dx}\end{aligned}$$

On note que l'opérateur *gradient* est souligné 2 fois car c'est un tenseur d'ordre 2.

Sous forme matricielle on écrit la même expression :

$$\begin{pmatrix} dT_1 \\ dT_2 \\ dT_3 \end{pmatrix} = [\underline{\underline{Grad}}(\underline{T}(\underline{x}))] \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

Appliquons cette définition du champ de vitesse $\underline{v}$ illustré en rouge sur la figure ci-dessous (Figure 11), on voit bien que la quantité $\underline{dv}$ correspond à la différence des deux vitesses entre le point $\underline{x}$ et son voisin situé en $\underline{x} + \underline{dx}$:

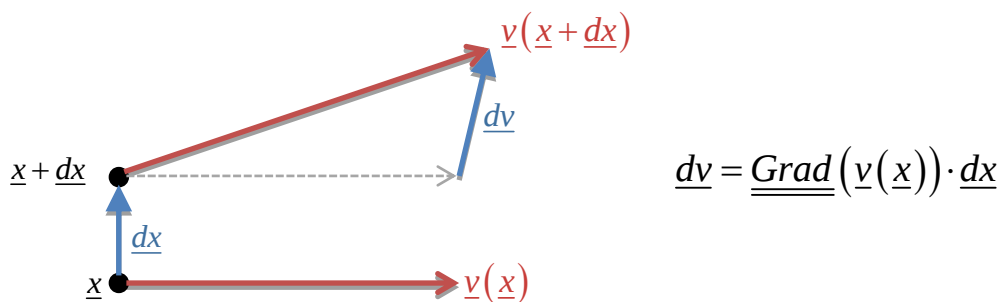


Figure 11: Illustration du gradient d'un champ de vecteurs.

Le calcul complet du contenu de la matrice $[\underline{\underline{Grad}}(\underline{t}(\underline{x}))]$ sort du cadre de ce cours, et il dépend du type de base (cartésienne, cylindrique, sphérique) utilisé.

On donne dans le tableau ci-dessous (Tableau 3) les expressions du gradient d'un champ de vecteur dans ces 3 cas :

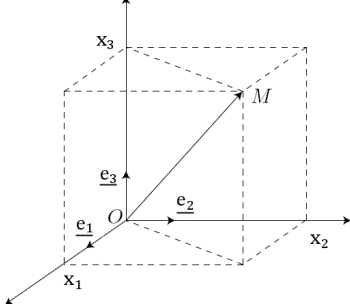
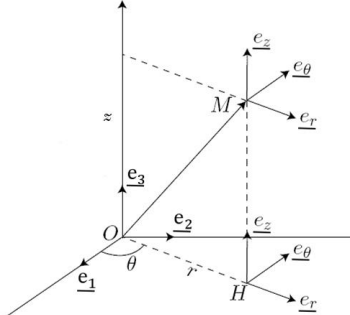
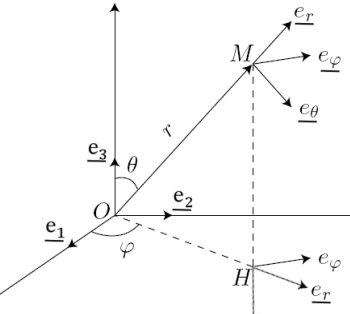
Gradient d'un champ de vecteurs	
Coordonnées cartésiennes 	$[\underline{\underline{Grad \underline{T}}}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} & \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_2}{\partial x_1} & \frac{\partial T_2}{\partial x_2} & \frac{\partial T_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_3}{\partial x_1} & \frac{\partial T_3}{\partial x_2} & \frac{\partial T_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$
Coordonnées cylindriques 	$[\underline{\underline{Grad \underline{T}}}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) & \frac{\partial T_r}{\partial z} \\ \frac{\partial T_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) & \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial T_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} & \frac{\partial T_z}{\partial z} \end{pmatrix}$
Coordonnées sphériques 	$[\underline{\underline{Grad \underline{T}}}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T_r}{\partial \phi} - T_\phi \right) \\ \frac{\partial T_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T_\theta}{\partial \phi} - \cot \theta T_\phi \right) \\ \frac{\partial T_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\phi}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T_\phi}{\partial \phi} - \cot \theta T_\theta + T_r \right) \end{pmatrix}$

Tableau 3 : Expressions du gradient d'un champ de vecteurs dans les différents systèmes de coordonnées.

2.1.6.5 Décomposition en parties symétrique et antisymétrique

A partir des définitions qui viennent d'être posées, on peut facilement à partir d'un tenseur $\underline{\underline{T}}$ quelconque définir les deux quantités suivantes :

$$\underline{\underline{T}}^{(1)} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T) \quad \underline{\underline{T}}^{(2)} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T)$$

On observe que la somme de ces deux tenseurs est égale au tenseur $\underline{\underline{T}}$:

$$\underline{\underline{T}}^{(1)} + \underline{\underline{T}}^{(2)} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T - \underline{\underline{T}}^T) = \underline{\underline{T}}$$

De plus, on observe aisément que le tenseur $\underline{\underline{T}}^{(1)}$ est symétrique :

$$\left(\underline{\underline{T}}^{(1)}\right)^T = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}}^T + \underline{\underline{T}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T)$$

De même, on observe que le tenseur $\underline{\underline{T}}^{(2)}$ est antisymétrique :

$$\left(\underline{\underline{T}}^{(2)}\right)^T = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}}^T - \underline{\underline{T}}) = -\frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T)$$

A retenir 2-3

On vient donc de montrer simplement qu'un tenseur quelconque d'ordre 2 peut être décomposé comme la **somme** d'un tenseur d'ordre 2 **antisymétrique** et d'un tenseur d'ordre 2 **symétrique** :

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^{sym} + \underline{\underline{T}}^{antisym} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\underline{T}}^{sym} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T) \\ \underline{\underline{T}}^{antisym} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T) \end{cases}$$

De façon équivalente, une matrice 3x3 peut être décomposée comme la **somme** d'une matrice **symétrique** et d'une matrice **antisymétrique**.

Transposons désormais cette propriété importante au cas du champ de tenseurs d'ordre 2 $\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}}$, qui est le gradient d'un champ de vecteurs $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{x}})$.

Il peut être donc décomposé en deux champs de tenseurs d'ordre 2 respectivement symétrique et antisymétrique, que l'on notera $\underline{\underline{d}}$ et $\underline{\underline{\Omega}}$ en prenant un peu d'avance sur la suite (2.5), et on a donc :

$$\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\Omega}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}})^T) = \underline{\underline{d}}^T \\ \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}} - (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}})^T) = -\underline{\underline{\Omega}}^T \end{cases}$$

On en déduit donc (d'après les propriétés du produit contracté) la relation :

$$\underline{\underline{dT}} = (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}}) \cdot \underline{\underline{dx}} = \underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{dx}} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{dx}}$$

A partir de ces considérations, on peut montrer que le champ de tenseurs symétrique $\underline{\underline{d}}$ décrit la **déformation locale** du milieu, tandis que le champ de tenseurs antisymétrique $\underline{\underline{\Omega}}$ décrit la **rotation locale** du milieu.

Cette décomposition est illustrée ci-dessous pour un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$, qui est l'approximation linéaire autour de l'origine d'un champ de vecteurs réel. Ce champ $\underline{dT} = \underline{Grad}(\underline{T}(\underline{0})) \cdot \underline{dx}$ est décomposé en un champ correspondant **autour de l'origine** à la déformation locale $\underline{d}(\underline{0}) \cdot \underline{dx}$ et à la rotation locale $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{0}) \cdot \underline{dx}$ (Figure 12

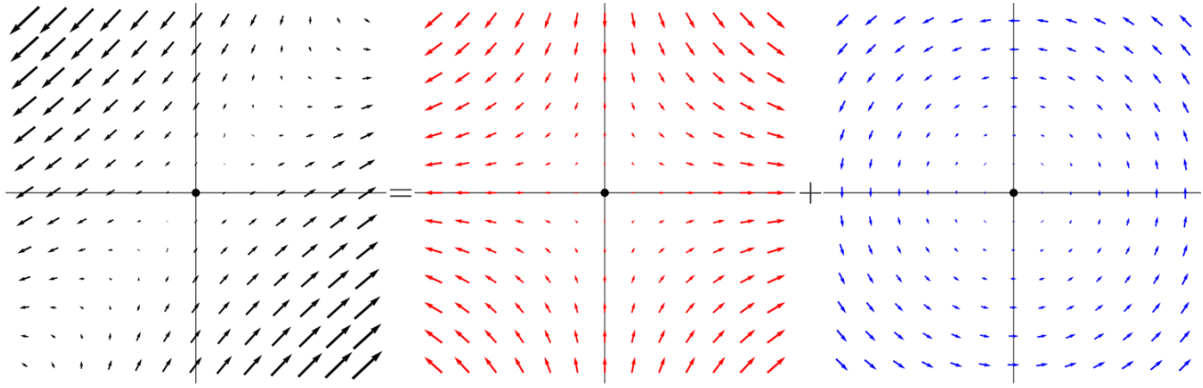


Figure 12: Décomposition d'un champ $\underline{dT} = \underline{Grad}(\underline{T}(\underline{0})) \cdot \underline{dx}$, approximation autour de l'origine d'un champ de vecteurs réel $\underline{T}(\underline{x})$, en un champ correspondant à la « déformation locale » $\underline{d}(\underline{0}) \cdot \underline{dx}$ (en rouge) et à un champ correspondant à la « rotation locale » $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{0}) \cdot \underline{dx}$ (en bleu). E. Plaut (ENSMN).

2.2. Représentation du mouvement

2.2.1. Repérage des points matériels en mouvement

On se placera comme précédemment dans un référentiel $\mathcal{R}$, qui est l'ensemble $\mathbb{R}^3$ des points de l'espace euclidien animé du mouvement de corps rigide de l'observateur. Un **point matériel** M consiste en une infiniment petite quantité de matière, de volume $d\Omega$. Le **système matériel** S représentera une quantité de matière dans l'espace, constituée de points matériels. Le volume de ce système évolue dans le temps, mais pas sa masse (nous écrirons formellement ce point en section 2.6.3).

A l'instant $t = t_0$, le système matériel est dans la configuration K_0 dite **configuration de référence** et les composantes du vecteur-position $\underline{OM}_0 = \underline{X}$ sont notées X_1, X_2, X_3 (majuscules) dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. A l'instant t , le système matériel est dans la configuration K_t dite **configuration actuelle** et les composantes du vecteur-position

$\underline{OM} = \underline{x}$ sont notées x_1, x_2, x_3 (minuscules) dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Le système matériel subit la transformation $\underline{\phi}$ (fonction **vectorielle**) entre K_0 et K_t (Figure 13).

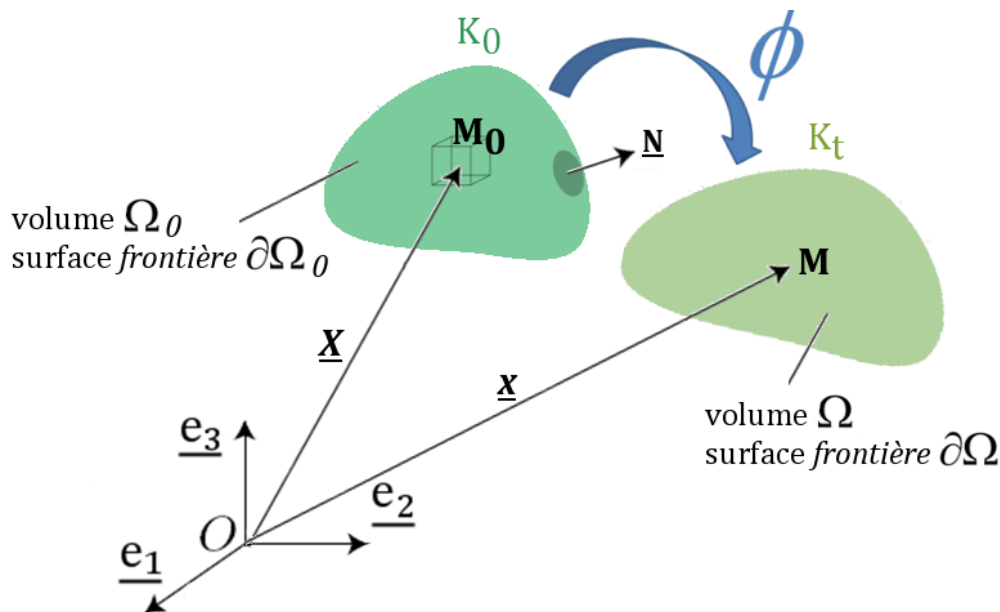


Figure 13: Repérage des points matériels entre une configuration de référence K_0 et une configuration actuelle K_t .

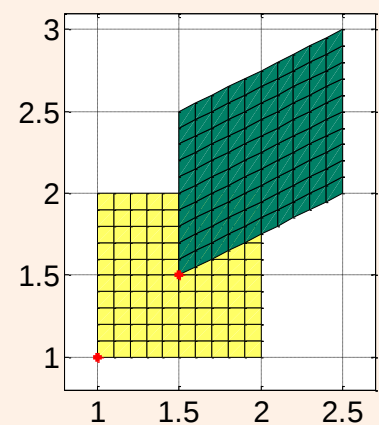
- Le concept de milieu continu implique que deux points matériels infiniment voisins dans K_0 le sont toujours dans K_t .
- Les points occupant un domaine connexe dans K_0 occupent un domaine de même ordre (courbe, surface, volume, ...) dans K_t .
- Les points à l'intérieur d'une surface fermée dans K_0 restent à l'intérieur de la surface transportée dans K_t .

Application à l'exemple introductif

La transformation précédente peut se décrire proprement en écrivant la position actuelle des points (dans l'objet vert) en fonction de leur position initial (dans l'objet jaune) :

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \begin{cases} x_1 = \phi_1(\underline{X}, t) = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \phi_2(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = \phi_3(\underline{X}, t) = X_3 \end{cases} \text{ avec } \alpha \text{ en } m.s^{-2} \text{ et } \tau \text{ en } s$$

La fonction vectorielle $\underline{\phi}$ permet donc de passer de K_0 dans K_t .



Si on se place dans le cas où et $X_2 \in [1, 2]$, $\alpha = 2$, $\tau = 1$ et pour $t = 0.5$ on obtient l'image ci-dessus.

Le point de coordonnées $\underline{X} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2$ (en rouge sur la figure) est par exemple transformé en :

$$\underline{x} = 1.5\underline{e}_1 + 1.5\underline{e}_2$$

On constate qu'on respecte bien la condition : $\underline{x}(\underline{X}, t = 0) = \underline{X}$

2.2.2. Description lagrangienne ou eulérienne?

2.2.2.1 Description lagrangienne du mouvement du milieu continu

A chaque instant t , le vecteur position $\underline{x}$ du point matériel est donnée dans K_t en fonction de sa position $\underline{X}$ dans K_0 . On a alors pour tout point appartenant au système matériel et $\forall t$ une fonction vectorielle $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$ qui vérifie:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{\phi}(\underline{X}, t) \text{ avec } \underline{\phi}(\underline{X}, t = t_0) = \underline{X} \\ &\begin{cases} x_1 = \phi_1(\underline{X}, t) \\ x_2 = \phi_2(\underline{X}, t) \\ x_3 = \phi_3(\underline{X}, t) \end{cases} \end{aligned}$$

En notant la fonction inverse $\underline{\psi} = \underline{\phi}^{-1}$, on a de façon équivalente: $\underline{X} = \underline{\psi}(\underline{x}, t)$.

NB: Cette écriture est possible car la fonction $\underline{\phi}$ est une « bijection » : cela veut dire que durant la transformation, aucun point n'est créé, et aucun point ne disparaît.

On appelle **variables de Lagrange** les grandeurs $\underline{X}$ (3 composantes, parfois appelées coordonnées matérielles) et t . On appelle **inconnues de Lagrange** les trois fonctions $\phi_i(\underline{X}, t)$ qui permettent de déterminer $\underline{x}$.

La description **lagrangienne** (ou **matérielle**) est une description "**par trajectoire**": on se propose de décrire la cinématique d'une transformation en suivant l'évolution de la position des points matériels au cours du temps. L'idée est donc de se dire qu'on connaîtra le mouvement du système matériel si on sait à chaque instant où se trouve la particule M qui se trouvait en M_0 dans la configuration de référence.

La fonction $\underline{\psi} = \underline{\phi}^{-1}$ donne la position dans la configuration de référence de la particule qui est en M dans la configuration actuelle.

Application à l'exemple introductif

Reprenons la transformation de l'exemple introductif, pour laquelle on peut facilement calculer

$\underline{\psi} = \underline{\phi}^{-1}$ à partir de la fonction vectorielle $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$:

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \begin{cases} x_1 = \phi_1(\underline{X}, t) = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \phi_2(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = \phi_3(\underline{X}, t) = X_3 \end{cases} \Rightarrow \underline{X} = \underline{\phi}^{-1}(\underline{x}, t) \begin{cases} X_1 = \phi_1^{-1}(\underline{x}, t) = x_1 - \alpha t^2 \\ X_2 = \phi_2^{-1}(\underline{x}, t) = x_2 - \frac{t}{\tau} x_1 + \frac{\alpha}{\tau} t^3 \\ X_3 = \phi_3^{-1}(\underline{x}, t) = x_3 \end{cases}$$

2.2.2.2 Description eulérienne du mouvement du milieu continu

En description **eulérienne** (ou **spatiale**), on décide de décrire le champ des **vecteurs vitesses** $\underline{v}(\underline{x}, t)$ dans la configuration K_t , et non dans K_0 . On décrit donc le mouvement du corps déformable:

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \underline{v}(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t) \quad \text{avec} \quad \underline{\phi}(\underline{X}, t = t_0) = \underline{X}$$

Dans ce cas, on appelle **variables d'Euler** les grandeurs $\underline{x}$ (3 composantes, parfois appelées coordonnées spatiales) et t . On appelle **inconnues d'Euler** les trois fonctions $v_i(\underline{x}, t)$.

2.2.2.3 Dérivée particulière et dérivée spatiale

Considérons une fonction scalaire, vectorielle ou tensorielle que l'on notera $\mathbf{G}(\underline{X}, t)$ en description lagrangienne et $\mathbf{g}(\underline{x}, t)$ en description eulérienne.

A retenir 2-4

Remarque de **notation** : lorsque l'on parlera du **gradient** d'une fonction écrite en description **lagrangienne**, on sous-entendra le gradient par rapport aux variables de Lagrange $\underline{X}$ et on l'écrira avec une première lettre **majuscule**:

$$\text{Grad}(\mathbf{G}(\underline{X}, t)) = \frac{\partial \mathbf{G}(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}}$$

Le **gradient** d'une fonction en description **eulérienne** concernera les variables d'Euler $\underline{x}$ et on l'écrira avec une première lettre **minuscule** :

$$\text{grad}(\mathbf{g}(\underline{x}, t)) = \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}}$$

Il en sera évidemment de même pour les opérateurs **divergence** et **rotationnel**.

La dérivée de la quantité **lagrangienne** $\mathbf{G}(\underline{X}, t)$ par rapport au temps ($\underline{X}$ étant **fixe**) s'écrit simplement :

$$\dot{\mathbf{G}}(\underline{X}, t) = \frac{d\mathbf{G}(\underline{X}, t)}{dt}$$

Cette dérivée correspond à la façon dont la quantité $\mathbf{G}(\underline{X}, t)$ évolue **lorsque l'on suit la particule** : on parle alors de dérivée **particulaire**, ou encore **matérielle**.

Considérons maintenant la description d'Euler $\mathbf{g}(\underline{x}, t)$, sa dérivée **spatiale** ou **eulérienne** ($\underline{x}$ étant **fixe**) s'écrit simplement : $\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t) / \partial t$

Considérons enfin que l'on veuille étudier la dérivée temporelle **particulaire** de la quantité écrite en description **eulérienne** $\mathbf{g}(\underline{x}, t)$, c'est-à-dire en s'attachant à un point matériel, $\underline{X}$ étant **fixe**. On pourra alors écrire :

$$\dot{\mathbf{g}}(\underline{x}, t) = \frac{d\mathbf{g}(\underline{x}, t)}{dt} = \frac{d\mathbf{g}(\phi(\underline{X}, t), t)}{dt}$$

Or, on peut écrire la relation (d'après les rappels en section 1.2.1.4) :

$$d\mathbf{g}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} dt$$

On en vient donc à la relation primordiale :

Equation fondamentale 2-1

$$\dot{\mathbf{g}}(\underline{x}, t) = \frac{d\mathbf{g}(\underline{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \text{grad}(\mathbf{g}(\underline{x}, t)) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t)$$

- le terme $\dot{\mathbf{g}}(\underline{x}, t)$ est la dérivée **particulaire** de la quantité $\mathbf{g}(\underline{x}, t)$ en description eulérienne
- le terme $\frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial t}$ est la dérivée eulérienne de $\mathbf{g}(\underline{x}, t)$

- le terme $\text{grad}(\mathbf{g}(\underline{x}, t))$ est le gradient de $\mathbf{g}(\underline{x}, t)$ en description eulérienne
- le terme $\underline{v}(\underline{x}, t)$ est la vitesse du point matériel situé en $\underline{x}$
- le terme $\text{grad}(\mathbf{g}(\underline{x}, t)) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t)$ est souvent appelé terme **d'advection**

2.2.2.4 Au final, description lagrangienne ou eulérienne ?

Si on résume ce qui vient d'être dit, la description **lagrangienne** consiste à suivre le mouvement de points matériels entre une configuration de référence et la configuration actuelle, tandis que la description **eulérienne** consiste à analyser le champ de vitesses des points matériels à des positions précises de l'espace.

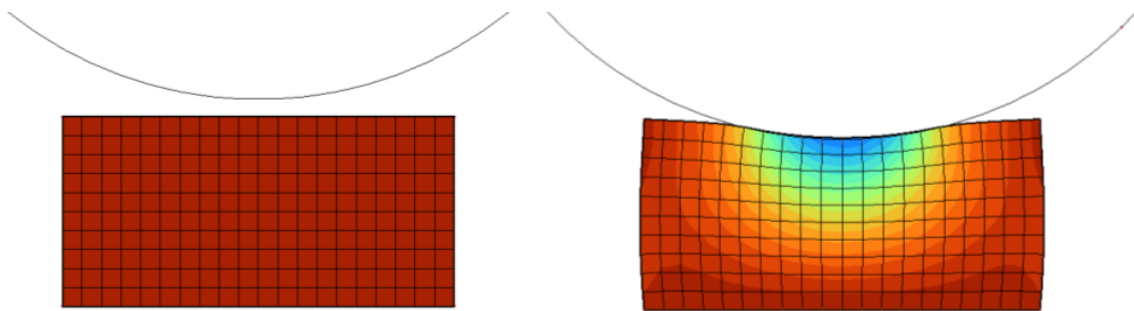


Figure 14: Exemple de description lagrangienne du mouvement d'un milieu continu solide. La forme initiale étant connue, on suit chaque point matériel dans son mouvement lors de l'écrasement du lopin par un cylindre. Le code couleur correspond au champ de déplacement vertical.

La description **lagrangienne** nécessite la connaissance d'une configuration de référence : en **mécanique du solide**, on connaît en général la forme initiale (non déformée) du système matériel (Figure 14).

S'il s'agit maintenant d'étudier l'écoulement d'une rivière, les notions d'instant initial et de configuration de référence deviennent plus problématiques... La description **eulérienne** est alors naturelle en **mécanique des fluides**, où l'on décrit le mouvement du fluide à des positions précises de l'espace (Figure 15).

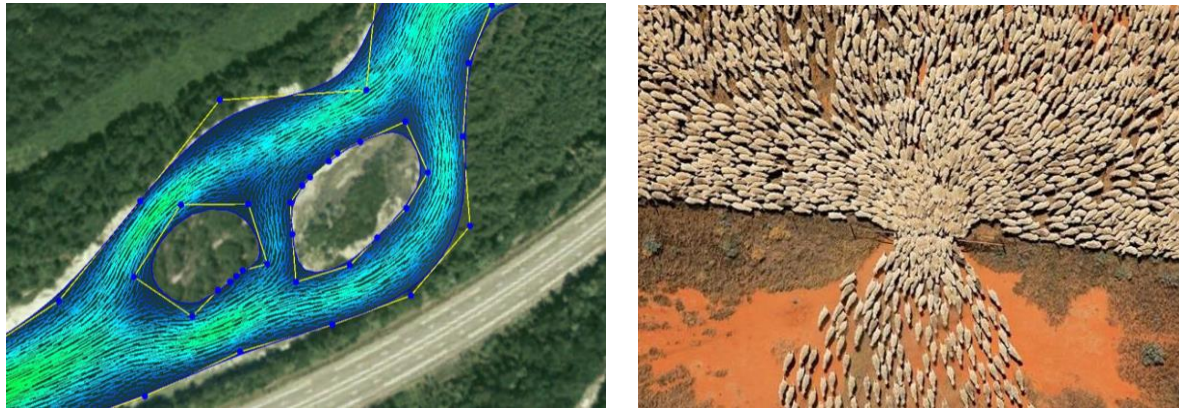


Figure 15: Description eulérienne du mouvement d'un milieu continu. A gauche: champ de vitesses en surface d'une rivière. Le code couleur correspond à la norme du champ de vitesses. A droite : troupeau de moutons entrant dans un nouveau parc : on imagine facilement associer un vecteur « vitesse du mouton » à chaque animal pour décrire le mouvement du troupeau.

2.2.3. Champs de déplacement, de vitesse et d'accélération

En suivant les notations précédentes (2.2.1), on peut facilement définir le **champ de déplacement** d'un point matériel :

$$\underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X}$$

Dans cette expression, on lie la position actuelle de la particule à sa position de référence $\underline{X}$. Le déplacement $\underline{U}(\underline{X}, t)$ est donc fonction de la configuration de référence, ce qui correspond donc à une description lagrangienne (matérielle) du mouvement.

De façon alternative, on peut définir le déplacement en description eulérienne :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{x} - \underline{X}(\underline{x}, t)$$

Ces deux définitions d'un déplacement ont les **mêmes valeurs** :

$$\underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{U}(\underline{\phi}^{-1}(\underline{x}, t), t) = \underline{u}(\underline{x}, t)$$

Par la suite on emploiera la plupart du temps la notation **minuscule** : $\underline{u}(\underline{x}, t)$

En mécanique du **solide**, la cinématique d'un milieu sera en général décrite à partir du champ de déplacement. En mécanique des **fluides** en revanche, on s'intéressera plutôt au **champ de vitesse** et au **champ d'accélération**.

Si on suit un point matériel dans son mouvement (comme on l'a rappelé en section 1.2.2), on peut facilement définir les champs de vitesse et d'accélération en description **lagrangienne** comme les dérivées première et deuxième de la position du point matériel :

$$\underline{V}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \underline{v}(\underline{x}, t) \quad \underline{A}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{V}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \underline{x}(\underline{X}, t)}{\partial t^2}$$

En général en mécanique des fluides on s'intéressera plutôt à la description **eulérienne** de ces champs, dans la mesure où on va chercher à les caractériser en des points fixes de l'espace sans connaître la configuration de référence du milieu.

La description eulérienne est basée sur la connaissance du champ de vitesse $\underline{v}(\underline{x}, t)$. Si on veut donc étudier l'accélération d'un point matériel, on doit donc s'intéresser à la dérivée **particulaire** d'une quantité écrite en description eulérienne, et d'après ce qui précède (2.2.2.3) il vient l'expression de l'accélération :

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}(\underline{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}(\underline{x}, t)) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t) \quad \text{ou} \quad a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j} v_j$$

Cette expression permet de connaître l'accélération d'un point matériel sans en connaître explicitement toute la cinématique. On notera que le terme d'advection est non-linéaire, quadratique en $\underline{v}(\underline{x}, t)$.

Application à l'exemple introductif

Reprenons la transformation de l'exemple et tentons de calculer les déplacements, vitesses et accélération à partir des descriptions lagrangiennes et eulériennes.

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad \begin{cases} x_1 = \phi_1(\underline{X}, t) = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \phi_2(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = \phi_3(\underline{X}, t) = X_3 \end{cases} \Rightarrow \underline{X} = \underline{\phi}^{-1}(\underline{x}, t) \quad \begin{cases} X_1 = \phi_1^{-1}(\underline{x}, t) = x_1 - \alpha t^2 \\ X_2 = \phi_2^{-1}(\underline{x}, t) = x_2 - \frac{t}{\tau} x_1 + \frac{\alpha}{\tau} t^3 \\ X_3 = \phi_3^{-1}(\underline{x}, t) = x_3 \end{cases}$$

Commençons par calculer le champ de déplacement à partir des variables de Lagrange:

$$\underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X} \quad \begin{cases} U_1 = x_1(\underline{X}, t) - X_1 = \alpha t^2 \\ U_2 = x_2(\underline{X}, t) - X_2 = \frac{t}{\tau} X_1 \\ U_3 = x_3(\underline{X}, t) - X_3 = 0 \end{cases}$$

et à partir des variables d'Euler :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{x} - \underline{X}(\underline{x}, t) \quad \begin{cases} u_1 = x_1 - X_1(\underline{x}, t) = \alpha t^2 \\ u_2 = x_2 - X_2(\underline{x}, t) = \frac{t}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \\ u_3 = x_3 - X_3(\underline{x}, t) = 0 \end{cases}$$

De façon triviale, en utilisant $\underline{\phi}^{-1}(\underline{x}, t)$, on observe que $u_2 = tX_1$ et que par conséquent les déplacements ont les mêmes valeurs dans les deux descriptions : $\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{U}(\underline{X}, t)$. Ce champ de déplacement est représenté ci-dessous en utilisant la forme $\underline{u}(\underline{X}, t)$.

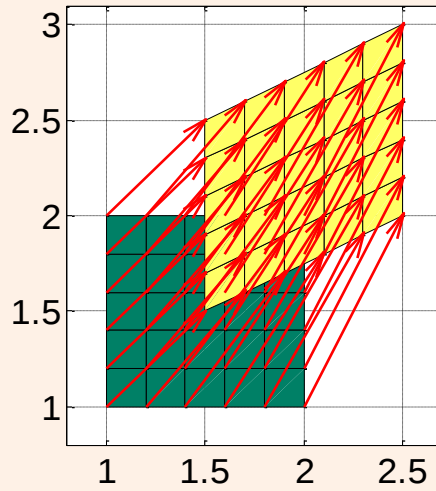


Figure 16: Exemple de champ de déplacement.

Calculons maintenant le champ de vitesse à partir de la description lagrangienne :

$$\underline{V}(\underline{X}, t) = \frac{d\underline{U}(\underline{X}, t)}{dt} = \frac{\partial \underline{U}(\underline{X}, t)}{\partial t} \quad [\underline{V}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ X_1/\tau \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour faire ce calcul à partir de la description eulérienne, il faut faire attention au fait que $\underline{x}$ dépend du temps et on a :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{u}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \underline{u}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}$$

Pour calculer le terme $\partial \underline{x} / \partial t$ on doit se servir de la forme ici connue de la trajectoire des particules, et on obtient :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{u}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \underline{u}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \quad [\underline{v}(\underline{x}, t)] = \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ \frac{x_1}{\tau} - 3\frac{\alpha}{\tau}t^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{t}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ \frac{X_1}{\tau} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ \frac{1}{\tau}(x_1 - \alpha t^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie bien alors que les vitesses sont les mêmes : $\underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{V}(\underline{X}, t)$. Cette forme constitue la formulation eulérienne de la transformation, qu'on utiliserait par exemple pour caractériser l'écoulement d'un fluide.

Intéressons-nous enfin au champ d'accélération en description lagrangienne :

$$\underline{A}(\underline{X},t) = \frac{d\underline{V}(\underline{X},t)}{dt} = \frac{\partial \underline{V}(\underline{X},t)}{\partial t} \quad [\underline{A}(\underline{X},t)] = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Imaginons maintenant que nous ne connaissons pas les trajectoires des particules (cas où l'on regarde s'écouler un fluide par exemple), mais que l'on connaisse le champ de vitesses en description eulérienne $\underline{v}(\underline{x},t)$. On peut alors calculer le champ d'accélération à partir de l'expression de la dérivée particulaire :

$$\underline{a}(\underline{x},t) = \frac{\partial \underline{v}(\underline{x},t)}{\partial t} + \underline{\text{grad}} \underline{v}(\underline{x},t) \cdot \underline{v}(\underline{x},t) \quad [\underline{a}(\underline{x},t)] = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -2\frac{\alpha}{\tau}t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ \frac{1}{\tau}(x_1 - \alpha t^2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien alors la même expression, sans que le calcul ne nécessite la connaissance des trajectoires des particules. On remarque que le champ d'accélération est ici homogène et ne dépend pas des coordonnées.

2.2.4. Quelques caractéristiques de la transformation

2.2.4.1 Trajectoires

La **trajectoire** d'un point matériel est le lieu des positions occupées par un point matériel dans $\mathcal{R}$ au cours du temps, c'est-à-dire une équation paramétrée de M initialement en M_0 . En description lagrangienne l'équation des trajectoires est évidente:

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t)$$

Une trajectoire est une courbe paramétrée de type $x_i = x_i(t)$, et cette courbe est donc indépendante du temps. On peut dire qu'il y a « autant de trajectoires qu'il y a de particules ».

On peut imaginer visualiser les trajectoires par exemple en plaçant dans un milieu fluide des particules solides, idéalement entraînées comme le serait la particule fluide dont elle occupe la place. Une photographie avec un temps de pose suffisamment long permettrait alors de visualiser une partie de la trajectoire de ces particules.

En description eulérienne, on connaît le champ de vitesses en tout point de l'espace :
les trajectoires peuvent alors être déterminées en résolvant:

$$\underline{dx} = \underline{v}(\underline{x}, t) dt \text{ avec la condition initiale } \underline{x}(t=0) = \underline{X}$$

Application à l'exemple introductif

Reprenons la transformation de l'exemple introductif:

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad \begin{cases} x_1 = \phi_1(\underline{X}, t) = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \phi_2(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = \phi_3(\underline{X}, t) = X_3 \end{cases}$$

Cette forme constitue l'équation des **trajectoires**. Prenons maintenant la description eulérienne de cette transformation : $\underline{v}(\underline{x}, t) = 2\alpha t \underline{e}_1 + \frac{1}{\tau}(x_1 - \alpha t^2) \underline{e}_2$.

On peut déterminer les trajectoires des points matériels en posant :

$$\underline{dx} = \underline{v}(\underline{x}, t) dt \Rightarrow \begin{cases} dx_1 = v_1(\underline{x}, t) dt = 2\alpha t dt \\ dx_2 = v_2(\underline{x}, t) dt = \frac{1}{\tau}(x_1 - \alpha t^2) dt \\ dx_3 = v_3(\underline{x}, t) dt = 0 \end{cases}$$

Pour pouvoir intégrer les composantes de $\underline{dx}$, on doit tenir compte du fait que $\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t)$.

On trouve facilement pour la première composante $x_1 = \alpha t^2 + C_1$ et ainsi on a :

$$dx_2 = v_2(\underline{x}, t) dt = \frac{1}{\tau}(\alpha t^2 + C_1 - \alpha t^2) dt \Rightarrow x_2 = C_1 \frac{t}{\tau} + C_2$$

On doit nécessairement ajouter la condition initiale $\underline{x}(t=0) = \underline{X}$ pour déterminer les 3 constantes :

$$\begin{cases} x_1(t=0) = C_1 = X_1 \\ x_2(t=0) = C_2 = X_2 \\ x_3(t=0) = C_3 = X_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha t^2 + X_1 \\ x_2 = X_1 \frac{t}{\tau} + X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

On constate que l'équation des trajectoires est bien la même dans les deux cas.

Les trajectoires des quatre points de coordonnées $(1,1,0)$, $(1,2,0)$, $(2,1,0)$, $(2,2,0)$ ont été représentées Figure 17.

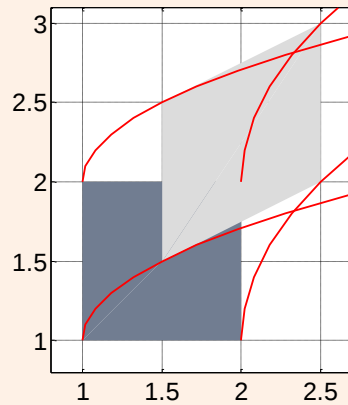


Figure 17: Exemple de trajectoires des quatre coins du milieu de base.

2.2.4.2 Ligne de courant

La **ligne de courant** est l'enveloppe des champs des vecteurs vitesses à un instant donné t , elle considère donc un ensemble de points matériels à un instant donné, qui possèdent tous un vecteur vitesse "local".

Les lignes de courant étant tangentes aux vecteurs vitesses $\underline{v}(\underline{x}, t)$ en tout point, un petit élément $d\underline{x}$ est sur la ligne de courant si $d\underline{x} \wedge \underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{0}$ ce qui revient à :

$$\frac{dx_1}{v_1(\underline{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\underline{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\underline{x}, t)}$$

Le temps n'est pas une variable d'intégration dans cette équation, étant donné que l'on se place à un instant donné.

Application à l'exemple introductif

Reprenons la transformation de l'exemple introductif, pour lequel la description eulérienne est :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = 2\alpha t \underline{e}_1 + \frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \underline{e}_2$$

Les lignes de courant se déterminent facilement à partir de l'équation ci-dessus :

$$\frac{dx_1}{v_1(\underline{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\underline{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\underline{x}, t)} \Rightarrow \frac{dx_1}{2\alpha t} = \frac{dx_2}{\frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2)} \Rightarrow dx_1 \frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) = 2\alpha t dx_2$$

Ce système se résout de la façon suivante :

$$\frac{1}{\tau} dx_1 x_1 - \frac{\alpha}{\tau} t^2 dx_1 = 2\alpha t dx_2 \Rightarrow \frac{x_1^2}{2\tau} - \frac{\alpha}{\tau} t^2 x_1 = 2\alpha t x_2 + cste \Rightarrow x_2 = \frac{x_1}{2\alpha t \tau} \left(\frac{x_1}{2} - \alpha t^2 \right) + cste$$

Des lignes de courants ont été représentées pour différentes valeurs de la constante Figure 18. On constate immédiatement en comparant les Figure 17 et Figure 18 que les trajectoires et lignes de courant forment deux familles de courbes différentes.

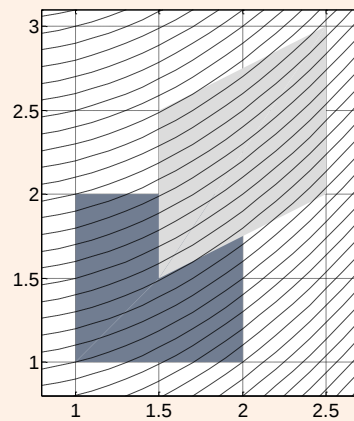


Figure 18: Exemple de lignes de courant.

2.2.4.3 Mouvement stationnaire

Un mouvement est dit **stationnaire** dans $\mathcal{R}$ si sa description eulérienne n'est pas fonction du temps (le champ des vecteurs vitesses est variable dans l'espace mais pas dans le temps), soit:

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{v}(\underline{x})$$

Dans le cas d'un mouvement stationnaire:

→ la résolution du système $\underline{dx} = \underline{v}(\underline{x}, t)dt$ avec $\underline{x}(t=0) = \underline{X}$ et du système donnent des solutions identiques, c'est-à-dire que les trajectoires et les lignes de courant sont identiques

On appelle mouvements semi-permanents des mouvements tels que:

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \lambda(t)\underline{v}(\underline{x})$$

2.3. Le gradient de la transformation

2.3.1. Démonstration

Le **tenseur gradient de la transformation**, noté $\underline{\underline{F}}$, permet de traduire la transformation d'un corps entre K_0 et K_t . Considérons un point M , et un point P infiniment proche de M . On peut définir le vecteur élémentaire dans K_0 :

$$d\underline{X} = \underline{X}^P - \underline{X}^M$$

Après transformation, on peut définir la position de ces deux points dans K_t :

$$\underline{x}^M = \underline{\phi}(\underline{X}^M, t) \quad \underline{x}^P = \underline{\phi}(\underline{X}^P, t)$$

Et le vecteur élémentaire devient alors:

$$d\underline{x} = \underline{x}^P - \underline{x}^M = \underline{\phi}(\underline{X}^M + d\underline{X}, t) - \underline{\phi}(\underline{X}^M, t)$$

Un développement de Taylor au premier ordre donne (voir section 1.2.1):

$$d\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}^M + d\underline{X}, t) - \underline{\phi}(\underline{X}^M, t) = \frac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}^M, t)}{\partial \underline{X}^M} \cdot d\underline{X} = \frac{\partial \underline{x}^M}{\partial \underline{X}^M} \cdot d\underline{X}$$

En notation indicielle, et suivant la convention ci-dessus et pour tout point M , on a donc:

On peut en déduire la définition du **tenseur gradient de la transformation**, pour un point quelconque :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \underline{\underline{Grad}} \underline{x}(\underline{X}, t) \Rightarrow [\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

Le tenseur gradient de la transformation est crucial en MMC, dans la mesure où il contient toutes les informations concernant la cinématique d'un milieu continu.

Application à l'exemple introductif

Reprenons la transformation de l'exemple introductif :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Le tenseur gradient de la transformation s'écrit dans ce cas :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial x_i(\underline{X}, t)}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

$$[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t/\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que dans ce cas le gradient de la transformation est indépendant de $\underline{X}$: la transformation est donc homogène. On constate également qu'à l'instant initial $t = 0$, on a :

$$[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [\underline{\underline{I}}]$$

2.3.1. Expression du gradient de la transformation

On a vu précédemment que $\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X}$ et donc $\underline{x}(\underline{X}, t) = \underline{u}(\underline{X}, t) + \underline{X}$. On peut en déduire :

Equation fondamentale 2-2

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Grad}} \underline{u}$$

soit en notation matricielle et en coordonnées cartésiennes et cylindriques :

$$[\underline{\underline{F}}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \quad [\underline{\underline{F}}]_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & 1 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Analysons ce que devient cette expression lors d'une **transformation de corps rigide**.

A retenir 2-5

On appelle « transformation de corps rigide » une transformation qui ne déforme pas le milieu, c'est-à-dire une combinaison de translations et de rotations.

Pour une telle situation, le déplacement est nul : le gradient du déplacement est donc également nul. D'après l'expression ci-dessus, on a donc $\underline{\underline{\text{Grad } u}} = \underline{\underline{0}}$ et donc $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}}$.

Application à l'exemple introductif

Reprenons la transformation de l'exemple introductif :

$$\begin{cases} u_1 = \alpha t^2 \\ u_2 = \frac{t}{\tau} X_1 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

On peut également calculer $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$ à partir de la forme $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\text{Grad } u}}(\underline{X}, t)$:

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \alpha t^2 \underline{e}_1 + \frac{t}{\tau} X_1 \underline{e}_2 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Grad } u}}(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$$

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\text{Grad } u}}(\underline{X}, t) = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$$

On obtient la même forme que ci-dessus.

2.3.2. Transport d'un vecteur matériel

Si on applique la formule ci-dessus à un vecteur matériel quelconque $d\underline{L}$, on obtient alors la **formule de transport d'un vecteur matériel quelconque**:

Equation fondamentale 2-3

$$d\underline{l} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot d\underline{L} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} dl_1 \\ dl_2 \\ dl_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dL_1 \\ dL_2 \\ dL_3 \end{pmatrix}$$

Le tenseur $\underline{\underline{F}}$ transforme un vecteur dans la configuration de référence K_0 en un vecteur dans la configuration actuelle K_t : on appelle ce type de tenseur un **tenseur mixte** ou *tenseur deux-points*. $\underline{\underline{F}}$ est dans le cas général **non-symétrique**. On notera que $\underline{\underline{F}}$ est également parfois appelé **application linéaire tangente** : c'est en effet un opérateur linéaire qui décrit localement la transformation par sa tangente.

Comme la transformation est une bijection de K_0 dans K_t , il existe une application linéaire **inverse** $\underline{\underline{F}}^{-1}$ telle que :

$$\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{x}} = \underline{\underline{grad}}(\underline{X}(\underline{x}, t))$$

On peut donc transporter un vecteur matériel de K_t dans K_0 en utilisant l'inverse du gradient de la transformation :

$$d\underline{L} = \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{x}, t) \cdot d\underline{l}$$

Le tenseur gradient de la transformation transporte un vecteur matériel de K_0 dans K_t selon la loi : $d\underline{l} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot d\underline{L}$. Dans le cas où l'on applique cette transformation à un vecteur $\underline{A}$, on appelle **dilatation** le rapport des normes des vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{A}$:

$$\lambda = |\underline{a}| / |\underline{A}| = |\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{A}| / |\underline{A}|$$

Application à l'exemple introductif

Reprenons la transformation de l'exemple : $[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t/\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Prenons maintenant le vecteur unitaire : $\underline{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$

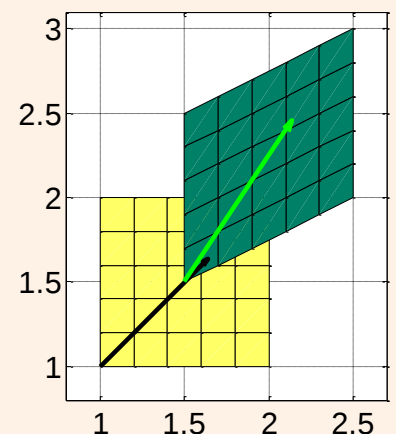
Pour $t=0.5$, ce vecteur est transporté lors de la transformation :

$$\begin{aligned} \underline{a} &= \underline{\underline{F}} \cdot \underline{A} = \left(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \underline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{e}_1 + \frac{1.5}{\sqrt{2}} \underline{e}_2 \end{aligned}$$

Ce vecteur est représenté en vert ci-contre, appliqué au point de coordonnées initiales (1,1).

On peut aisément calculer la dilatation de ce vecteur unitaire :

$$\lambda = \frac{\|\underline{a}\|}{\|\underline{A}\|} = \frac{\|\underline{\underline{F}} \cdot \underline{A}\|}{\|\underline{A}\|} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{1.5}{\sqrt{2}} \right)^2} / 1 \approx 1.275$$



2.3.3. Jacobien de la transformation

La matrice représentative de $\underline{\underline{F}}$ contient les neuf dérivées partielles : $(\partial x_i / \partial X_A)_{i,A=1,2,3}$: elle est en général appelée matrice **jacobienne**. Le déterminant de cette matrice s'appelle le **jacobien**, et on le note J .

Equation fondamentale 2-4

$$J = \det \underline{\underline{F}}$$

Application à l'exemple introductif

Reprenons la transformation de l'exemple :
$$[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t/\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le **jacobien** de la transformation vaut dans ce cas :

$$J = \det \underline{\underline{F}} = F_{11}F_{22}F_{33} + \cancel{F_{12}F_{23}F_{31}} + \cancel{F_{21}F_{32}F_{13}} - \cancel{F_{31}F_{22}F_{13}} - \cancel{F_{21}F_{12}F_{33}} - \cancel{F_{32}F_{23}F_{11}} = 1$$

2.3.4. Décomposition polaire

On peut mathématiquement montrer que le gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$ contient **à la fois** une rotation du milieu ainsi qu'une déformation du milieu. On montre également qu'on peut décomposer de façon unique $\underline{\underline{F}}$ des deux façons suivantes (Figure 19) :

cas 1: d'abord une rotation $\underline{\underline{R}}$ puis une « déformation pure »

cas 2: d'abord une « déformation pure » puis une rotation $\underline{\underline{R}}$:

On montre dans ce cas que $\underline{\underline{R}}$ est un tenseur mixte : il a « un pied dans chaque configuration » et fait le lien entre les configurations initiale et actuelle.

En revanche, dans le premier cas, la « déformation » est eulérienne, et dans le deuxième cas la « déformation pure » est lagrangienne.

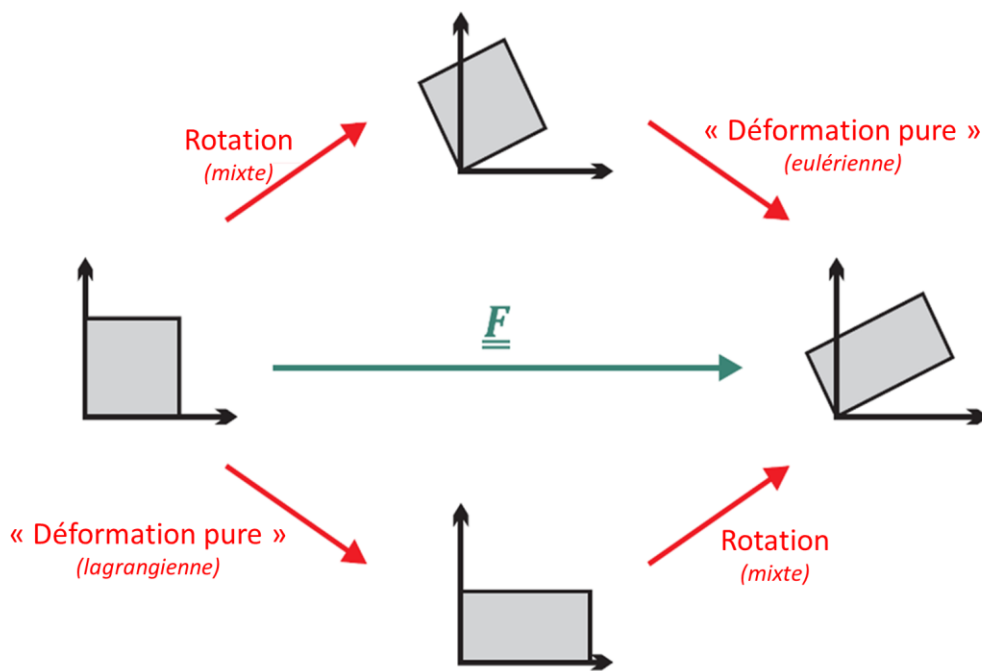


Figure 19 : Décomposition du mouvement du milieu (caractérisé par le gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$) en une déformation pure et une rotation pure.

2.3.5. Transport d'un volume

Nous avons vu qu'à tout $\underline{X}$ dans la configuration de référence K_0 correspondait un $\underline{x}$ dans la configuration actuelle K_t . Le déterminant de $\underline{\underline{F}}$, appelé jacobien J , doit donc être non-nul pour permettre d'écrire $\underline{\underline{F}}^{-1}$.

$$J = \det \underline{\underline{F}} \neq 0$$

Le volume élémentaire $d\Omega$ d'un parallélépipède défini par ses côtés $\underline{dx}, \underline{dy}, \underline{dz}$ est donné par:

$$d\Omega = \det(\underline{dx}, \underline{dy}, \underline{dz})$$

ce qui se transforme rapidement (sans détailler toutes les étapes) :

$$\begin{aligned} d\Omega &= \det(\underline{dx}, \underline{dy}, \underline{dz}) \\ &= \det(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{dX}, \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dY}, \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dZ}) \\ &= \det \underline{\underline{F}} \det(\underline{dX}, \underline{dY}, \underline{dZ}) = \det \underline{\underline{F}} d\Omega_0 \end{aligned}$$

On en déduit:

Equation fondamentale 2-5

$$\frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \det \underline{\underline{F}} = J$$

Par conséquent, le **déterminant du tenseur gradient de la transformation** est une mesure de la **variation locale de volume**.

J représente la dilatation volumique, et on a:

$$0 < \det \underline{\underline{F}} = J < +\infty$$

Application à l'exemple introductif

Reprenons le tenseur gradient de la transformation obtenu dans l'exemple introductif:

$$\left[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t/\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \det \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = 1$$

On constate que la transformation associée se fait donc à volume constant.

2.3.1. Taux de dilatation volumique

On a vu précédemment que $\Omega_t = J(t) \Omega_0$ avec $J(t) = \det \underline{\underline{F}}(t)$. On cherche à exprimer la dilatation volumique: $\dot{\Omega}_t = \dot{J}(t) \Omega_0$, et donc la dérivée du jacobien. Si on tente d'écrire le volume particulier du parallélépipède formé sur le trièdre $(\underline{dx}, \underline{dy}, \underline{dz}) = (dx \underline{e}_1, dy \underline{e}_2, dz \underline{e}_3)$, on obtient:

$$\dot{\Omega}_t = \frac{d\Omega_t}{dt} = \frac{d \det(\underline{dx}, \underline{dy}, \underline{dz})}{dt} = \varepsilon_{ijk} \dot{dx}_i dy_j dz_k + \varepsilon_{ijk} dx_i \dot{dy}_j dz_k + \varepsilon_{ijk} dx_i dy_j \dot{dz}_k$$

Après un long développement (non présenté ici) on obtient la forme suivante :

$$\dot{\Omega}_t = \varepsilon_{ijk} dx_i dy_j dz_k \operatorname{div} \underline{v} = \Omega_t \operatorname{div} \underline{v} = \operatorname{div} \underline{v} J \Omega_0$$

On peut donc démontrer que:

$$\dot{J} = \operatorname{div} \underline{v}(\underline{x}, t) J$$

Dans le cas d'une transformation isochore (sans changement de volume), on a donc:

$$\operatorname{div} \underline{v}(\underline{x}, t) = 0$$

2.4. Les déformations du milieu continu

2.4.1. Recherche d'un tenseur des déformations

On a vu précédemment que le tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$ est la combinaison d'une **déformation pure** et d'une **rotation pure**.

Pour construire un **tenseur des déformations**, on peut donc chercher à « supprimer » la rotation pure de façon à ne garder que la déformation pure. Intuitivement, on peut s'attendre à ce que le **produit scalaire entre deux vecteurs** ne soit pas modifié dans le cas d'un **mouvement de corps rigide** (Figure 20), ce qui peut fournir une base de travail pour la recherche d'une **quantification de la déformation**.

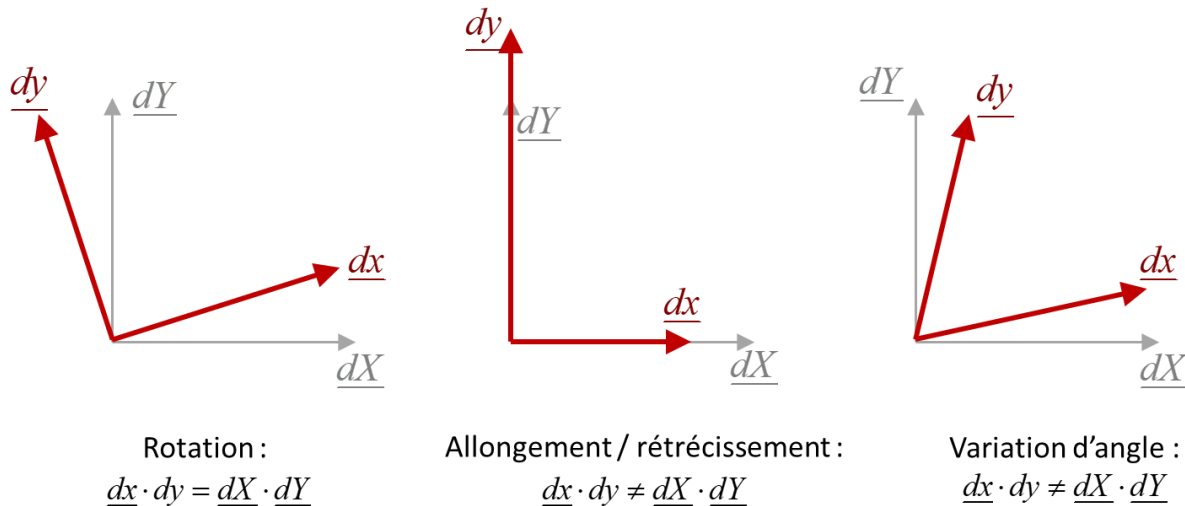


Figure 20 : Illustration des variations du produit scalaire. Lors d'une rotation, le produit scalaire est conservé. Lorsqu'un des vecteurs change de longueur, le produit scalaire varie. Lorsque l'angle entre les vecteurs change, le produit scalaire varie également.

2.4.1.2 Formulation lagrangienne : tenseur de Green-Lagrange

Considérons un vecteur matériel élémentaire $\underline{dX}$ qui devient $\underline{dx} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dX}$ après transformation, et de la même façon $\underline{dY}$ qui devient $\underline{dy} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dY}$.

Dans un premier cas on cherche à comparer la valeur du produit scalaire entre deux vecteurs $\underline{dx}$ et $\underline{dy}$ dans la configuration actuelle par rapport à leur produit scalaire dans la configuration de référence :

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dX} \cdot \underline{dY} = \underline{dX} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dY} - \underline{dX} \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \underline{dY} = \underline{dX} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}} \right) \cdot \underline{dY} = \underline{dX} \cdot \underline{\underline{2E}} \cdot \underline{dY}$$

On vient d'introduire ici le tenseur de Green-Lagrange:

Equation fondamentale 2-6

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) : \text{tenseur des déformations de Green-Lagrange}$$

On montre facilement (comme son nom l'indique) que c'est un tenseur **lagrangien** et **symétrique**.

Application à l'exemple introductif

Reprenons le tenseur gradient de la transformation obtenu dans l'exemple introductif:

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$$

Calculons le tenseur de Green-Lagrange pour cette transformation :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}} &= \frac{1}{2} \left[\left(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 \right) \cdot \left(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 \right) - \underline{\underline{I}} \right] \\ \underline{\underline{E}} &= \frac{1}{2} \left[\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + -\underline{\underline{I}} \right] \\ \underline{\underline{E}} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{t}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2) \right) \end{aligned}$$

On constate directement que ce tenseur tend vers le tenseur nul lorsque $t \rightarrow 0$.

On a vu précédemment qu'on pouvait noter: $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t)$ avec $\underline{u}$ le champ de déplacement. D'après la définition qui précède, on peut donc directement exprimer le **tenseur de Green-Lagrange**:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2}((\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \cdot (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Grad}} \underline{u}) - \underline{\underline{I}})$$

Ce qui permet d'écrire la forme importante :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \cdot \underline{\underline{Grad}} \underline{u} \right)$$

2.4.1.3 Formulation eulérienne : tenseur d'Euler-Almansi

On cherche maintenant à effectuer l'opération opposée : on veut comparer la valeur du produit scalaire entre deux vecteurs $d\underline{X}$ et $d\underline{Y}$ dans la configuration de référence par rapport à leur produit scalaire dans la configuration actuelle :

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dX} \cdot \underline{dY} = \underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{dx} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{dy} = \underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dx} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{dy} = \underline{dx} \cdot \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^{-T} \underline{\underline{F}}^{-1} \right) \cdot \underline{dy} = \underline{dx} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{dy}$$

On vient d'introduire ici le tenseur d'Euler-Almansi (eulérien) :

Equation fondamentale 2-7

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \right) : \text{tenseur des déformations d'Euler-Almansi}$$

On montre facilement (comme son nom l'indique) que c'est un tenseur **eulérien** et **symétrique**.

Application à l'exemple introductif

Reprenons le tenseur gradient de la transformation obtenu dans l'exemple introductif:

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$$

On peut calculer le tenseur d'Euler-Almansi correspondant :

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{I}} - \left(1 + \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \frac{t}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2) \right]$$

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{t}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2) \right)$$

On voit que ce tenseur est différent du précédent, mais tend également vers $\underline{\underline{0}}$ lorsque $t \rightarrow 0$.

NB : Il existe d'autres tenseurs lagrangiens ou eulériens visant à décrire la déformation du milieu continu. Ils ont pour point commun d'être égaux au tenseur nul lors d'une transformation de corps rigide. Sous l'hypothèse des petites déformations (dans laquelle nous nous placerons en section suivante), toutes ces déformations sont néanmoins équivalentes.

A retenir 2-6

Les composantes des tenseurs des déformations sont sans dimension.

2.4.2. Cas des transformations infinitésimales

2.4.2.1 Tenseur des déformations en HPP

Dans les sections précédentes, nous nous sommes intéressés à une déformation **quelconque** entre deux configurations K_0 et K_t . Aucune hypothèse n'a été faite quant

aux **amplitudes** de la déformation et des déplacements, qui peuvent être très grandes (mise en forme d'un tôle) ou infinitésimales (déformation du sol sous le poids du corps).

L'expression du tenseur de déformation de Green-Lagrange exposé précédemment est dépendante du champ de déplacement de manière **non-linéaire**, en raison du terme en $(\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \cdot \underline{\underline{Grad}} \underline{u}$. Si la déformation peut être considérée **infinitésimale** ($\underline{\underline{Grad}} \underline{u} \ll 1$), on constate que ce terme non-linéaire devient **négligeable**. De plus, si les déplacements sont petits, on peut **confondre** les configurations K_0 et K_t , et confondre ainsi les descriptions lagrangiennes et eulériennes : on dit alors qu'on est sous l'hypothèse des **petits déplacements**.

Si ces deux conditions sont réunies (**petites déformations** et **petits déplacements**), on dit qu'on se place alors sous **l'hypothèse des petites perturbations** (HPP).

A retenir 2-7

Hypothèse des petites perturbations (HPP) =

hypothèse des petites **déformations** + hypothèse des petits **déplacements**

Dans ce cas, on peut alors exprimer la déformation sous la forme du tenseur des déformations linéarisé, noté $\underline{\underline{\varepsilon}}$, et qui s'écrit:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \lim_{\underline{\underline{Grad}} \underline{u} \rightarrow 0} \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T + \cancel{(\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \cdot \underline{\underline{Grad}} \underline{u}} \right)$$

Equation fondamentale 2-8

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T)$$

Tenseur des déformations linéarisé en HPP

C'est l'expression qu'on retiendra dans toute la suite pour la notion de **déformation**.

Application à l'exemple introductif

Reprenons le tenseur gradient de la transformation obtenu dans l'exemple introductif:

Le terme $\underline{\underline{Grad}} \underline{u}$ a été calculé précédemment : $\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$. Calculons maintenant le tenseur des déformations linéarisé :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t) + \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t) \right)^T \right) = \frac{1}{2} \frac{t}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2)$$

Comparons maintenant ce tenseur avec les tenseurs des déformations de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi calculés ci-dessus (section 2.4.1) pour la même transformation :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{t}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2) \right) \\ \underline{\underline{e}} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{t}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2) \right) \end{aligned}$$

On constate évidemment que tous ces tenseurs sont équivalents quand $t^2 \ll t$, c'est-à-dire pour une transformation infinitésimale.

2.4.2.2 Interprétation des composantes du tenseur des déformations linéarisé

→ composantes diagonales

A retenir 2-8

La composante ε_{ii} correspond à **un allongement** (si $\varepsilon_{ii} > 0$) ou à **un rétrécissement** (si $\varepsilon_{ii} < 0$) relatif selon la direction $\underline{e}_i$.

Démonstration pour les curieux :

On a vu précédemment que le tenseur des déformations de Green-Lagrange revenait à comparer les produits scalaires de deux vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{y}$ dans les configurations de référence et actuelle:

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dX} \cdot \underline{dY} = \underline{dX} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dY} - \underline{dX} \cdot \underline{I} \cdot \underline{dY} = 2 \underline{dX} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{dY}$$

$$\text{En HPP, on peut donc noter : } \underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dX} \cdot \underline{dY} \approx 2 \underline{dX} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{dY}$$

Si on considère le produit scalaire entre deux mêmes vecteurs $\underline{dX} = \underline{dY} = dX \underline{e}_1$ par exemple, on peut noter :

$$\begin{aligned} \underline{dx} \cdot \underline{dx} &= dx^2 \approx 2 \underline{dX} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{dX} + \underline{dX} \cdot \underline{dX} \\ \Rightarrow dx^2 &\approx 2 \varepsilon_{11} dX^2 + dX^2 = dX^2 (1 + 2 \varepsilon_{11}) \end{aligned}$$

$$\text{Puis en prenant un développement limité au premier ordre: } \frac{dx}{dX} \approx \sqrt{1 + 2 \varepsilon_{11}} \approx 1 + \varepsilon_{11}$$

→ composantes non-diagonales

A retenir 2-9

La composante ε_{ij} ($i \neq j$) correspond à **la moitié de la variation d'angle** dans le plan $(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$.

Démonstration pour les curieux : prenons maintenant les deux vecteurs perpendiculaires $\underline{dX} = dX \underline{e}_1$ et $\underline{dY} = dY \underline{e}_2$.

L'expression devient alors : $\underline{dx} \cdot \underline{dy} \approx 2\underline{dX} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{dY} + \cancel{\underline{dX} \cdot \underline{dY}}$. Si on note enfin $(\underline{dx}, \underline{dy}) = \pi/2 - \theta$ on arrive à l'expression : $\underline{dx} \cdot \underline{dy} = dx dy \sin \theta \approx dx dy \theta \approx 2dX^2 \varepsilon_{12}$

qui, si on s'arrête au premier ordre, se résume à $\theta \approx 2\varepsilon_{12}$.

Exemple 2-8

Reprenons toujours la même transformation que précédemment, pour laquelle on a calculé :

$$[\underline{\varepsilon}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & t/\tau & 0 \\ t/\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut en déduire que durant cette transformation, la variation d'angle dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ est égale à $2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} = t/\tau$.

Une illustration des interprétations physiques de $\underline{\varepsilon}$ est donnée Figure 21 :

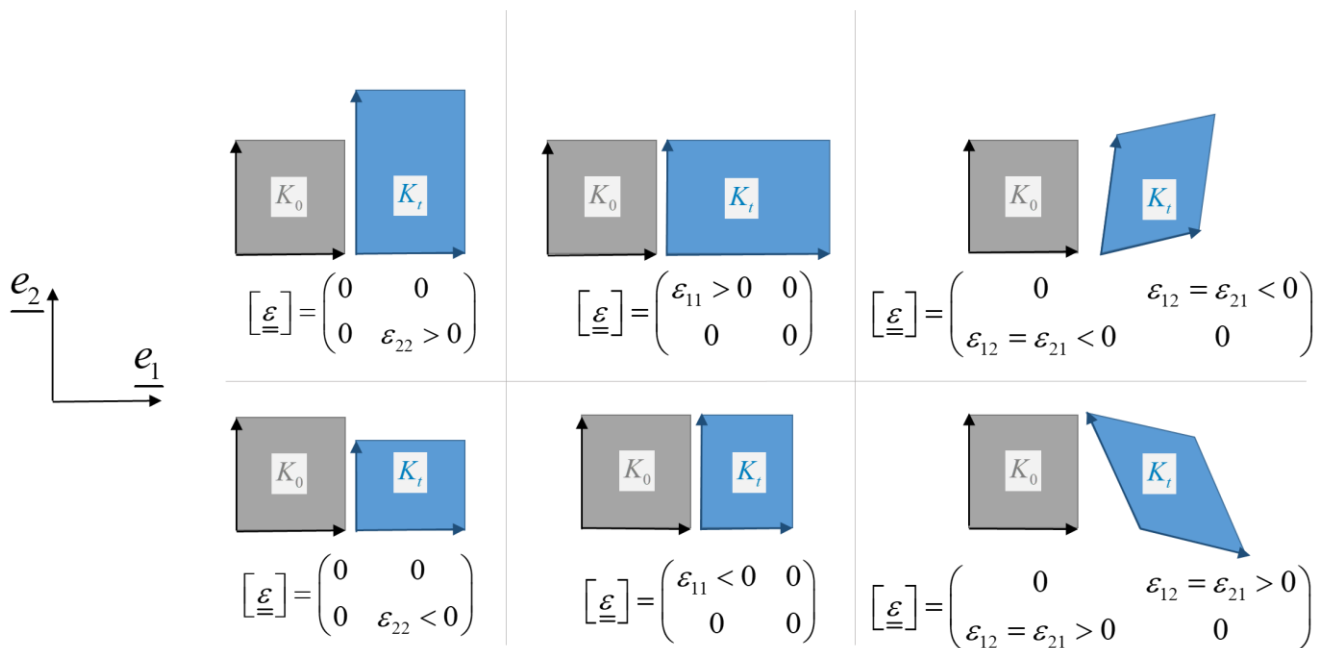


Figure 21 : Interprétation physique des différentes composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans le cas d'une transformation dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

A retenir 2-10

On en déduit également la différence entre **dilatation** et **déformation** dans une direction donnée :

$$\lambda = 1 + \varepsilon$$

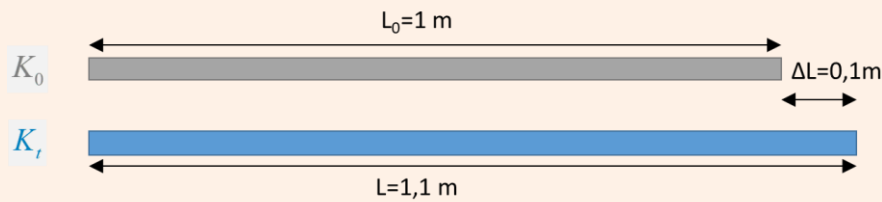
2.4.2.3 Concrètement : Quelle déformation utiliser ?

On vient donc d'illustrer le fait que la matrice représentative du tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ contient **des variations d'angle** et des **variations de longueur**. Elles sont **sans dimension** est généralement exprimé en **pourcents**.

Exemple 2-9

Reprenons la définition ci-dessus : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T)$

On se place dans le cas d'une barre (en une dimension) qui mesure $L_0 = 1$ mètre et qui s'allonge de $\Delta L = 10$ cm sous l'effet d'une force de traction. La barre est fixée du côté gauche (son déplacement est nul), et sa longueur après l'allongement est naturellement : $L = L_0 + \Delta L$



La transformation serait formulée ainsi :

$$u(X) = \Delta L \left(\frac{X}{L} \right)$$

On peut donc aisément calculer la déformation selon la définition de Green-Lagrange (section 2.4.1.2) :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \left(\text{Grad } u + (\text{Grad } u)^T + (\text{Grad } u)^T \cdot \text{Grad } u \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta L}{L} + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 \right) = \frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 \end{aligned}$$

D'après les valeurs numériques ci-dessus, on a donc dans ce cas : $E = \frac{0.1}{1} + \frac{1}{2} \left(\frac{0.1}{1} \right)^2 = 0,105 = 10,5\%$

Si on prend maintenant la définition de la déformation en HPP (section 2.4.2.1) :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} \left(\text{Grad } u + (\text{Grad } u)^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta L}{L} \right) = \frac{\Delta L}{L} \end{aligned}$$

D'après les valeurs numériques ci-dessus, on a donc dans ce cas : $\varepsilon = \frac{0.1}{1} = 0,10 = 10\%$

On constate que ces déformations sont légèrement différentes.

A retenir 2-11

Les déformations sont souvent exprimées en **pourcents**, et sont toujours **sans dimensions**.

Dans la pratique (et **arbitrairement**), on considère en général que l'on se trouve sous l'**hypothèse des petites perturbations** lorsque la déformation est de l'ordre de quelques dixièmes de pourcents.

L'hypothèse des petites perturbations est généralement respectée lorsque l'on étudie par exemple les déformations d'une structure **en usage** ou encore la **vibration** de structures.

2.4.3. Mouvement de corps rigide

Considérons le cas d'un solide **indéformable** en déplacement. D'après la décomposition du tenseur gradient de la transformation en une déformation pure et une rotation pure, on a dans ce cas :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \text{ avec } \underline{\underline{R}} \text{ un tenseur mixte orthogonal contenant la rotation.}$$

Les tenseurs précédents s'écrivent simplement : $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{0}}$

Le tenseur de déformation est donc nul lors d'un mouvement rigide. Pour autant, on ne satisfait pas ici l'HPP, car la **transformation peut être importante** ($\underline{\underline{F}}$ peut être très différent de l'identité). En HPP, on obtient également dans ce cas :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \approx \underline{\underline{E}} \approx \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{0}}$$

Revenons maintenant à ce qui a été dit concernant l'analyse du gradient d'un champ de vecteurs (section 2.1.6). Le tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ correspond à la partie symétrique du gradient du champ de déplacements, ce qui a été intuitivement expliqué par une « déformation locale » du milieu. Dans le cas du mouvement d'un solide indéformable, le gradient du champ de déplacement se réduit donc à sa partie antisymétrique :

$$\underline{\underline{\text{Grad } u}} = \underline{\underline{\Lambda}} + \underline{\underline{\chi}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\text{Grad } u}} - (\underline{\underline{\text{Grad } u}})^T)$$

Par intégration on peut écrire :

$$\underline{\underline{\text{Grad } u}} = \frac{du}{dX} = \underline{\underline{\Lambda}} \Rightarrow \underline{u} = \underline{u}_0 + \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{X}$$

Le tenseur antisymétrique $\underline{\underline{\Lambda}}$ possède uniquement trois composantes indépendants, qu'on peut arranger sous forme d'un vecteur (dit *vecteur adjoint*) $\underline{\underline{\Omega}}$: on retrouve alors une expression de distributivité du déplacement :

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + \underline{\underline{\Omega}} \wedge \underline{X}$$

Exemple 2-10

Considérons le cas d'une de la rotation d'un cylindre **rigide** autour de son axe $\underline{e}_z$ (voir exemple introductif de la section 1.3), défini par un vecteur rotation $\underline{\underline{\Omega}} = \Omega \underline{e}_z$ (sans unité : ça n'est pas une

vitesse de rotation !). L'écriture du champ de déplacement peut alors se formuler $\underline{u} = \Omega R \underline{e}_\theta$.

Dans ce cas le gradient du déplacement s'écrit :

$$\underline{\underline{Grad}} \underline{u} = \frac{-u_\theta}{R} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial R} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r = -\Omega \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \Omega \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r$$

On observe que ce tenseur est antisymétrique et on note : $\underline{\underline{Grad}} \underline{u} = \underline{\underline{\Lambda}}$

On peut vérifier que la déformation due à cette transformation de corps rigide est nulle :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \right) = \frac{1}{2} \left(-\Omega \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \Omega \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \Omega \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta - \Omega \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r \right) = \underline{\underline{0}}$$

Le déplacement du point située en $\underline{X} = R \underline{e}_r$ devient d'après ce qui précède :

$$[\underline{u}] = \cancel{[\underline{u}_0]} + \begin{pmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Omega R \underline{e}_\theta \text{ et on retrouve bien le résultat connu.}$$

2.5. Le taux (ou vitesse) de déformation

2.5.1. Vitesse de déformation et vitesse de rotation

Dans une description eulérienne, on ne connaît pas les trajectoires des points matériels mais uniquement le champ de vitesses $\underline{v}(\underline{x}, t)$. On peut alors à chercher à dériver par rapport au temps la variation du produit scalaire écrite ci-dessus:

$$\underline{\dot{dx}} \cdot \underline{\dot{dy}} - \cancel{\underline{\dot{dX}} \cdot \underline{\dot{dY}}} = \underline{\dot{dx}} \cdot \underline{\dot{dy}} + \underline{\dot{dx}} \cdot \underline{\dot{dy}}$$

Les termes $\underline{\dot{dx}}$ et $\underline{\dot{dy}}$ peuvent s'écrire à partir de la définition de l'opérateur gradient : $\underline{\dot{dx}} = \underline{\dot{dv}} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dx}$ et $\underline{\dot{dy}} = \underline{\dot{dv}} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dy}$

$$\underline{\dot{dx}} \cdot \underline{\dot{dy}} - \cancel{\underline{\dot{dX}} \cdot \underline{\dot{dY}}} = (\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dx}) \cdot \underline{\dot{dy}} + \underline{\dot{dx}} \cdot (\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dy})$$

$$\underline{\dot{dx}} \cdot \underline{\dot{dy}} = \underline{\dot{dx}} \cdot \left((\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t))^T + \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right) \cdot \underline{dy} = \underline{\dot{dx}} \cdot 2 \underline{\underline{d}} \cdot \underline{dy}$$

On vient alors d'introduire le tenseur $\underline{\underline{d}}$, appelée **vitesse de déformation eulérienne**, et qui se définit :

Equation fondamentale 2-9

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(x,t) + \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(x,t) \right)^T \right) \text{ ou encore } d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) : \text{vitesse de déformation}$$

On vient de montrer ci-dessus que la vitesse de déformation en formulation eulérienne s'exprime comme la **partie symétrique du gradient du champ de vitesses**.

Cette quantité est essentielle en mécanique des fluides et porte le nom de **tenseur de description eulérienne** : on peut écrire ce tenseur :

$$\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(x,t) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}}$$

Il vient alors naturellement que:

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{k}}^T + \underline{\underline{k}}) = \frac{1}{2} \left(\left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(x,t) \right)^T + \underline{\underline{grad}} \underline{v}(x,t) \right)$$

$\underline{\underline{k}}$ peut être décomposé en une partie symétrique et une partie antisymétrique de la façon suivante:

$$\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{k}} + \underline{\underline{k}}^T) + \frac{1}{2} (\underline{\underline{k}} - \underline{\underline{k}}^T)$$

On fait alors apparaître un tenseur appelé le tenseur **vitesse de rotation** $\underline{\underline{\Omega}}$:

Equation fondamentale 2-10

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(x,t) - \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(x,t) \right)^T \right) \text{ ou encore } \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) : \text{vitesse de rotation}$$

Application à l'exemple introductif

Reprenons le tenseur gradient de la transformation obtenu dans l'exemple introductif:

$$\left[\underline{\underline{grad}} \underline{v}(x,t) \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\underline{\underline{d}} \right] = \frac{1}{2} \left(\left[\underline{\underline{grad}} \underline{v} \right] + \left[\underline{\underline{grad}} \underline{v} \right]^T \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1/\tau & 0 \\ 1/\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\underline{\underline{\Omega}} \right] = \frac{1}{2} \left(\left[\underline{\underline{grad}} \underline{v} \right] - \left[\underline{\underline{grad}} \underline{v} \right]^T \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1/\tau & 0 \\ 1/\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.6. La conservation de la masse

2.6.1. Bagage mathématique : opérateur divergence

2.6.1.1 Divergence d'un champ de vecteurs

Une première interprétation physique de l'opérateur divergence peut se faire en considérant le cas de la divergence d'un champ de vecteurs $\underline{T}(\underline{x})$: la divergence de ce champ de vecteurs en un point sera une quantité **scalaire**, qui correspond à la façon dont il « **converge** » vers ce point ou « **diverge** » de ce point. Le champ de scalaires résultant sera positif dans le cas où les vecteurs « divergent » du point, et négatif dans le cas où les vecteurs « convergent » vers ce point (Figure 22).

Pour la suite on ne considère que le cas de la divergence eulérienne, c'est-à-dire par rapport à la configuration actuelle.

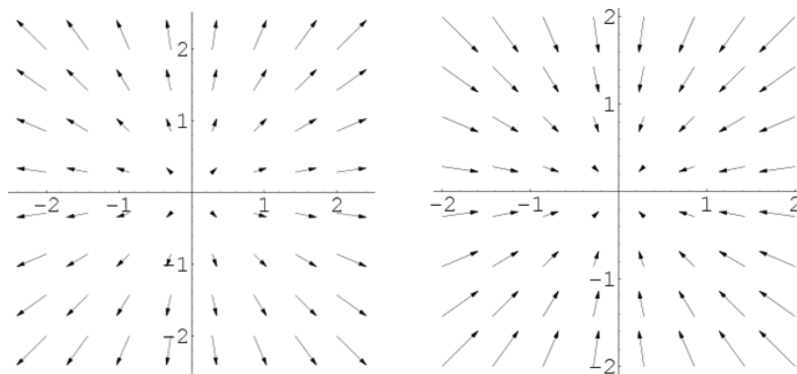


Figure 22: Interprétation physique élémentaire de la divergence d'un champ de vecteurs $\underline{T}(\underline{x})$: à gauche, la divergence évaluée à l'origine est positive ; à droite, la divergence évaluée à l'origine est négative.

Une première définition qui peut être donnée est que la divergence d'un champ est égale à la trace du gradient de ce champ de vecteurs $\underline{T}(\underline{x})$:

$$\text{div}(\underline{T}(\underline{x})) = \text{Tr}(\underline{\text{grad}}(\underline{T}(\underline{x})))$$

On note bien que l'opérateur divergence n'est pas souligné car c'est un **scalaire**.

Comme pour l'opérateur gradient, la définition dépend donc du système de coordonnées dans lequel on travaille : la définition de la divergence d'un champ de vecteurs est donnée dans le Tableau 4.

Il est intéressant pour ce qui va suivre d'évoquer la propriété suivante de l'opérateur divergence, qui sera notamment nécessaire pour en effectuer une interprétation physique à partir de sa formulation intégrale :

$$\text{div}(\alpha \underline{T}) = \alpha \text{div}(\underline{T}) + \underline{T} \cdot \underline{\text{grad}}(\alpha)$$

avec α un scalaire et $\underline{T}$ un vecteur quelconques.

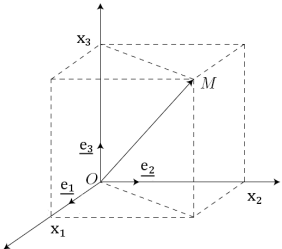
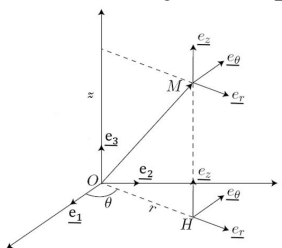
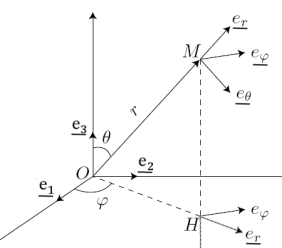
Divergence d'un champ de vecteurs	
Coordonnées cartésiennes 	$\text{div} \underline{T} = \text{Tr} \left[\underline{\underline{\text{grad} \underline{T}}} \right] = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial T_3}{\partial x_3}$
Coordonnées cylindriques 	$\text{div} \underline{T} = \text{Tr} \left[\underline{\underline{\text{grad} \underline{T}}} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial(r T_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T_z}{\partial z}$
Coordonnées sphériques 	$\text{div} \underline{T} = \text{Tr} \left[\underline{\underline{\text{grad} \underline{T}}} \right] = \frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_\phi}{\partial \phi} + \cot \theta \frac{T_\theta}{r} + 2 \frac{T_r}{r}$

Tableau 4 : Définition de la divergence d'un champ de vecteurs pour les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

2.6.1.2 Divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2

La divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2 est malheureusement plus difficile à interpréter physiquement, et on passe généralement davantage par sa définition mathématique en utilisant par exemple la définition :

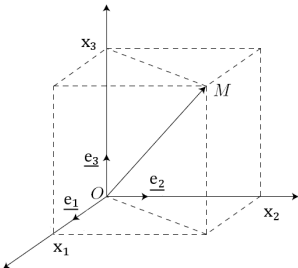
$$\underline{\underline{\text{div } T}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \quad (\text{ou encore } \underline{\underline{\text{div } T}} = T_{ij,j} \underline{e}_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i)$$

Si on reprend la définition de l'opérateur Nabla en coordonnées cartésiennes :

$$[\underline{\underline{\text{div } T}}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

On note bien que la divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2 est un **champ de vecteurs**, et donc dans ce cas l'opérateur divergence est souligné une fois. Une interprétation physique du résultat se déduit du théorème de la divergence (voir section 2.6.1.3).

La définition dépend du système de coordonnées dans lequel on travaille, et on utilisera donc les formules répertoriées dans le Tableau 5:

Divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2	
Coordonnées cartésiennes 	$[\underline{\underline{\text{div } T}}] = [\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}$

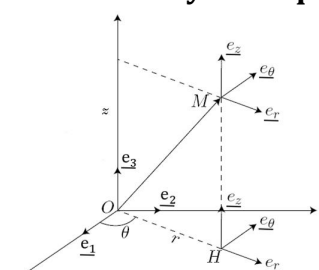
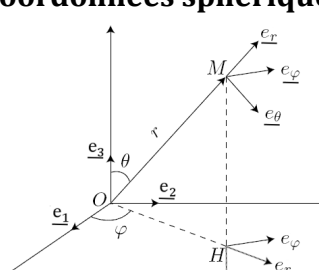
Coordonnées cylindriques 	$[\underline{\text{div}} \underline{T}] = [\underline{T} \cdot \underline{\nabla}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{r\theta} + T_{\theta r}) + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{zr} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$
Coordonnées sphériques 	$[\underline{\text{div}} \underline{T}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\phi\phi} - T_{r\theta} \cot \theta) \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} ((T_{\theta\theta} - T_{\phi\phi}) \cot \theta + 3T_{r\theta}) \\ \frac{\partial T_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (3T_{r\phi} + 2T_{\theta\phi} \cot \theta) \end{pmatrix}$

Tableau 5 : expressions de la divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2 en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

2.6.1.3 Formulation intégrale : théorème de flux-divergence

Le **théorème de flux-divergence**, ou plus simplement **théorème de la divergence**, sera largement utilisé dans la suite de ce cours et donne une interprétation physique de la divergence d'un champ de vecteurs et de la divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2.

On considère un milieu défini par son **volume** Ω fermé par une **frontière** $\partial\Omega$ sur laquelle on peut définir en tout point $\underline{x} \in \partial\Omega$ un **vecteur unitaire normal sortant** $\underline{n}(\underline{x})$ (Figure 23). Le vecteur non unitaire $\underline{n}(\underline{x})da$ est un **élément de surface orienté** vers la normale sortante à $\partial\Omega$ et d'aire da .

La **formule de flux-divergence** stipule que le flux du champ de vecteurs $\underline{T}(\underline{x})$ ou de tenseurs d'ordre 2 $\underline{T}(\underline{x})$ à travers la frontière $\partial\Omega$ est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ sur tout le volume, soit :

$$\int_{\Omega} \text{div}(\underline{T}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{n} da$$

$$\int_{\Omega} \underline{\text{div}}(\underline{T}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{n} da$$

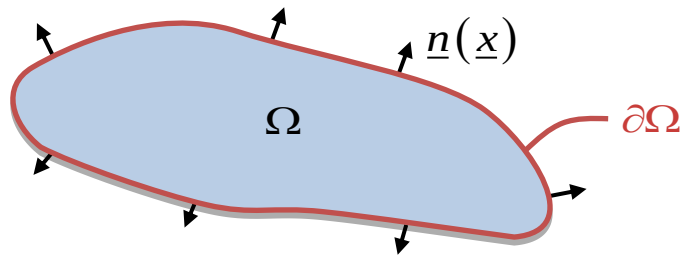


Figure 23: Milieu de volume Ω et de frontière $\partial\Omega$, et vecteur unitaire normal sortant $\underline{n}(\underline{x})$

2.6.1.4 Laplacien d'un champ de tenseurs

Les définitions des opérateurs gradient et divergence étant posées, on peut définir l'opérateur **laplacien d'un champ de scalaires** et le **laplacien d'un champ de vecteurs** comme la **divergence du gradient** de ce champ de scalaires ou de vecteurs.

On a vu plus haut que l'opérateur gradient « augmente l'ordre » du tenseur :

Gradient de scalaires (ordre 0) = vecteurs (ordre 1)

Gradient de vecteurs (ordre 1) = tenseurs d'ordre 2

On a vu de même que l'opérateur divergence « diminue l'ordre » du tenseur :

Divergence de vecteurs (ordre 1) = scalaires (ordre 0)

Divergence de tenseurs d'ordre 2 = vecteurs (ordre 1)

On peut donc en déduire que l'opérateur laplacien **conserve** l'ordre du tenseur.

On a donc évidemment :

$$\Delta T = \text{div}(\underline{\text{grad}} T)$$

$$\underline{\Delta T} = \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\text{grad}} T})$$

Son interprétation se déduit de celles des opérateurs gradient et divergence et elle est intuitive pour un champ scalaire T : si $\Delta T(\underline{x}) > 0$, cela signifie que $\underline{\text{grad}} T$ diverge autour de $\underline{x}$, et donc que $T(\underline{x})$ admet un minimum local en $\underline{x}$.

Exemple 2-11

Considérons la fonction « altitude », qui en tout point du plan associe un scalaire z , par exemple selon la fonction $z(\underline{x}) = x_1 e^{-(x_1^2 + x_2^2)}$, représentée ci-dessous (Figure 24), qui possède un minimum local et un maximum local. On voit alors nettement que le champ de vecteurs correspondant au gradient de la fonction scalaire « **diverge** » au niveau du minimum local et « **converge** » au niveau du maximum local. La divergence du gradient, soit le laplacien, est donc positive au minimum local et négative au maximum local.

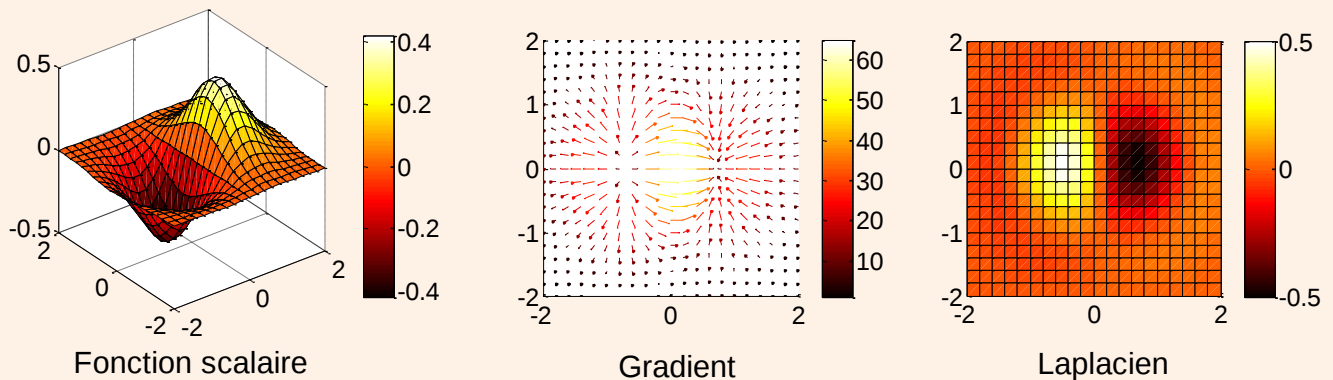


Figure 24: Gradient et laplacien d'une fonction scalaire.

2.6.2. Dérivée particulière d'une intégrale de volume

Si on cherche à exprimer la conservation d'une quantité (masse, quantité de mouvement, ...) à partir d'une description eulérienne de la transformation, on cherche à exprimer le fait que la **dérivée particulière** de cette quantité **intégrée sur un volume** est constante durant la transformation. Par exemple, la masse globale d'un fluide qui s'écoule est conservée: la dérivée particulière de l'intégrale volumique de la masse volumique en description eulérienne $\rho(\underline{x}, t)$ est donc nulle.

Soit donc un volume Ω_t dans la configuration actuelle K_t délimité par la frontière $\partial\Omega_t$. Soit $b(\underline{x}, t)$ une quantité eulérienne définie par unité de volume (densité volumique). On cherche à exprimer la dérivée par rapport au temps de l'intégrale de $b(\underline{x}, t)$ sur le volume Ω_t en suivant ce volume dans son mouvement, soit la quantité:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t$$

On a vu précédemment que $\frac{d\Omega_t}{d\Omega_0} = \det \underline{\underline{F}} = J$ et $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$, et on peut donc écrire:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} b(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t) J d\Omega_0$$

Comme le volume Ω_0 exprimé dans la configuration initiale est fixe, on a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t &= \int_{\Omega_0} \frac{d}{dt} (b(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t) J) d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \left(\frac{d}{dt} (b(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t)) J + b(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t) \frac{d}{dt} (J) \right) d\Omega_0 \end{aligned}$$

On doit donc écrire la dérivée particulière de $b(\underline{x}, t)$, et de plus on a démontré précédemment que $\dot{J} = \text{div } \underline{v}(\underline{x}, t) J$, et on peut donc écrire (les notations $(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t)$ sont omises pour allègement) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_0} \left(\underline{\text{grad}}(b) \cdot \underline{v} + \frac{\partial b}{\partial t} + b \text{div}(\underline{v}) \right) J d\Omega_0$$

Si on se rappelle maintenant que $\text{div}(\alpha \underline{a}) = \underline{\text{grad}} \alpha \cdot \underline{a} + \alpha \text{div}(\underline{a})$ et que $d\Omega_t = J d\Omega_0$, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \left(\text{div}(b \underline{v}) + \frac{\partial b}{\partial t} \right) d\Omega_t$$

Le théorème de flux-divergence nous permet enfin d'écrire:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\partial b}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} b \underline{v} \cdot d\underline{a}$$

avec $d\underline{a} = \underline{n} da$ un vecteur-aire élémentaire.

Si l'on décompose la variation de cette intégrale de volume, on a donc:

- $\int_{\Omega_t} \partial b(\underline{x}, t) / \partial t d\Omega_t$: l'effet de la variation de $b(\underline{x}, t)$ au cours du temps dans Ω_t considéré comme fixe
- $\int_{\partial\Omega_t} b(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot d\underline{a}$: l'effet de la convection due à la variation du volume Ω_t .

2.6.3. Equation de continuité ou conservation de la masse

2.6.3.1 Formulation lagrangienne

Nous faisons l'hypothèse d'une densité ρ , exprimée en kg/m^3 , telle que la masse d'un corps puisse être exprimée dans les configurations K_0 et K_t :

$$M_0(t) = \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}) d\Omega_0 \quad \text{et} \quad M(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) d\Omega_t$$

La conservation de la masse implique que $\forall t, M(t) - M_0 = 0$, ce qu'on peut écrire:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) d\Omega_t - \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}) d\Omega_0 &= 0 \\ \Rightarrow \int_{\Omega_0} \rho(\underline{x}, t) J d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}) d\Omega_0 &= 0 \Rightarrow \int_{\Omega_0} (\rho(\underline{x}, t) J - \rho_0(\underline{X})) d\Omega_0 = 0 \end{aligned}$$

Cette expression étant valide pour tout Ω_0 , on peut déduire une formulation **lagrangienne** de la conservation de la masse en écrivant :

$$\rho J = \rho_0, \text{ ou } \rho d\Omega = \rho_0 d\Omega_0 \text{ (description lagrangienne)}$$

2.6.3.2 Formulation eulérienne

Pour en obtenir une formulation **eulérienne**, on part du fait que la dérivée particulière de l'intégrale de volume doit être nulle, soit:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho(\underline{x}, t)}{\partial t} + \text{div}(\rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t)) \right) d\Omega_t = 0$$

C'est la *forme globale* de l'équation de **la conservation de la masse**, qu'on appelle aussi **équation de continuité**. Comme elle doit être validée quel que soit le volume choisi, on peut en déduire une *forme locale*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0 : \text{équation de continuité (description eulérienne)}$$

A retenir 2-12

Une formulation **globale** intégrée sur un volume sera appelée dans la suite formulation **faible**.

Une formulation **locale** (non-intégrée et vraie partout) sera appelée formulation **forte**.

En vertu du théorème de la divergence, on peut également écrire :

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\partial \Omega_t} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = 0$$

- $\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega_t$: effet de la variation dans le temps de la masse volumique
- $\int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} \cdot \underline{da}$: terme de convection (flux de matière sortant)

En se rappelant que $\text{div}(\rho \underline{v}) = \underline{\text{grad}} \rho \cdot \underline{v} + \rho \text{div}(\underline{v})$, l'équation de continuité précédente permet d'écrire :

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\text{grad}} \rho \cdot \underline{v}}_{d\rho/dt} + \rho \text{div}(\underline{v}) = 0$$

On en déduit donc une seconde écriture pour cette équation de continuité :

Equation fondamentale 2-11

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(\underline{v}) = 0 : \text{conservation de la masse (description eulérienne)}$$

2.6.3.3 Cas incompressible

Dans le cas d'un milieu **incompressible**, la masse volumique est conservée.

$$\rho(\underline{x}, t) = \rho_0 \text{ indépendant de } \underline{x} \text{ et de } t \quad \Rightarrow \quad \cancel{\frac{d\rho_0}{dt}} + \rho_0 \text{div} \underline{v} = 0$$

Comme la masse volumique est on nulle, on en déduit tout naturellement :

Equation fondamentale 2-12

$$\text{div} \underline{v} = 0 : \text{cas incompressible}$$

Résumé du CHAPITRE 2 : ce qu'il faut savoir

- ✓ Descriptions **lagrangienne** et **eulérienne**
- ✓ Définition de **la dérivée particulaire**
- ✓ Définitions : **trajectoires**, lignes de **courant**
- ✓ **Gradient de la transformation** : définition, utilisation, interprétation
- ✓ **Variation de volume** pendant une transformation
- ✓ **Tenseurs des déformations**
- ✓ Cas de **l'hypothèse des petites perturbations (HPP)**
- ✓ Définition, utilisation, interprétation des composantes du tenseur des déformations
- ✓ **Utilisation et calcul des vitesses de déformation**
- ✓ Equation de **continuité** et cas du milieu **incompressible**

Bagage mathématique associé

- ✓ Notion de **tenseur** et écriture **matricielle** des tenseurs d'ordre 2
- ✓ Opérations sur les **tenseurs**
- ✓ Opérateurs **gradient** et **divergence**

3. Modélisation des efforts intérieurs

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la modélisation des **efforts intérieurs** qui existent au sein d'un milieu continu lorsqu'il est sollicité, et à la formulation d'une condition qui traduit l'**équilibre mécanique** du milieu. Nous privilégierons une approche physique pour introduire le tenseur des contraintes, même si les mêmes résultats peuvent être obtenus par une approche mathématique plus rigoureuse et généralisable (**principe des puissances virtuelles**).

3.1. Vecteur-contrainte

Plaçons-nous toujours dans la configuration actuelle, et donc en description **eulérienne**. On va imaginer que l'on **coupe de façon fictive** le système matériel en deux parties D et D' , et l'on tente de quantifier la résultante des efforts exercés par les éléments de D' sur les éléments de D . Le "plan de coupe fictif", qu'on appellera **facette**, est de normale $\underline{n}(\underline{x})$ **sortante** à D et passe par le point M en position $\underline{n}$ (Figure 25): on postule que les efforts exercés par D' sur D peuvent être représentés par une **densité surfacique de forces** (définition en section 1.3.4.1).

Sur chaque surface élémentaire da de normale **sortante** $\underline{n}(\underline{x})$ autour du point M , les éléments du système matériel appartenant à D' exercent sur les éléments du système matériel appartenant à D une force élémentaire $\underline{df}$ déterminée par $\underline{df} = \underline{t}(M, \underline{n}(\underline{x})) da$. On peut en déduire :

$$\underline{t}(M, \underline{n}(\underline{x})) = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{\underline{df}}{da}$$

$\underline{t}(M, \underline{n}(\underline{x}))$ est un vecteur appelé **vecteur-contrainte**, il dépend de la **position** de la facette (point M) ainsi que de son **orientation**, définie par sa normale $\underline{n}(\underline{x})$.

La contrainte normale σ_n est alors définie comme la projection du vecteur-contrainte $\underline{t}(M, \underline{n})$ sur la normale sortante à la facette $\underline{n}(\underline{x})$.

On a par conséquent:

$$\sigma_n = \underline{t}(M, \underline{n}(\underline{x})) \cdot \underline{n}(\underline{x})$$

En raison de la convention de normale sortante, on comprend donc intuitivement qu'une **contrainte normale positive** traduit localement un état de **traction** tandis qu'une **contrainte normale négative** traduit localement un état de **compression**.

A retenir 3-1

Contrainte normale **positive** = **traction**

Contrainte normale **négative** = **compression**

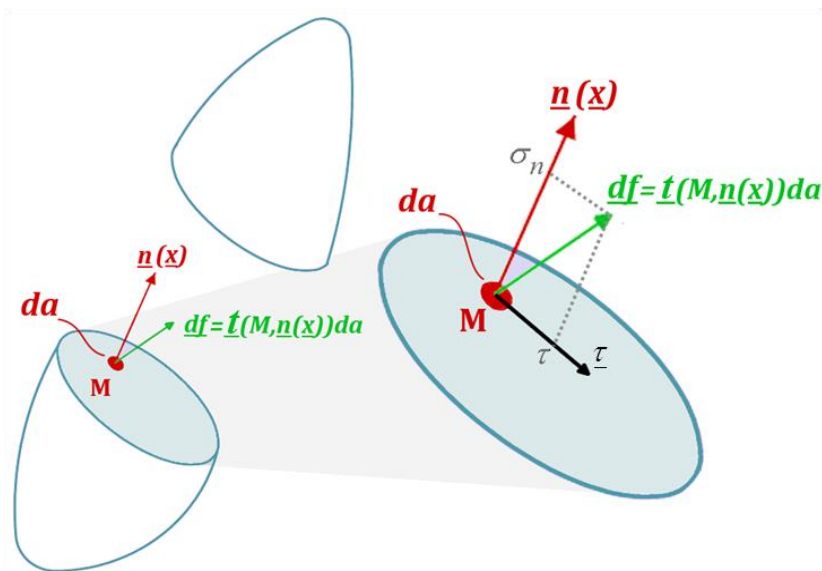


Figure 25: Définition du vecteur contrainte $\underline{t}(M, \underline{n}(\underline{x}))$ par une coupe fictive du solide au point M et selon un plan normal à $\underline{n}(\underline{x})$

Une contrainte contenue dans le plan défini la facette de normale $\underline{n}(\underline{x})$ sera appelée **contrainte de cisaillement**.

A retenir 3-2

Les composantes du vecteur-contrainte sont homogènes à une **pression**

(force par unité de surface , $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa}$)

Le vecteur-contrainte $\underline{t}(M, \underline{n}(\underline{x}))$ est défini dans la configuration actuelle : c'est une grandeur **eulérienne**.

3.2. Tenseur des contraintes de Cauchy

3.2.1. Définition

Comme on vient de le voir, le vecteur-contrainte n'est pas suffisant pour caractériser les efforts intérieurs en un point car ses composantes dépendent de la normale à la facette. Pour un essai de traction simple par exemple, les composantes du vecteur-contrainte en un même point vont être différentes suivant que l'on "coupe" l'éprouvette dans la direction de la traction ou dans la direction perpendiculaire.

On s'intéresse donc à un moyen de caractériser les relations qui lient **toutes** les normales aux facettes passant par le point M à **tous** les vecteur-contraintes associées, ce qui va justement nous permettre de faire apparaître le tenseur des contraintes de Cauchy introduit précédemment.

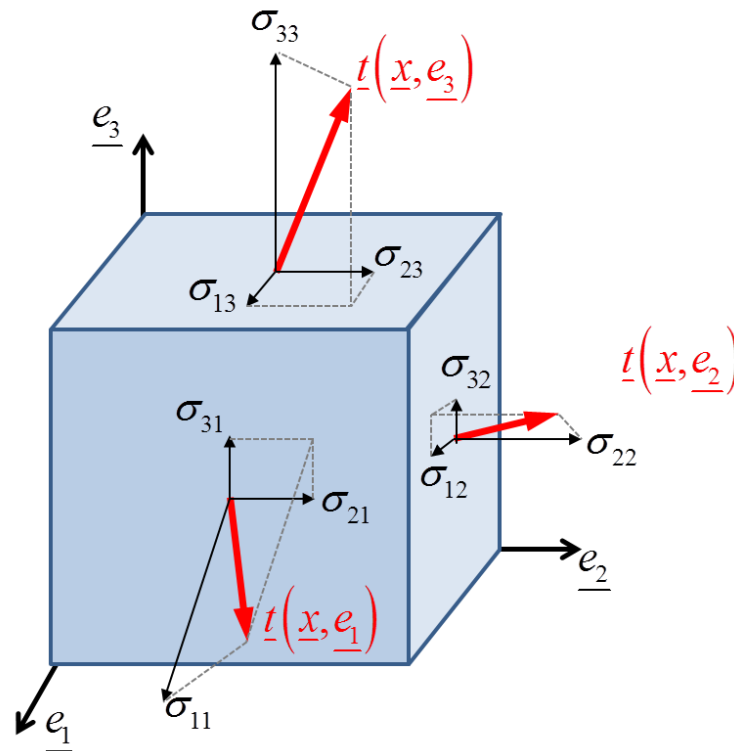


Figure 26: Représentation physique des composantes du tenseur des contraintes de Cauchy.

Considérons l'élément de matière parallélépipédique infinitésimal représenté en Figure 26. Les vecteurs-contraintes sur les facettes de normales $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ peuvent se décomposer de la manière suivante:

$$\begin{aligned}\underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_1) &= \sigma_{11}\underline{e}_1 + \sigma_{21}\underline{e}_2 + \sigma_{31}\underline{e}_3 \\ \underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_2) &= \sigma_{12}\underline{e}_1 + \sigma_{22}\underline{e}_2 + \sigma_{32}\underline{e}_3 \quad \text{ou encore } \underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_i) = \sigma_{ji}\underline{e}_j \\ \underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_3) &= \sigma_{13}\underline{e}_1 + \sigma_{23}\underline{e}_2 + \sigma_{33}\underline{e}_3\end{aligned}$$

On vient alors d'utiliser la notation suivante, qui est une convention:

A retenir 3-3

σ_{ij} : premier indice i = direction (projection sur $\underline{e}_i$)
second indice j = facette de normale $\underline{e}_j$

La notation ci-dessus revient à écrire (comme nous l'avons écrit grâce au PPV):

Equation fondamentale 3-1

$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \sigma_{ij}(\underline{x}) n_j(\underline{x}) \underline{e}_i = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) : \text{définition du vecteur-contrainte}$$

La relation $\underline{t}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ montre que le vecteur-contrainte dépend linéairement de la normale à la facette considérée.

A retenir 3-4

Le tenseur des contraintes peut être vu comme une **application linéaire** qui transforme la normale $\underline{n}(\underline{x})$ en vecteur-contrainte $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}))$

Avec cette notation, σ_{ii} (mêmes indices) représente une contrainte **normale** à la facette i , tandis que σ_{ij} (indices différents) représente une contrainte **tangentielle** à la facette j .

3.2.1. Symétrie du tenseur des contraintes

Plaçons-nous maintenant en un point $M(x_1, x_2, x_3)$ au centre du parallélépipède ci-dessus, de côté dx . Tentons d'écrire l'équilibre des moments (section 1.3.5.1) dus aux vecteurs-contraintes qui s'appliquent sur chaque facette du parallélépipède:

$$\left(\underline{t}(\underline{e}_1) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_1 - \underline{t}(-\underline{e}_1) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_1 \right) + \left(\underline{t}(\underline{e}_2) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_2 - \underline{t}(-\underline{e}_2) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_2 \right) + \left(\underline{t}(\underline{e}_3) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_3 - \underline{t}(-\underline{e}_3) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_3 \right) = \underline{0}$$

Si on considère maintenant le fait que $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$, on obtient:

$$\left(\sigma_{11} \underline{e}_1 + \sigma_{21} \underline{e}_2 + \sigma_{31} \underline{e}_3 \right) \wedge dx \underline{e}_1 + \left(\sigma_{12} \underline{e}_1 + \sigma_{22} \underline{e}_2 + \sigma_{32} \underline{e}_3 \right) \wedge dx \underline{e}_2 + \left(\sigma_{13} \underline{e}_1 + \sigma_{23} \underline{e}_2 + \sigma_{33} \underline{e}_3 \right) \wedge dx \underline{e}_3 = \underline{0}$$

$$dx \left(-\sigma_{21} \underline{e}_3 + \sigma_{31} \underline{e}_2 + \sigma_{12} \underline{e}_3 - \sigma_{32} \underline{e}_1 - \sigma_{13} \underline{e}_2 + \sigma_{23} \underline{e}_1 \right) = \underline{0}$$

On peut donc en déduire que: $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ $\sigma_{23} = \sigma_{32}$

Autrement dit, le tenseur des contraintes de Cauchy est un tenseur **symétrique** (comme on l'a vu précédemment avec le PPV). On peut donc écrire :

Equation fondamentale 3-2

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T \quad \text{soit} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad : \text{tenseur des } \mathbf{contraintes de Cauchy}, \text{ symétrique}$$

3.2.1. Interprétation des composantes du tenseur des contraintes

Comme on l'a vu précédemment et comme on l'observe sur l'incontournable Figure 26, les composantes σ_{ii} (mêmes indices) représentent des **tractions** ou **compressions** dans la direction $\underline{e}_i$, tandis que les composantes σ_{ij} (indices différentes $i \neq j$) représentent des **cisaillements** dans le plan $(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$.

Ci-dessous, on a représenté deux cas de chargement différents pour un même morceau de matière : une compression selon $\underline{e}_1$ (Figure 27.1) et un cisaillement dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ (Figure 27.2). On peut remarquer que dans le premier cas la composante prépondérante est σ_{11} , et quand dans le deuxième cas c'est la composante σ_{12} .

Remarque : Les autres composantes ne sont pas strictement nulles en raison de l'application des conditions aux limites, qui impliquent localement d'autres contraintes.

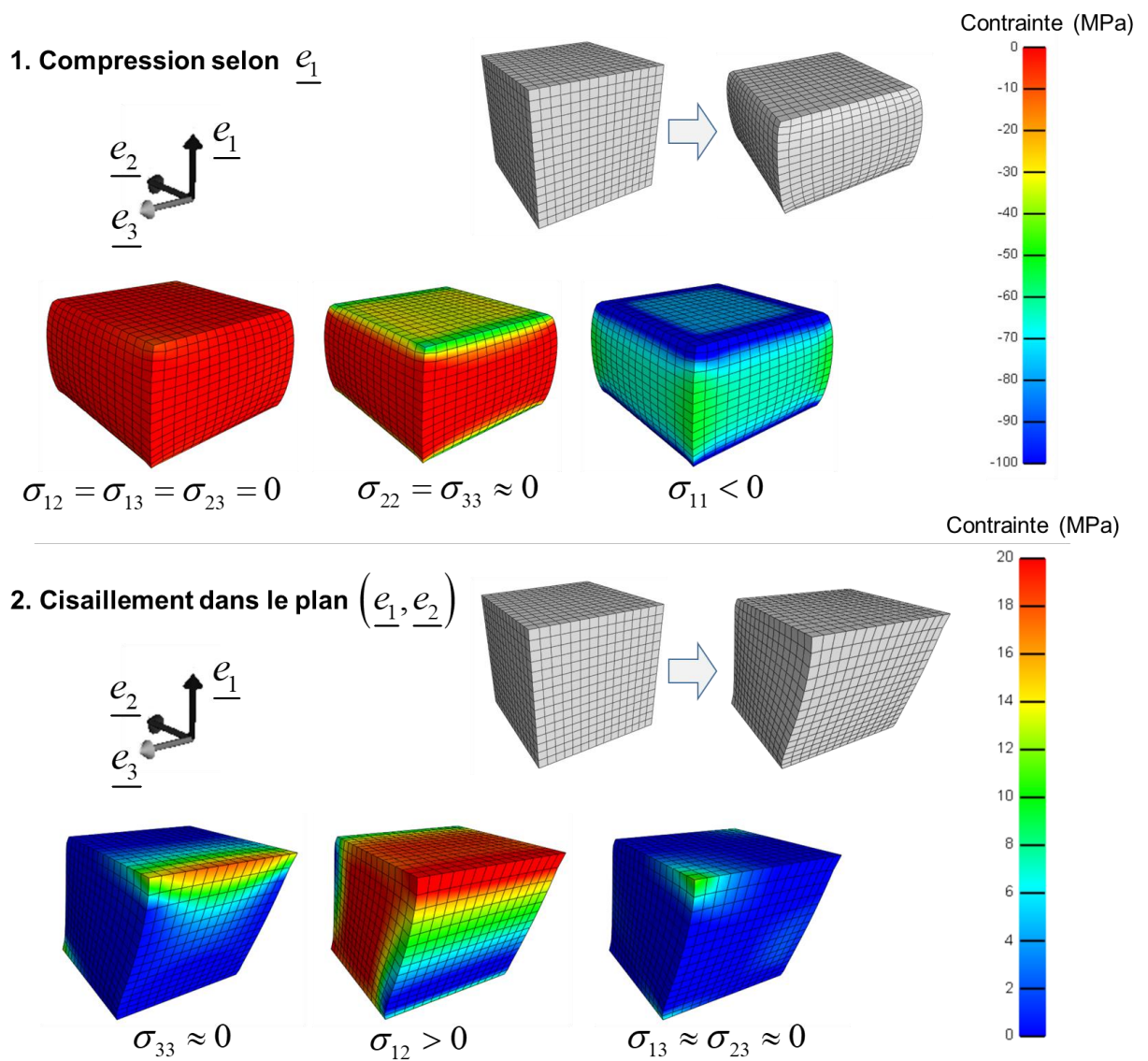


Figure 27 : Exemple d'états de contraintes et composantes du tenseur des contraintes associées. 1) compression selon $\underline{e}_1$, 2) cisaillement dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$

3.3. Propriétés du tenseur des contraintes

3.3.1. Bagage mathématique : diagonalisation d'une matrice

Une matrice $\mathbf{M}$ est dite diagonalisable s'il existe une **matrice inversible** $\mathbf{P}$ (i.e. $\det \mathbf{P} \neq 0$) est une matrice diagonale $\mathbf{D}$ telles que :

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1}$$

Les **vecteurs-colonnes** de la matrice $\mathbf{P}$ sont alors appelés des **vecteurs propres** et possèdent la propriété suivante :

$\mathbf{v}$ est un vecteur propre de $\mathbf{M} \Rightarrow$ il existe λ tel que $\mathbf{M}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

A partir de cette équation on peut donc écrire :

$$\mathbf{M}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{M}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Si on écarte la solution triviale $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, cette dernière équation appelée **équation caractéristique** possède une solution si et seulement si : $\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Les différentes solutions de cette équation $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les **valeurs propres** de $\mathbf{M}$.

La matrice diagonale $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ est formée des n valeurs propres de $\mathbf{M}$. Le processus d'identification de cette matrice diagonale s'appelle la **diagonalisation** de la matrice $\mathbf{M}$.

Exemple 3-1

Calculons les **valeurs propres** ainsi que les **vecteurs propres** de la matrice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

On doit donc résoudre l'**équation caractéristique** suivante :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(-4-\lambda) - (-3 \times 6) \\ &= -20 - \lambda + \lambda^2 + 18 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \end{aligned}$$

Cette équation du second degré possède deux solutions $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$, qui sont les deux **valeurs propres** de la matrice $\mathbf{M}$.

Les deux **vecteurs propres** $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ associés à λ_1 et λ_2 doivent remplir la condition :

$$\begin{aligned} (\mathbf{M} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 5-2 & -3 \\ 6 & -4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \\ (\mathbf{M} - \lambda_2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 5+1 & -3 \\ 6 & -4+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2v_1 - v_2 = 0 \end{aligned}$$

La solution n'est donc pas unique, et on peut définir plusieurs vecteurs propres. Les deux vecteurs suivants sont des vecteurs propres de $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3.3.2. Propriétés du tenseur des contraintes de Cauchy

3.3.2.1 Valeurs et directions principales

Le tenseur des contraintes de Cauchy est un tenseur symétrique d'ordre 2. On vient de rappeler que la matrice représentative de ce tenseur peut être diagonalisée : dans une nouvelle base formée des vecteurs propres $\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III}$, le tenseur des contraintes peut alors s'écrire :

$$[\underline{\sigma}]_{(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, les trois facettes de normale $\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III}$ **subissent uniquement des contraintes normales** (traction ou compression), mais aucune contrainte tangentielle (cisaillement). En effet, il suffit d'exprimer le vecteur-contrainte pour la facette de direction $\underline{e}_I$ pour s'en rendre compte :

$$\underline{t}(\underline{e}_I) = \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_I = \sigma_I \underline{e}_I$$

Selon les définitions énoncées dans le rappel précédent, la direction $\underline{e}_I$ est donc le vecteur propre (ou **direction principale**) associé à la valeur propre (ou **contrainte principale**) σ_I . Par convention, on détermine « l'ordre » des contraintes principales de telle sorte que $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$.

A retenir 3-5

Dans la **base principale**, le tenseur des contraintes de Cauchy est de la forme :

$$\underline{\sigma} = \sigma_I \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \sigma_{II} \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II} + \sigma_{III} \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III}$$

Les composantes de $\underline{\sigma}$ sont les **contraintes principales**. Dans cette base, il n'y a donc que des contraintes **normales** (traction/compression).

3.4. Equilibre: équation de la dynamique

Reprenons maintenant l'élément de matière ci-dessus, de volume $d\Omega_t$, de masse dm et dont la frontière est $\partial\Omega_t$ (surface fermée). Nous allons tenter d'exprimer l'**équilibre dynamique** de cet élément de matière. D'un côté de l'égalité nous allons trouver les efforts exercés sur ce système, qui se décomposent en efforts de volume (densité massique d'efforts) et en efforts de surface (densité surfacique d'efforts).

On peut écrire les quantités suivantes au point M de coordonnées $\underline{x}$:

- efforts de volume: $\int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t$ avec $\underline{f}^m$ une densité massique d'efforts

Remarque : la densité volumique est en kg/m^3 , que l'on multiplie par une densité massique d'efforts en N/kg , que l'on intègre sur un volume en m^3 : le résultat a bien la dimension d'une force en N .

- efforts de surface: $\int_{\partial\Omega_t} \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) da$ avec $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n})$ une densité surfacique d'efforts

Remarque : la densité surfacique est en N/m^2 , que l'on intègre sur une surface en m^2 : le résultat a bien la dimension d'une force en N .

De l'autre côté, nous allons trouver la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement du domaine considéré:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t$$

On a donc l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) da$$

On peut montrer (sans démonstration ici) que ce résultat mène à l'équation :

$$\int_{\Omega_t} \rho \underline{a} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) d\Omega_t$$

Cette équation constitue la formulation faible (intégrée) de l'**équation d'équilibre**. Comme elle est vraie **quel que soit le volume d'intégration**, on peut en déduire la formulation forte (locale) suivante :

Equation fondamentale 3-3

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \rho(\underline{f}^m - \underline{a}) = \underline{0} \quad : \text{équation d'équilibre}$$

C'est une équation vectorielle, dont l'expression explicite dans différents systèmes de coordonnées est donnée ci-dessous (Tableau 6) :

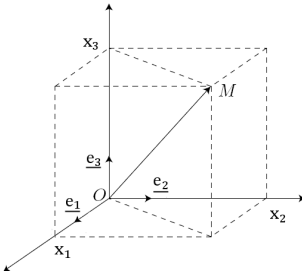
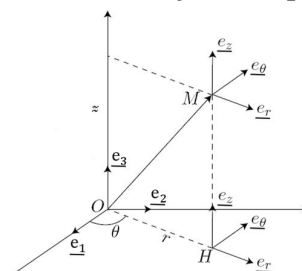
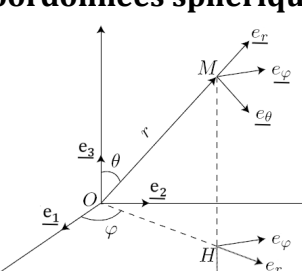
Equation de la dynamique du milieu continu	
Coordonnées cartésiennes 	$\rho(f_x^m - a_x) + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$ $\rho(f_y^m - a_y) + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0$ $\rho(f_z^m - a_z) + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$
Coordonnées cylindriques 	$\rho(f_r^m - a_r) + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$ $\rho(f_\theta^m - a_\theta) + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0$ $\rho(f_z^m - a_z) + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0$
Coordonnées sphériques 	$\rho(f_r^m - a_r) + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi} + \sigma_{r\phi} \cot \theta) = 0$ $\rho(f_\theta^m - a_\theta) + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{r \partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} ((\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}) \cot \theta + 3\sigma_{r\theta}) = 0$ $\rho(f_\phi^m - a_\phi) + \frac{\partial \sigma_{\phi r}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\phi\theta}}{r \partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{\phi r} + 2\sigma_{\phi\theta} \cot \theta) = 0$

Tableau 6 : Expressions explicites de l'équation de la dynamique du milieu continu dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

Résumé du CHAPITRE 3 : ce qu'il faut savoir

- ✓ **Principe des puissances virtuelles** : définition et principe
- ✓ **Equation d'équilibre** d'un milieu continu
- ✓ **Définition et interprétation physique** du **vecteur-contrainte**
- ✓ **Définition et interprétation physique** du **tenseur des contraintes** de Cauchy
- ✓ Ecriture du tenseur des contraintes dans sa **base principale**

Bagage mathématique associé

- ✓ Diagonalisation d'une matrice : **base principale, valeurs principales**

4. Note technique : les conditions aux limites

4.1. Condition aux limites en efforts ou déplacements ?

Dans beaucoup de cas, le milieu est en contact avec une surface qui peut être considérée **rigide**, c'est-à-dire que son déplacement est nul. Dans ce cas le milieu étudié ne peut pas « pousser » cette surface, donc le déplacement est nul **selon la normale** à la surface. En revanche, **sauf indication contraire** (condition de non-glissement, ou d'adhésion à la paroi), le milieu peut **glisser** ou **frotter** sur cette surface rigide, donc le déplacement n'est pas nul dans les autres directions !

Cette surface rigide peut parfois aussi se **déplacer** de façon contrôlée : dans ce cas on écrit une condition sur le **déplacement imposé**, ou sur la **vitesse de déplacement imposée**.

Parfois, c'est un **effort** ou une **pression** que l'on applique (on attache un poids à la surface, on la met en contact d'un fluide sous pression, etc...). Dans ce cas la condition va porter sur le **vecteur-contrainte** et non sur le champ de déplacement. Il conviendra donc de bien écrire la normale sortante au milieu étudié selon laquelle vecteur $\underline{t}$ est écrit.

A retenir 4-1

On n'impose **jamais** (dans les exercices classiques) des conditions aux limites qui portent **à la fois** sur le **déplacement et le vecteur-contrainte** : si le déplacement est connu, le vecteur-contrainte est à déterminer, et inversement.

4.2. Condition aux limites écrite localement ou globalement ?

Lorsque la condition aux limites porte sur le vecteur-contrainte et non sur le déplacement, deux cas de figure se présentent : la condition est valable en tout point de la surface (pression), ou la condition porte sur l'intégrale sur la surface (effort résultant ou moment résultant).

A retenir 4-2

Un **effort** est une grandeur **globale** (intégrée sur une surface) : il correspond à l'**intégrale surfacique** d'une densité surfacique d'efforts (vecteur-contrainte).

Une **pression** en revanche est une **grandeur locale** (vraie **en tout point** de la surface).

Par exemple, les deux champs de vecteurs contraintes ci-dessous mènent à la même condition aux limites globale portant sur l'effort appliqué à la surface :

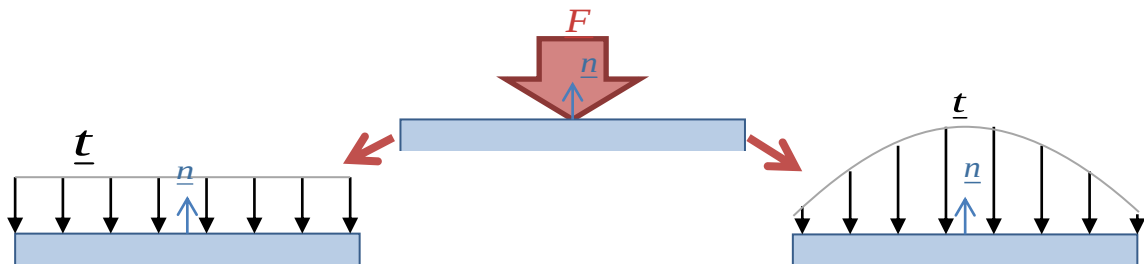


Figure 28: exemple de deux répartitions de vecteurs-contraintes menant à la même condition globale portant sur l'effort appliqué.

4.3. Surface libre

Les conditions aux limites ne portent pas que sur les surfaces du milieu sur lesquelles on impose un effort, une pression, ou dont on impose ou restreint le déplacement. **Au contraire**, si une surface est en contact avec l'air libre, c'est une condition aux limites **forte** dite de **surface libre** : cela signifie que seule la pression atmosphérique est imposée à cette surface, et que son déplacement est **libre**.

- **en mécanique des fluides**, l'application de la pression atmosphérique sur une surface libre conditionne l'équilibre du fluide
- **en mécanique du solide**, la pression atmosphérique est en général négligeable en comparaison aux efforts en jeu dans le solide. Ainsi, une condition de surface libre implique que **le vecteur-contrainte est nul en tout point** de cette surface !

4.4. Tableau récapitulatif

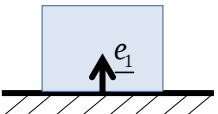
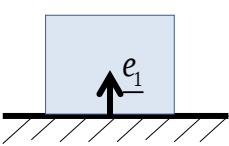
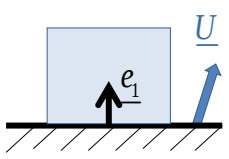
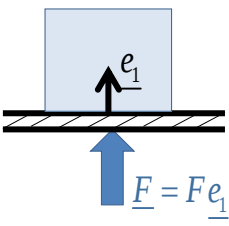
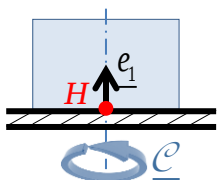
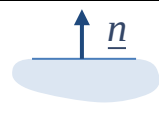
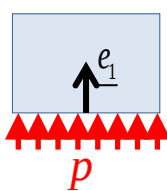
Paroi indéformable		$\underline{u}(\underline{x} \in S) \cdot \underline{e}_1 = u_1(\underline{x} \in S) = 0$
Frontière encastree		$\underline{u}(\underline{x} \in S) = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} u_1(\underline{x} \in S) = 0 \\ u_2(\underline{x} \in S) = 0 \\ u_3(\underline{x} \in S) = 0 \end{cases} \quad \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = ?$
Déplacement imposé		$\underline{u}(\underline{x} \in S) = \underline{U} \Rightarrow \begin{cases} u_1(\underline{x} \in S) = U_1 \\ u_2(\underline{x} \in S) = U_2 \\ u_3(\underline{x} \in S) = U_3 \end{cases}$
Effort homogène imposé Pas de frottements		$\int_S \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) dS = F \underline{e}_1 \Rightarrow \begin{cases} S \times t_1(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = F \\ S \times t_2(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = 0 \\ S \times t_3(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = 0 \end{cases}$
Couple imposé		$\underline{C} = \int_S \underline{HM} \wedge \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) dS = \int_S (y \underline{e}_2 + z \underline{e}_3) \wedge \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) dS$
Surface libre		en général : $\underline{t}(\underline{x} \in S, \underline{n}) = -P_{atm} \underline{n}$ en mécanique du solide : $\underline{t}(\underline{x} \in S, \underline{n}) = \underline{0}$
Pression imposée		$\underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = p \underline{e}_1$

Tableau 7 : récapitulatif des conditions aux limites qui seront rencontrées dans ce cours.

Exemple 4-1 : tube sous pression externe et interne

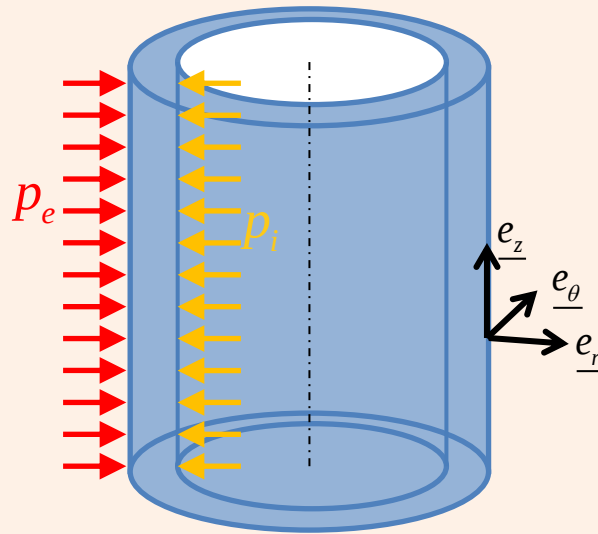


Figure 29: Tube sous pressions interne et externe

On considère un tube cylindrique sous pression interne p_i et externe p_e , de rayon interne r_i et externe r_e . Une pression (définie par unité de surface) est une condition appliquée localement, et concerne donc directement le vecteur-contrainte.

La condition aux limites s'écrit pour la surface externe de normale sortante $\underline{e}_r$:

$$\begin{aligned} \underline{t}(r=r_e, \underline{e}_r) &= -p_e \underline{e}_r \\ \sigma_{rr}(r=r_e) \underline{e}_r + \sigma_{r\theta}(r=r_e) \underline{e}_\theta + \sigma_{rz}(r=r_e) \underline{e}_z &= -p_e \underline{e}_r \\ \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr}(r=r_e) = -p_e \\ \sigma_{r\theta}(r=r_e) = 0 \\ \sigma_{rz}(r=r_e) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Et pour la surface interne de normale sortante $-\underline{e}_r$:

$$\begin{aligned} \underline{t}(r=r_i, -\underline{e}_r) &= p_i \underline{e}_r \\ -\sigma_{rr}(r=r_i) \underline{e}_r - \sigma_{r\theta}(r=r_i) \underline{e}_\theta - \sigma_{rz}(r=r_i) \underline{e}_z &= p_i \underline{e}_r \\ \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr}(r=r_i) = -p_i \\ \sigma_{r\theta}(r=r_i) = 0 \\ \sigma_{rz}(r=r_i) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On vérifie bien dans les deux cas que la contrainte est **négative**, et correspond bien à un état de **compression** de la matière.

Exemple 4-2 : compression d'un parallélépipède

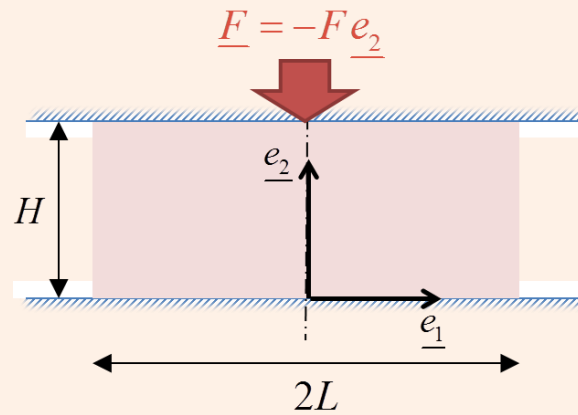


Figure 30: Exemple d'un problème plan: compression d'un parallélépipède.

Considérons donc un parallélépipède solide en contact **sans frottement** avec deux plateaux, dont l'un est utilisé pour appliquer un effort $\underline{F} = -F \underline{e}_2$ de façon **homogène**. Le parallélépipède est de hauteur initiale H , de largeur $2L$.

Sur la surface **inférieure** du parallélépipède, les points sont en contact avec un plateau immobile (**surface rigide**) et ne peuvent donc pas se déplacer verticalement. Comme le contact est sans frottement on sait que le vecteur-contrainte est nul dans le plan tangent :

$$\begin{cases} \underline{u}(x_2 = 0) = u_1 \underline{e}_1 \\ \underline{t}(x_2 = 0, -\underline{e}_2) = t_2 \underline{e}_2 \end{cases}$$

Sur la surface supérieure, on connaît une condition globale sur l'effort :

$$\int_S \underline{t}(x_2 = H, \underline{e}_2) dS = -F \underline{e}_2$$

Comme le contact est sans frottement, et que l'effort est appliqué de façon homogène, on connaît complètement le vecteur-contrainte :

$$\begin{aligned} \underline{t}(x_2 = H, \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_2 &= -\frac{F}{S} \\ \underline{t}(x_2 = H, \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_1 &= \underline{t}(x_2 = H, \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_3 = 0 \end{aligned}$$

Les deux surfaces latérales sont des surfaces libres : comme le milieu est un milieu solide, la pression atmosphérique est négligée et le vecteur-contrainte est donc nul (condition locale) :

$$\underline{t}(x_1 = \pm L, \pm \underline{e}_1) = \underline{0}$$

5. Application aux matériaux solides

Dans les chapitres précédents, nous avons vu comment modéliser la cinématique d'un milieu continu, à travers notamment sa déformation et son taux de déformation, puis nous avons vu comment modéliser les efforts intérieurs dans le milieu qui se déforme à travers le tenseur des contraintes. **Jusqu'ici, aucune hypothèse n'a été formulée sur la nature (solide ou fluide) du matériau.**

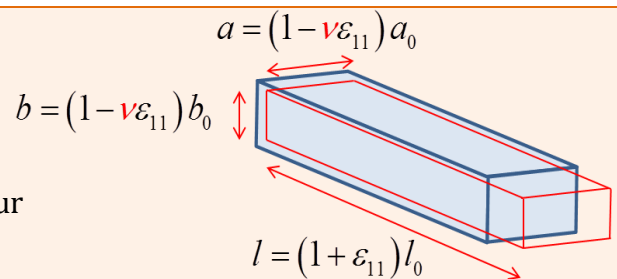
Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux **matériaux solides**, et tenter de formuler les relations qui existent **localement** entre le champ de déformations et le champ de contraintes, en nous intéressant seulement aux aspects mécaniques (et non thermiques). Il est très important de souligner que l'on va considérer le matériau **élastique** dans ce chapitre (le matériau se déforme de façon **réversible** sous l'action d'un effort).

Exemple introductif 5-1 :

On va largement s'intéresser dans la section qui va suivre au cas de **l'essai de traction**, qui consiste à soumettre une éprouvette à un effort longitudinal pour en caractériser les propriétés.

On utilisera par exemple une éprouvette parallélépipédique avec les notations ci-contre : on remarque ici que l'éprouvette subit des déformations transverses **négatives** lorsque la déformation longitudinale est **positive**. On remarque également qu'il existe une relation de proportionnalité entre ces déformations, en faisant intervenir un **coefficient de compaction transverse**.

On cherche à caractériser les **propriétés du matériau**, et non celles de l'éprouvette : dans ce cas les conclusions que l'on tire ne doivent pas dépendre de la forme de l'éprouvette !



5.1. L'essai de traction

5.1.1. Loi de comportement

A retenir 5-1

Lorsqu'on cherche à **identifier une loi de comportement**, on cherche à établir une relation entre les **contraintes** et les **déformations** d'un matériau (et éventuellement sa température).

On cherche à exprimer une loi de comportement **locale** (les contraintes et les déformations s'appliquent à un élément infinitésimal du milieu continu) à partir de résultats d'expériences à l'échelle **globale**. On fait donc en général l'hypothèse d'une **homogénéité** du matériau et des champs: on tente de concevoir les essais expérimentaux pour imposer une certaine homogénéité des champs de contrainte et de déformation (torsion d'un tube mince, traction simple).

5.1.2. L'essai de traction

Dans le cas d'un **essai de traction** par exemple (Figure 31), on suppose les champs de contraintes et de déformation homogènes dans la partie utile de l'éprouvette: on suppose que les têtes ne participent pas à la déformation de l'ensemble. On a schématisé ci-dessous un essai de traction pour un acier inoxydable: la tête supérieure est animée avec une vitesse $\underline{v}$ qui provoque un allongement Δl en fonction du temps et un effort $\underline{F}$ qu'on enregistre.

On remarque qu'en général, les valeurs utilisées pour la contrainte et la déformation sont (on appelle $\underline{e}_z$ la direction de traction) :

$$\frac{F}{S_0} \approx \sigma_{zz} : \text{« contrainte de l'ingénieur » ou « contrainte nominale »}$$
$$\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon_{zz} : \text{« déformation nominale »}$$

La contrainte nominale est (dans le cas général) différente de la contrainte de Cauchy car la section transverse évolue durant l'essai. Dans le cadre de l'HPP : $S_0 \approx S$

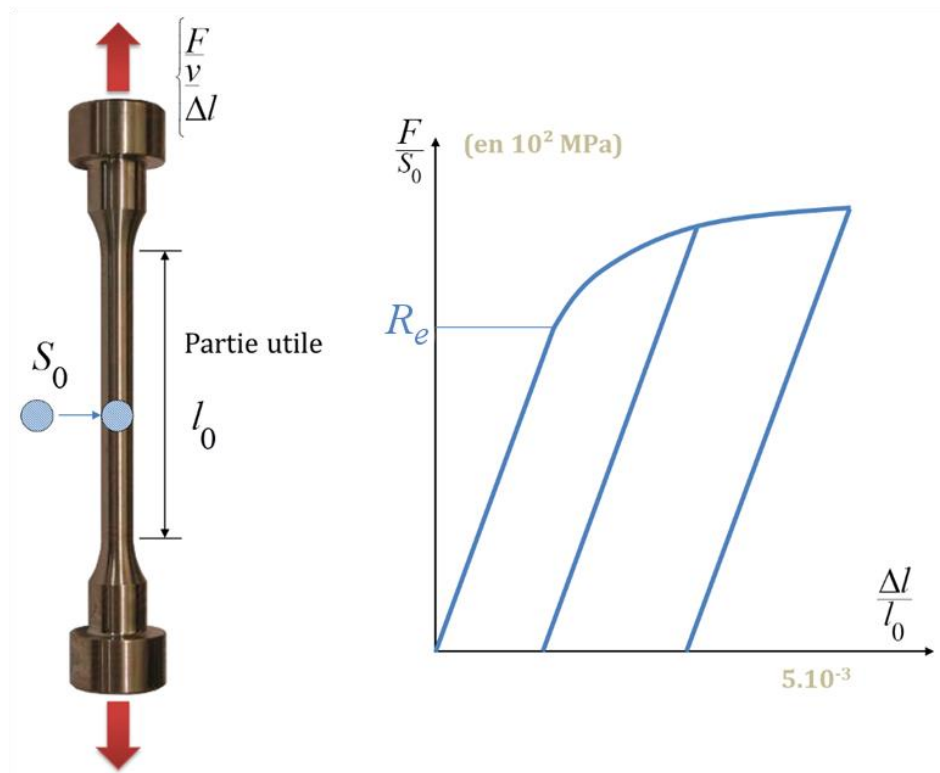


Figure 31: Essai de traction simple sur une éprouvette métallique.

tr

Application à l'exemple introductif :

Avec les notations ci-contre, on peut simplement

comparer les deux quantités « contrainte nominale » $b = (1 - \nu \varepsilon_{11}) b_0$

et « contrainte de Cauchy » :

$$\frac{F}{S_0} = \frac{F}{a_0 b_0}$$

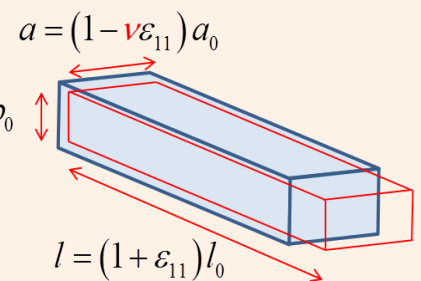
$$\sigma_{11} = \frac{F}{S} = \frac{F}{ab} = \frac{F}{a_0 (1 - \nu \varepsilon_{11}) b_0 (1 - \nu \varepsilon_{11})} = \frac{F}{S_0} \frac{1}{(1 - \nu \varepsilon_{11})^2}$$

On observe alors que ces deux quantités diffèrent par un terme $1/(1 - \nu \varepsilon_{11})^2$, qui tend néanmoins vers 1 lorsque la transformation est petite.

On remarque également que la « déformation nominale » se calcule de la même manière que dans la section 2.4.2.3), et diffère de la « dilatation » λ qui se calcule :

$$\lambda = \frac{l}{l_0} = \frac{(1 + \varepsilon_{11}) l_0}{l_0} = 1 + \varepsilon_{11}$$

La déformation transverse s'écrit ici : $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{\Delta a}{a_0} = \frac{\Delta b}{b_0} = -\nu \varepsilon_{11}$



5.1.3. Limite d'élasticité

Pour de nombreux matériaux, lorsque la contrainte est en-deçà de la **limite élastique** R_e , on se trouve alors dans des conditions où les contraintes et les déformations sont reliés **linéairement**. Les déformations sont alors essentiellement dues à la modification **réversible** des **espaces interatomiques**. Au-delà de ce point, le comportement devient non-linéaire, en raison notamment de phénomènes de déplacements de micro-dislocations dans le matériau... Cette partie n'est pas au programme de ce cours d'introduction à la MMC.

A retenir 5-2

Jusqu'à la **limite d'élasticité** R_e , les matériaux d'études dans ce cours seront considérés **élastiques linéaires** : les déformations sont **réversibles**, et la loi contrainte/déformation est **linéaire**.

On va tenter de définir une relation entre contraintes et déformations qui dépend du matériau considéré : il semble évident que cette relation intrinsèque au matériau ne doit dépendre ni de la **base** utilisé pour écrire les composantes des tenseurs utilisés, ni de l'**observateur** qui caractérise le matériau.

A retenir 5-3

Important : dans ce chapitre on se place à **température** constante, et les effets d'un changement de température sur les déformations (et donc les contraintes) dans le matériau ne seront pas pris en compte, même **s'ils existent bel et bien**.

5.1.4. Cas unidimensionnel : définition du module d'Young

Le postulat de base de l'élasticité linéaire est le suivant : à un état de déformation et de température correspond **un seul** état de contraintes, indépendamment de la vitesse de déformation ou de variables internes.

Si l'on considère uniquement les contraintes et déformations dans l'axe de l'éprouvette (σ_{zz} et ε_{zz} par exemple) à l'issue de l'essai de traction présenté ci-dessus, on remarque que la relation qui lie **contrainte** et **déformation** est **linéaire** pour de

nombreux matériaux. On peut donc introduire un coefficient de proportionnalité E , appelé **module de Young** et exprimé en Pascals, de sorte que :

Equation fondamentale 5-1

Dans le cas **unidimensionnel**, **élastique linéaire** : $\sigma_{zz} = E \varepsilon_{zz}$

A retenir 5-4

Le module de Young, exprimé en **Pascals** (ou plutôt GPa), est une mesure de la « rigidité » d'un matériau élastique linéaire. Il ne dépend que du **matériau**, et non de la forme de l'éprouvette.

Matériau	E (GPa)	Matériau	E (GPa)
Acier	210	Béton	20-50
Fonte	90→160	Bois	10→20
Aluminium	70	Nanotubes de Carbone	1100
Plomb	20	Verre	70
Titane	114	Caoutchouc	0.001→0.1

Tableau 8: Valeurs moyennes des modules d'Young de matériaux communs.

Application à l'exemple introductif :

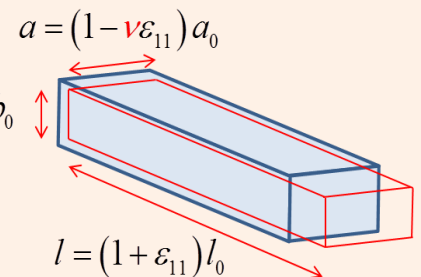
Avec les notations ci-contre, on établit le lien entre contrainte et déformation dans la direction de traction

$$\sigma_{11} = \frac{F}{S} = E \varepsilon_{11} = E \frac{\Delta l}{l_0} \Rightarrow F = ES \frac{1}{l_0} \Delta l$$

On peut se ramener dans ce cas à la notion de « rigidité d'un ressort »

vue dans les années précédentes, en écrivant tout simplement :

$$F = ES \frac{1}{l_0} \Delta l = \underset{K}{\overset{U}{KU}}$$



5.2. Le matériau solide élastique linéaire isotrope

5.2.1. Considérations générales

En réalité, lorsqu'on applique un effort dans une direction de l'éprouvette, on observe évidemment une déformation dans cette même direction **mais aussi dans les directions transverses**.

La loi de comportement qui relie les contraintes et les déformations dans le matériau se doit donc d'être une loi **tensorielle, tridimensionnelle**, qui établit le lien entre le tenseur des contraintes et le tenseur de déformations.

A retenir 5-5

Dans ce chapitre on se limite à l'étude des solides élastiques linéaires isotropes sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP) : le cas général est **beaucoup** plus compliqué.

5.2.2. Loi de comportement élastique linéaire isotrope

En considérant ensuite **l'isotropie** du matériau, on montre que seuls deux paramètres matériau suffisent à décrire le comportement élastique, et on a la relation suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma^0 \underline{\underline{I}} + \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Le terme $\sigma^0 \underline{\underline{I}}$ correspond à un état de contraintes initiales et isotrope. La plupart du temps il sera **négligé** : on considérera un état de contraintes nul initialement, dit aussi état **naturel**. On en vient donc à la relation suivante, appelée **loi de Hooke** :

Equation fondamentale 5-2

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad : \text{loi de comportement élastique linéaire isotrope}$$

C'est la **loi de comportement élastique linéaire isotrope en HPP**.

Par exemple, en coordonnées cartésiennes, cette équation devient :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Cette équation contient **deux paramètres** du matériau (λ, μ) qui régissent le comportement élastique linéaire. Ils sont appelés **coefficients d'élasticité de Lamé**.

Dans cette relation on exprime les contraintes pour un état de déformation donné. On peut aussi écrire la relation inverse, appelée **loi de comportement inverse**, et qui s'exprime :

Equation fondamentale 5-3

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} : \text{loi de comportement élastique linéaire isotrope inverse}$$

Dans cette seconde relation on fait intervenir également deux paramètres matériau :

- E : le **module d'Young** présenté dans la section précédente
- ν : le **coefficient de Poisson** (sans dimension)

Ces deux paramètres **ne sont pas indépendants** des coefficients d'élasticité de Lamé, et on passe de l'un à l'autre à partir de ces expressions :

$$\begin{cases} E = \mu \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right) \\ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda = E \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

5.2.3. Interprétation du module d'Young et du coefficient de Poisson

Plaçons-nous dans le cas de la traction **uniaxiale** exposée en début de ce chapitre : on tire cette fois sur **une éprouvette à section rectangulaire**. Pour pouvoir faire l'hypothèse des **HPP**, on considère que la plage de déformation est inférieure à 0,01 : dans cette plage, on constate qu'une relation linéaire existe entre les déformations et les contraintes.

A retenir 5-6

Dans la cas d'une traction uniaxiale selon $\underline{e}_1$, le tenseur des contraintes s'écrit simplement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 = \frac{F}{S} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$$

avec F l'effort de traction appliquée et S la section transverse de l'échantillon.

D'après la loi de Hooke inverse, on a dans ce cas :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} = \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_{11} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \\ &= \frac{\sigma_{11}}{E} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_{11} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)\end{aligned}$$

Sous forme matricielle on peut donc voir apparaître les différentes déformations, qui correspondent à un allongement dans la direction $\underline{e}_1$ et à des rétrécissements dans les directions transverses :

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} = -\nu \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} = -\nu \varepsilon_{11} \end{pmatrix}$$

A retenir 5-7

On constate que le **module d'Young** correspond à la pente de la courbe $\sigma_{11} = f(\varepsilon_{11})$, et que le **coefficient de Poisson** est un **coefficient de compaction transverse** qui lie la déformation dans une direction aux déformations dans les deux autres directions.

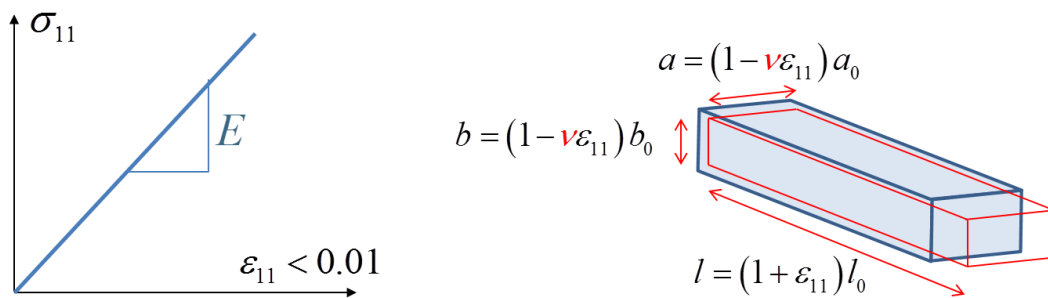


Figure 32: Interprétation du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν

*Remarque : en adoptant une approche similaire basée sur la thermodynamique, mais sans faire l'hypothèse de température constante, la loi de comportement en thermoélasticité linéaire isotrope ferait alors intervenir un **coefficient thermique** $k \Delta \Theta \underline{\underline{I}}$ linéaire en $\Delta \Theta$, et k est l'inverse de la dilatation thermique du matériau isotrope.*

5.3. Résolution d'un problème d'élastostatique

On considère le cas de l'élasticité linéaire isotrope en HPP et sans écarts de température ($\Delta\Theta \rightarrow 0$). L'équilibre du milieu est défini par $\underline{a}(\underline{X}, t) = \underline{0}$ et implique que les efforts extérieurs soient en équilibre global avec les efforts intérieurs. On va présenter brièvement deux approches permettant de résoudre analytiquement ce problème dit **d'élastostatique**, et on présentera très succinctement la méthode numérique aujourd'hui généralement employée pour résoudre ce problème.

5.3.1. Formulation du problème

Pour un système donné de frontière $\partial\Omega$ et de volume Ω , on connaît l'ensemble des forces volumiques sur Ω (généralement $\underline{f}^m = \underline{g}$ ou $\underline{f}^m = \underline{0}$) ainsi que les **conditions aux limites** à la surface du système en ce qui concerne les **déplacements** sur une partie $\partial\Omega^U$ et les **efforts surfaciques** sur une autre partie $\partial\Omega^T$.

On dit que le problème est **régulier** si on connaît **pour toute la frontière** $\partial\Omega$ des conditions aux limites en déplacement **ou** des conditions aux limites en ce qui concerne le vecteur-contrainte : on a donc dans ce cas $\partial\Omega^T \cup \partial\Omega^U = \partial\Omega$ et $\partial\Omega^T \cap \partial\Omega^U = \emptyset$ (Figure 33). Les équations du problème **d'élastostatique** s'écrivent alors:

A retenir 5-8

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) + \rho(\underline{f}^m - \underline{a}) = \underline{0} \\ (2) \quad \underline{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\underline{\varepsilon}) \underline{I} + 2\mu \underline{\varepsilon} \\ (3) \quad \underline{\varepsilon} = 1/2 (\underline{\text{Grad}}(\underline{u}) + \underline{\text{Grad}}(\underline{u})^T) \\ (4) \quad \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{t}^s \quad \text{connu en tout point de } \partial\Omega^T \\ (5) \quad \underline{u} = \underline{u}^s \quad \text{connu en tout point de } \partial\Omega^U \end{array} \right.$$

L'indice « s » dans les deux dernières équations correspond à « surface ».

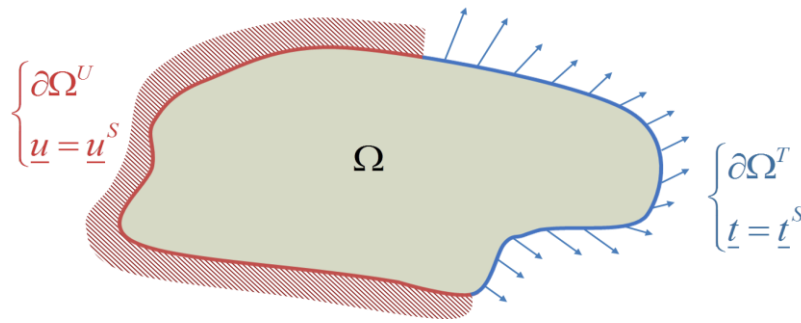


Figure 33: Formulation du problème d'élastostatique : conditions aux limites en déplacement et en vecteur-contrainte.

Si le problème est régulier alors il existe une **solution unique** concernant le **champ de contraintes et de déformations**, solution qu'on peut trouver notamment en utilisant l'une des deux méthodes ci-dessous (approches en déplacement ou en contrainte). Si le problème n'est pas régulier, c'est-à-dire qu'on ne connaît ni le champ de déplacements ni le champ de contraintes sur au moins une partie de la frontière du système ($\partial\Omega^T \cup \partial\Omega^U \neq \partial\Omega$), alors on peut juste espérer obtenir une solution **approchée** du problème.

5.3.2. Principe de Saint-Venant

Dans le cas d'un problème non régulier, il existe un morceau de frontière pour lequel on ne peut pas formuler **localement** une condition aux limites en termes de déplacements ou de contraintes. En revanche, on sait souvent exprimer l'équilibre du système en terme **global**, notamment en exprimant le **torseur résultant**.

Dans ce cas, le **principe de Saint-Venant** nous dit que si on modifie la **répartition** des vecteur-contraintes sur un morceau de frontière $\partial\Omega^{SV}$ sans modifier le torseur résultant, on ne change pas sensiblement la solution du problème (champ de contraintes et de déformations) sauf au voisinage immédiat de $\partial\Omega^{SV}$.

A retenir 5-9

L'état de contraintes et de déformations **suffisamment loin** d'une surface ne dépend que du torseur résultant des efforts appliqués, et non pas de leur répartition **précise**.

Plaçons nous dans le cas représenté par la figure ci-dessous, dans laquelle une éprouvette de section S est sollicitée en traction selon $\underline{e}_z$ avec des conditions aux limites différentes à ses extrémités $\partial\Omega^{SV}$. On constate que l'état de contraintes au centre de l'éprouvette est le même dans les deux cas.

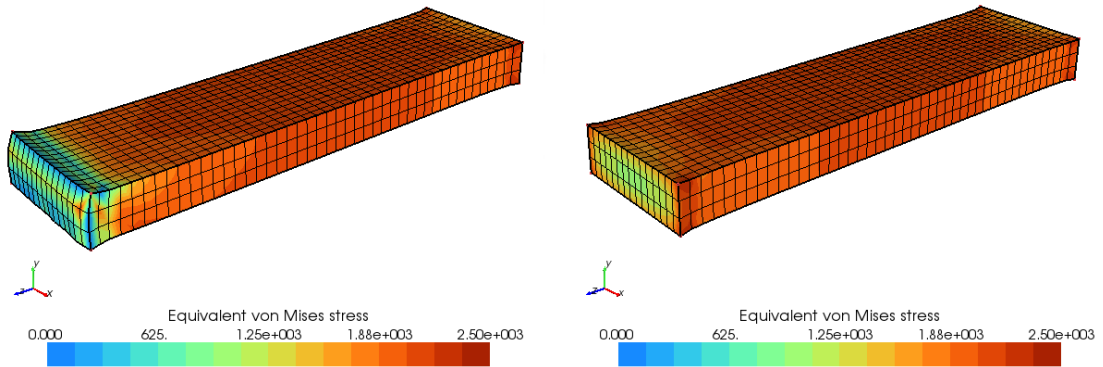
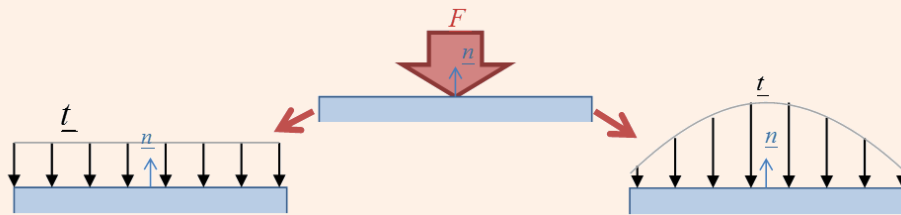


Figure 34: Illustration du principe de Saint-Venant dans le cas d'une éprouvette en traction simple.

Exemple 5-2

Reprenons le cas de deux répartitions différentes de vecteurs-contraintes menant au même effort résultant (Figure 28) : si on se place assez loin de cette surface, l'état de contraintes et de déformations sera inchangé dans les deux cas.



5.3.1. Schéma de résolution classique (« approche en déplacement »)

Dans la plupart des cas simples et classiques, on peut formuler des hypothèses sur le champ de déplacements à partir de la physique du problème. La résolution complète du problème (déplacements, déformations et contraintes) se déroule en suivant le schéma synthétique ci-dessous (Figure 35).

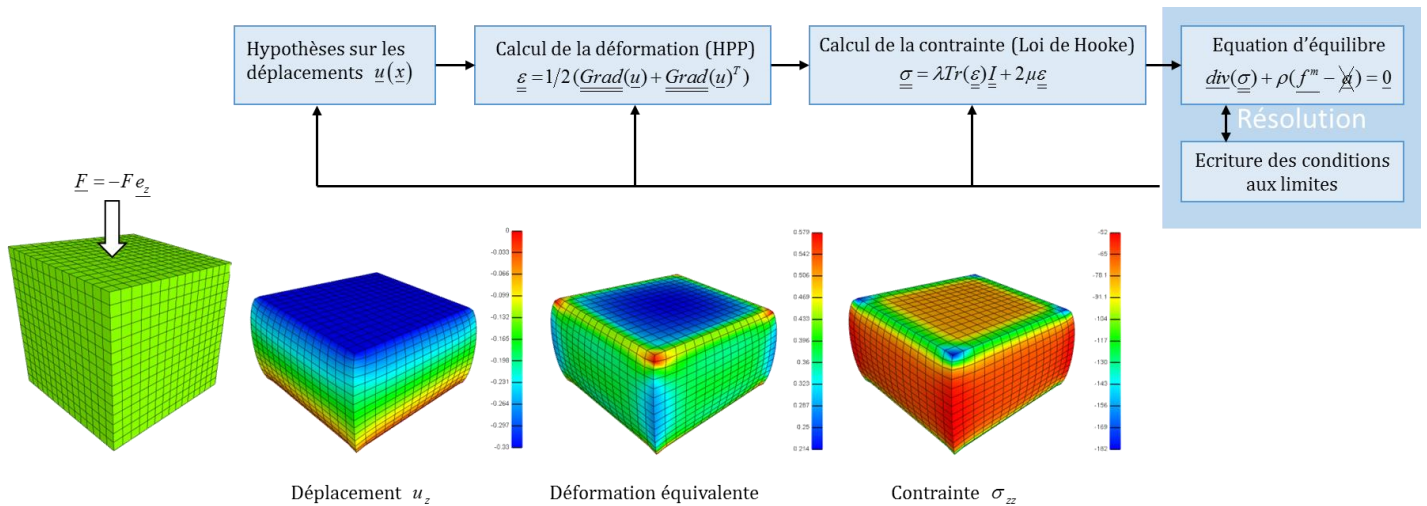


Figure 35: Schéma classique de résolution "en déplacement" d'un problème élastostatique.

5.3.2. Une méthode très utilisée : la méthode des éléments finis

Les approches analytiques montrent vite leurs limites lorsque la géométrie et/ou le chargement et/ou la loi de comportement deviennent complexes, comme c'est le cas dans la plupart des problèmes réels.

L'ingénieur en mécanique aura donc souvent recours en des **méthodes numériques**, parmi lesquelles la plus utilisée est la **méthode des éléments finis**. Cette approche se résume comme suite :

- la géométrie est discrétisée en un nombre *fini* d'éléments simples (d'où le nom) connectés en des *nœuds* pour lesquels des solutions existent pour calculer $\underline{u}, \underline{\varepsilon}, \underline{\sigma}$
- on écrit les conditions aux limites à la surface du système (efforts et déplacements)
- on crée une matrice qui traduit l'assemblage complet entre tous les éléments du système en chacun des nœuds.
- en inversant cette matrice (ce qui peut être numériquement complexe !) on détermine le déplacement en chacun des nœuds du système, puis $\underline{\varepsilon}$, puis $\underline{\sigma}$, et on s'assure de l'équilibre du système.

Cette méthode sera abordée en 2^{ème} et 3^{ème} année et **repose sur toutes les notions abordées dans ce cours**.

5.4. Introduction au dimensionnement

5.4.1. Le dimensionnement

On a vu précédemment (dans le cas de l'essai de traction uniaxiale) la notion de **limite d'élasticité** R_e : pour de nombreux matériaux, le comportement de comportement est **élastique linéaire isotrope** en-deçà de cette limite.

Au-delà de cette limite, de nombreux autres mécanismes apparaissent et peuvent mener :

- à l'endommagement du matériau : ses propriétés élastiques vont alors diminuer
- à la **rupture** du matériau : des discontinuités apparaissent
- à l'apparition de **déformations plastiques** (i.e. permanentes).

A retenir 5-10

La plupart du temps, lors du **dimensionnement** d'un solide ou d'une structure, on s'assure (avec un **facteur de sécurité**) que la **limite d'élasticité** du matériau ne soit atteinte à aucun endroit.

Dans d'autres applications (comme la mise en forme des matériaux), on va justement chercher à solliciter le matériau au-delà de R_e : cette partie fera l'objet de cours de 3^{ème} année à l'ENSEM.

5.4.2. Cas unidimensionnel

Comme on l'a rappelé, dans le cas de l'essai de traction uniaxiale le tenseur des contraintes possède une seule composante non nulle dans la direction de traction :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z = \frac{F}{S} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

Dans ce cas, le critère pour dimensionner une structure est trivial : il suffit que cette contrainte ne dépasse pas la limite élastique R_e !

$$\sigma_{zz} = \frac{F}{S} \leq R_e \text{ en traction uniaxiale}$$

Ce critère suffit pour dimensionner des « treillis réticulés », qui sont des ensembles de barres articulées qui ne travaillent qu'en traction-compression et dont l'état de contraintes à une seule composante normale dans la direction des barres (Figure 36).

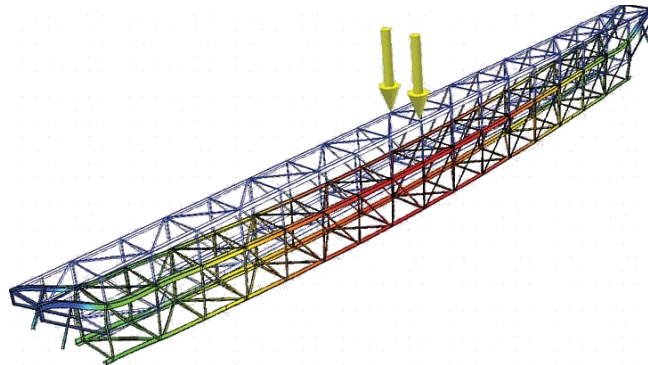


Figure 36: Dimensionnement d'un treillis constitué de barres : il faut et il suffit que les contraintes uniaxiales dans chaque barre ne dépasse pas la limite d'élasticité du matériau.

5.4.3. Notion de contrainte équivalente

Dans le cas général, le tenseur des contraintes est quelconque et possède 6 composantes indépendantes :

- $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ dans un repère quelconque
- $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_I \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \sigma_{II} \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II} + \sigma_{III} \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III}$ dans le repère principal

On cherche donc à comparer ce **tenseur** avec le **scalaire** R_e , ce qui n'est a priori mathématiquement pas trivial...

On va chercher cela à définir une **contrainte équivalente** et qu'on peut définir comme ceci :

A retenir 5-11

Une **contrainte équivalente** σ_{eq} est une grandeur **scalaire** représentative de l'état **tridimensionnel** des contraintes et qui peut être comparée à la limite d'élasticité R_e .

On cherche donc à construire un scalaire à partir d'un tenseur d'ordre 2 : on pourrait choisir la somme des composantes, la trace, le déterminant... comment choisir ?

5.4.4. Contrainte équivalente de Von Mises

La contrainte équivalente de Von Mises est la plus utilisée actuellement en mécanique, car il s'avère qu'elle permet de d'approcher la surface de charge de la plupart des matériaux de construction classiques. Notamment, c'est souvent la **contrainte de Von Mises** (comprendre : « contrainte équivalente au sens du critère de Von Mises ») qui est affichée par défaut en sortie d'un calcul par éléments finis.

Le critère de Von Mises est basé sur l'énergie de *distorsion élastique*.

Sans démonstration ici, on se contentera de dire que l'introduction de cette **contrainte équivalente** est le résultat d'une constatation expérimentale que l'on peut faire sur de nombreux matériaux : il est quasiment impossible de dépasser le régime élastique d'un matériau en imposant un changement de volume sans changement de forme, tandis qu'un changement de forme sans changement de volume va rapidement induire des déformations plastiques irréversibles. Une contrainte équivalente basée sur l'**énergie de distorsion élastique** (énergie élastique causée par un changement de forme sans changement de volume) est donc utilisée, et on montre qu'elle peut s'écrire :

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}$$

On obtient donc bien une valeur **scalaire**, qui prend en compte les différentes contraintes normales et tangentiels. On peut également exprimer cette contrainte équivalente à partir des composantes **principales** du tenseur des contraintes :

Equation fondamentale 5-4

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} : \text{contrainte de Von Mises}$$

Pour vérifier que l'état de contraintes dans un matériau ne risque pas d'induire des déformations irréversibles (déformations plastiques), il s'agit alors de **s'assurer que cette contrainte équivalente est inférieure à la limite d'élasticité R_e du matériau** :

Equation fondamentale 5-5

L'état de sollicitation dans un matériau n'induit pas de déformations irréversibles si et seulement si : $\sigma_{VM} \leq R_e$

Application à l'exemple introductif :

Dans le cas de l'essai de traction, on se trouve dans

un état de contrainte unidimensionnel donné par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{F}{S} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$$

Par conséquent la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ est la base principale et on peut écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{F}{S} \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I \quad \sigma_I = \frac{F}{S}, \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$$

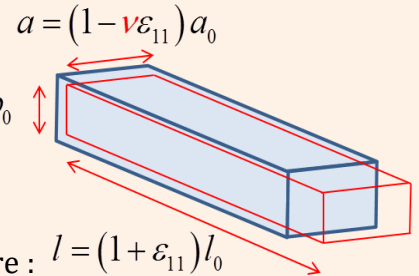
Le calcul de la contrainte équivalente de Von Mises est alors trivial :

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \cancel{\sigma_{II}})^2 + (\cancel{\sigma_{II}} - \cancel{\sigma_{III}})^2 + (\cancel{\sigma_{III}} - \sigma_I)^2}$$

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{F}{S}\right)^2 + \left(-\frac{F}{S}\right)^2} = \frac{F}{S}$$

On constate (sans surprise !) que le critère de dimensionnement de cet échantillon s'écrit :

$$\sigma_{VM} \leq R_e \quad \Rightarrow \quad F \leq R_e S$$



Résumé du CHAPITRE 5 : ce qu'il faut savoir

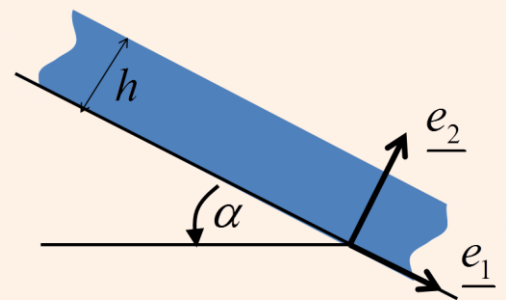
- ✓ **Essai de traction**
- ✓ **Loi de comportement élastique linéaire isotrope en HPP : loi de Hooke**
- ✓ **Calcul de contraintes** à partir d'un champ d'un champ de déplacement
- ✓ **Interprétation du module de Young** et du **coefficient de Poisson**
- ✓ **Formulation et résolution** d'un problème d'élastostatique
- ✓ **Dimensionnement** : calcul d'une contrainte équivalente

6. Application aux fluides

Puisque le chapitre précédent vient d'être consacré à l'application de la MMC au cas particulier des matériaux solides, il n'est pas surprenant de s'intéresser désormais au cas des matériaux **fluides**. On ne donnera ici qu'une brève introduction à la **mécanique des fluides**, étant donné que cette discipline fondamentale pour un ingénieur ENSEM sera largement abordée par la suite. Comme évoqué précédemment, la description **eulérienne** paraît évidente pour décrire le mouvement d'un fluide, étant donné que la recherche d'une configuration de référence perd son sens dans le cas d'un écoulement. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser plus particulièrement à la description **d'écoulements** de base pour des fluides simples dits « **newtoniens** ». Nous allons d'abord rappeler ou remettre en forme les équations déjà énoncées dans les parties précédentes mais qui s'avéreront très utiles pour étudier l'écoulement de tels fluides. Nous nous intéresserons ensuite à l'expression de lois de comportement adaptées, puis nous énoncerons quelques propriétés des écoulements de ces fluides.

Exemple introductif 6-1 :

On va prendre comme exemple dans tout ce chapitre le cas de l'écoulement d'un fluide d'épaisseur h le long d'un plan incliné. Le fluide soumis aux seules forces de pesanteur s'écoule sur un plan infini incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On comprend intuitivement que, plus le fluide est visqueux, et moins il va s'écouler vite (imaginons de l'eau ou du miel par exemple). Quel est le profil de vitesses du fluide dans l'épaisseur de cette couche de fluide ?



6.1. Cinématique des fluides

6.1.1. Description de la transformation

Comme décrit en section 2.2.2, on s'intéressera dans tout ce chapitre au cas où on définit la transformation par l'intermédiaire d'un **champ de vitesses** exprimé dans la **configuration actuelle**. Il suffit donc que l'on mesure instantanément sur une image la vitesse **de chaque « particule de fluide »**, ou chaque point matériel, du milieu : c'est approximativement le principe de la « vélocimétrie par imagerie de particules », illustrée sur la figure ci-dessous (Figure 37) :

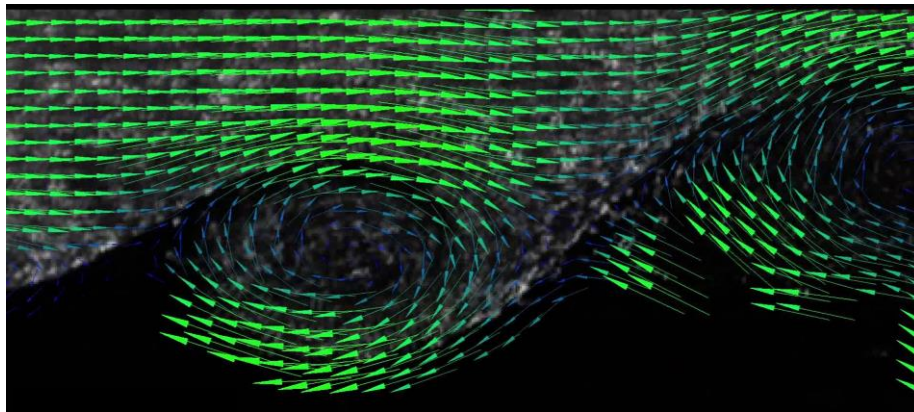


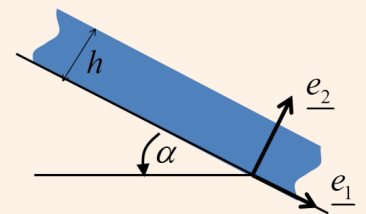
Figure 37 : Exemple d'image issue de « vélocimétrie par imagerie de particules », où on visualise de champ de vitesses de chaque point matériel du milieu dans la configuration actuelle.

Dans ce chapitre on décrit donc la cinématique du milieu de la façon suivante :

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$$

Application à l'exemple introductif :

Compte-tenu de la physique du problème, on peut par exemple considérer que le champ de vitesses au sein du fluide peut prendre la forme : $\underline{v}(x_2) = v_1(x_2)\underline{e}_1$



6.1.2. Vitesse de déformation

Dans le cadre de la description eulérienne adaptée à la mécanique des fluides, on rappelle les résultats obtenus précédemment (section 2.5) en ce qui concerne la

cinématique d'un milieu continu. Le tenseur $\underline{\underline{k}}$, appelé parfois « tenseur de description eulérienne », s'exprime simplement :

$$\underline{\underline{k}} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t)$$

Le gradient d'un champ de vecteurs peut être décomposé en une partie symétrique et une partie antisymétrique (section 2.1.6.5), correspondant respectivement à une « déformation locale » et une « rotation locale ». On obtient alors le tenseur **vitesse de déformation eulérienne** $\underline{\underline{d}}$:

Equation fondamentale 6-1

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) + \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T \right) : \text{vitesse de déformation}$$

ainsi que le tenseur **vitesse de rotation** $\underline{\underline{\Omega}}$:

Equation fondamentale 6-2

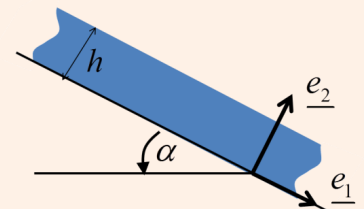
$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) - \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T \right) : \text{vitesse de rotation}$$

Application à l'exemple introductif :

Considérons le champ de vitesses suivant $\underline{v}(\underline{x}_2) = v_1(\underline{x}_2) \underline{e}_1$.

On calcule alors aisément :

$$\left[\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left[\underline{\underline{d}} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left[\underline{\underline{\Omega}} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



6.1.3. Bagage mathématique : rotationnel d'un champ de vecteurs

Il existe un dernier opérateur **rotationnel**, utile notamment pour caractériser la rotation locale d'un milieu en mouvement.

Si l'on considère le champ de vecteurs $\underline{T}(\underline{x})$, le rotationnel de ce champ de vecteurs se calcule facilement à partir de l'opérateur Nabla selon la formule :

$$\underline{rot} \underline{T} = \underline{\nabla} \wedge \underline{T}$$

On constate donc que **le rotationnel d'un champ de vecteurs est un champ de vecteurs**.

Tout comme les opérateurs gradient et divergence ci-dessus, la définition de l'opérateur rotationnel dépend du système de coordonnées utilisé. Ses différentes expressions sont données dans le Tableau 9.

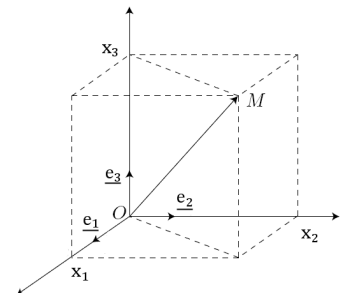
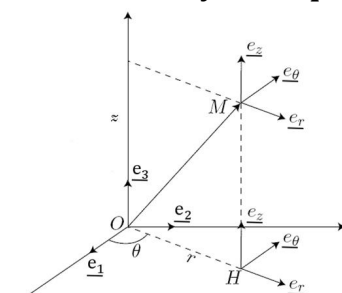
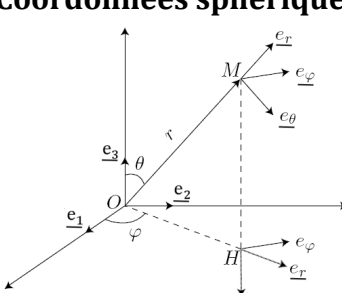
Rotationnel d'un champ de vecteurs	
Coordonnées cartésiennes 	$[\underline{rot} \underline{T}] = [\underline{\nabla}] \wedge [\underline{T}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_3}{\partial x_2} - \frac{\partial T_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_1}{\partial x_3} - \frac{\partial T_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$
Coordonnées cylindriques 	$[\underline{rot} \underline{T}] = [\underline{\nabla}] \wedge [\underline{T}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} - \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial T_r}{\partial z} - \frac{\partial T_z}{\partial r} \\ \frac{\partial r T_\theta}{\partial r} - \frac{\partial T_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$
Coordonnées sphériques 	$[\underline{rot} \underline{T}] = [\underline{\nabla}] \wedge [\underline{T}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \sin \theta T_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial T_\theta}{\partial \phi} \right) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial r T_\phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r T_\theta}{\partial r} - \frac{\partial T_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$

Tableau 9 : Rotationnel d'un champ de vecteur en coordonnées cartésiennes, cylindriques, et sphériques.

6.1.4. Vorticité et tourbillon

Le rotationnel du champ de vecteurs vitesse $\underline{v}(\underline{x}, t)$ s'écrit facilement :

$$\underline{rot} \underline{v} = \underline{\nabla} \wedge \underline{v}$$

On peut définir alors la **vorticité** du fluide, qui est un champ de vecteurs $\underline{\omega}$, égal au rotationnel du champ de vecteurs vitesse $\underline{v}(\underline{x}, t)$:

Equation fondamentale 6-3

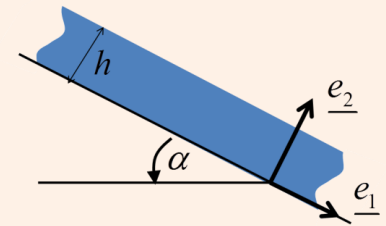
$$\underline{\omega}(\underline{x}, t) = \underline{rot} \underline{v}(\underline{x}, t) : \text{vorticité du fluide}$$

La direction de ce champ de vecteurs correspond à **l'axe de la rotation locale** du champ de vecteur (d'où le nom de l'opérateur *rotationnel*).

Application à l'exemple introductif :

Considérons le champ de vitesses suivant $\underline{v}(\underline{x}_2) = v_1(\underline{x}_2) \underline{e}_1$.

On calcule alors aisément la vorticité du fluide (sans connaître encore exactement la forme de ce champ) :



$$[\underline{\omega}(\underline{x}, t)] = [\underline{rot} \underline{v}(\underline{x}, t)] = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial v_3}{\partial x_2}} - \cancel{\frac{\partial v_2}{\partial x_3}} \\ \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial x_3}} - \cancel{\frac{\partial v_3}{\partial x_1}} \\ \cancel{\frac{\partial v_2}{\partial x_1}} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Intéressons-nous maintenant au tenseur vitesse de rotation $\underline{\underline{\Omega}}$ défini ci-dessus. En considérant ce tenseur comme une application linéaire, on peut analyser la façon dont il transforme un vecteur quelconque $\underline{a}$:

$$[\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{a}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) a_2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) a_3 \\ \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) a_1 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) a_3 \\ \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) a_1 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) a_2 \end{pmatrix}$$

On peut alors définir un second vecteur, appelé en général **vecteur tourbillon** $\underline{\underline{\Omega}}$ de la façon suivante :

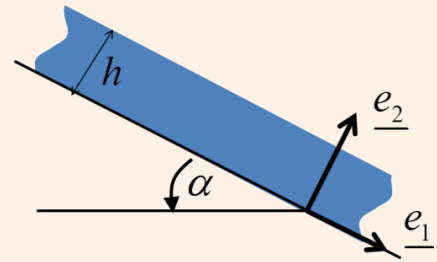
$$\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{a} = \frac{1}{2} \underline{\text{rot}} \underline{v} \wedge \underline{a} = \underline{\underline{\Omega}} \wedge \underline{a}$$

On a par conséquent : $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \underline{\text{rot}} \underline{v}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \underline{\omega}(\underline{x}, t)$

Application à l'exemple introductif :

On a calculé précédemment le tenseur vitesse de rotation :

$$[\underline{\underline{\Omega}}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Analysons la façon dont il transforme un vecteur quelconque $\underline{a}$:

$$[\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{a}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} a_2 \\ -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si on définit $\underline{\underline{\Omega}}$ tel que $\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{a} = \underline{\underline{\Omega}} \wedge \underline{a}$ on arrive alors à calculer le vecteur tourbillon :

$$\left. \begin{aligned} [\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{a}] &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} a_2 \\ -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ [\underline{\underline{\Omega}} \wedge \underline{a}] &= \begin{pmatrix} \Omega_2 a_3 - \Omega_3 a_2 \\ \Omega_3 a_1 - \Omega_1 a_3 \\ \Omega_1 a_2 - \Omega_2 a_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{a} = \underline{\underline{\Omega}} \wedge \underline{a} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} a_2 = \Omega_2 a_3 - \Omega_3 a_2 \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} a_1 = \Omega_3 a_1 - \Omega_1 a_3 \\ \Omega_1 a_2 - \Omega_2 a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Omega_3 = -\frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \Omega_1 = \Omega_2 = 0 \end{cases}$$

On retrouve alors bien la relation : $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \underline{\omega}(\underline{x}, t)$

6.2. Lois de conservation

6.2.1. Masse

6.2.1.1 Rappel : conservation de la masse

Une première forme de **loi de conservation de la masse** a été formulée précédemment (section 2.6.3):

Equation fondamentale 6-4

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(\underline{v}) = 0 : \text{conservation de la masse}$$

On peut également proposer la forme suivante :

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = 0$$

avec $\underline{da} = \underline{n} da$ un élément de surface orienté.

- $\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega_t$: effet de la variation dans le temps de la masse volumique
- $\int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} \cdot \underline{da}$: terme de convection (flux de matière sortant)

6.2.1.2 Cas des écoulements stationnaires : conservation du débit

Dans le cas d'écoulements **stationnaires** (on rappelle que dans ce cas la description eulérienne du mouvement est indépendante du temps), on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \underline{0}$$

La conservation de la masse devient alors : $\int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = 0$

Si l'on considère le cas d'une canalisation en écoulement stationnaire, où la frontière du milieu peut être décomposée en une surface d'entrée S_e , une surface de sortie S_s , et la paroi de la canalisation S_p . On peut alors écrire l'équation :

$$\int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = \int_{S_e} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} + \int_{S_s} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} + \int_{S_p} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = 0$$

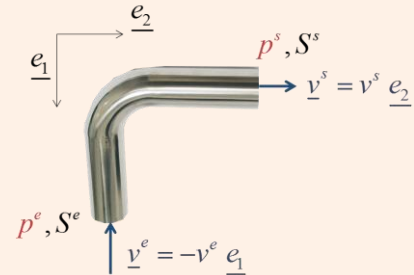
La paroi de la canalisation étant étanche, on en déduit :

$$-\int_{S_e} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = \int_{S_s} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = Q_m : \text{conservation du } \mathbf{d\acute{e}bit} \text{ massique}$$

Ceci exprime tout simplement qu'il y a dans ce cas **conservation du débit massique**. Le débit massique Q_m s'exprime évidemment en $kg.s^{-1}$ et ne doit pas être confondu avec le débit volumique Q_v exprimé en $m^3.s^{-1}$.

Exemple 6-2

Considérons un tube coudé de section constante S , possédant une surface d'entrée S^e et de sortie S^s aux pressions p^e et p^s respectivement, et les vitesses d'entrées et de sorties sont $\underline{v}^e = -v^e \underline{e}_1$ et $\underline{v}^s = v^s \underline{e}_2$.



Un fluide incompressible s'écoule à l'intérieur du tube.

La conservation du débit massique telle que formulée ci-dessus s'écrit :

$$-\int_{S^e} \rho \underline{v}^e \cdot \underline{n}^e da = \int_{S^s} \rho \underline{v}^s \cdot \underline{n}^s da \quad \text{avec } \underline{n}^e = \underline{e}_1 \text{ et } \underline{n}^s = \underline{e}_2$$

La masse volumique est constante, et si on fait de plus l'hypothèse que la vitesse est répartie uniformément sur la section on a alors :

$$\begin{aligned} -\int_{S^e} \rho (-v^e \underline{e}_1) \cdot \underline{e}_1 da &= \int_{S^s} \rho v^s \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2 da \\ \Rightarrow \rho v^e S^e &= \rho v^s S^s \Rightarrow v^e = v^s \end{aligned}$$

6.2.1.3 Cas du fluide incompressible

Dans le cas d'un fluide **incompressible**, on a naturellement :

$$\rho(\underline{x}, t) = \rho_0 \text{ indépendant de } \underline{x} \text{ et de } t$$

Si on reprend l'équation précédente il vient naturellement :

$$-\int_{S_e} \underline{v} \cdot \underline{da} = \int_{S_s} \underline{v} \cdot \underline{da} = \frac{Q_m}{\rho} = Q_v : \text{il y a } \mathbf{conservation \text{ du débit volumique}}$$

De plus, reprenons l'équation locale de la conservation de la masse :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0$$

On en déduit tout naturellement que dans le cas incompressible :

Equation fondamentale 6-5

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0 : \text{cas du fluide incompressible}$$

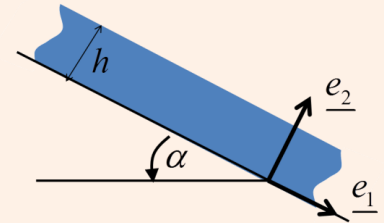
C'est une des équations fondamentales pour la mécanique des fluides.

Application à l'exemple introductif :

Considérons le champ de vitesses suivant $\underline{v}(x_2) = v_1(x_2)\underline{e}_1$.

Vérifions si un tel écoulement correspond à un fluide incompressible :

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \text{CQFD}$$



En réalité, tous les fluides sont compressibles, mais certains plus que d'autres. La compressibilité des **liquides** est en revanche très faible, et l'hypothèse de fluide incompressible est très généralement réalisée pour l'étude de l'écoulements d'eau (liquide) ou d'huile dans des canalisations par exemple.

6.2.2. Quantité de mouvement

On a montré précédemment (section 2.6.2) que la dérivée particulaire de l'intégrale de volume de la quantité $b(\underline{x}, t)$ (eulérienne) s'exprimait :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} b d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} b \underline{v} \cdot d\underline{a}$$

Si on pose $b = \rho v_i$ dans cette équation on obtient alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho v_i d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \rho v_i \underline{v} \cdot d\underline{a}$$

Ceci étant vrai pour toutes les composantes de la vitesse, on peut ainsi exprimer la formule de transport de la quantité de mouvement :

Equation fondamentale 6-6

$$\frac{d}{dt} \underline{p} = \sum \underline{F}^{ext} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{v}) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\underline{a} : \text{formule de transport d'Euler}$$

Ce théorème permet d'exprimer la variation de quantité de mouvement comme la somme d'un terme volumique (variation au sein du système) et d'un terme de transfert par la frontière (quantité de mouvement due au flux entrants et sortants). Comme précédemment, la variation de quantité de mouvement est égale à la somme des efforts extérieures agissant sur le système.

Exemple 6-3

Reprenons l'exemple du tube coudé ci-dessus, pour lequel on a $v^e = v^s = v$.

Au temps t , une masse $dm^e = \rho v^e S^e dt = \rho v S dt$ entre dans le tube et au temps $t + dt$, une masse une masse $dm^s = \rho v^s S^s dt = \rho v S dt = dm^e$ en ressort du tube. Si on écrit la variation de la quantité de mouvement entre ces deux moments pour le système composé du fluide dans le tube et des masses qui entrent et sortent entre t et $t + dt$ on obtient:

$$\begin{aligned} d\underline{p} &= (\underline{p}(t+dt) + dm^s \underline{v}^s) - (\underline{p}(t) + dm^e \underline{v}^e) \\ d\underline{p} &= \underline{p}(t+dt) + \rho v^2 S dt \underline{e}_2 - \underline{p}(t) + \rho v^2 S dt \underline{e}_1 \end{aligned}$$

Comme il y a conservation du mouvement on a $\underline{p}(t+dt) = \underline{p}(t)$ et donc :

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \rho v^2 S (\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = \sum \underline{F}^{ext}$$

On va considérer que le tube est horizontal et que les forces de volumes (pesanteur) sont négligeables. Le fluide est donc soumis aux forces de pression sur les sections d'entrée et de sortie ainsi qu'à la force de réaction $\underline{F}$ exercée par la paroi sur le fluide, et donc:

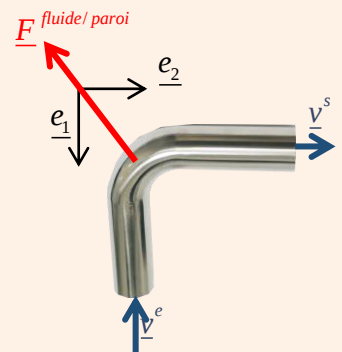
$$\underline{F}^{ext} = -p^e S^e \underline{e}_1 - p^s S^s \underline{e}_2 + \underline{F}$$

On peut en déduire l'effort total :

$$\begin{aligned} \rho v^2 S (\underline{e}_1 + \underline{e}_2) &= -p^e S \underline{e}_1 - p^s S \underline{e}_2 + \underline{F} \\ \Rightarrow \underline{F} &= S (p^e + \rho v^2) \underline{e}_1 + S (p^s + \rho v^2) \underline{e}_2 \end{aligned}$$

Cet effort est exercé par la paroi sur le fluide : la force exercée par le fluide par la paroi est évidemment l'opposée, la direction de cet effort n'est pas surprenante.

$$\underline{F}^{fluide/paroi} = -S (\rho v^2 + p^e) \underline{e}_1 - S (\rho v^2 + p^s) \underline{e}_2$$



6.3. Le fluide newtonien

Des observations expérimentales permettent de montrer que, pour un fluide en **hydrostatique**, la contrainte normale est identique quelle que soit la normale considérée $\underline{n}$, ce qu'on peut par conséquent noter :

$$\forall \underline{n}, \quad \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n} = -p \underline{n}$$

On vient d'introduire ici la notion de pression p , et en hydrostatique on a donc le tenseur des contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} \Rightarrow [\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

Il n'y a dans ce cas aucune contrainte tangentielle, ce qui peut constituer une définition d'un fluide : un fluide est un matériau qui **au repos** ne peut supporter aucune contrainte tangentielle.

Lorsqu'on veut mettre ce fluide en mouvement, et donc dans le cas de l'**hydrodynamique**, on observe que des **contraintes visqueuses** s'ajoutent au tenseur des contraintes hydrostatique, et que l'on peut écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$$

On dit qu'un fluide est **newtonien** si une relation **linéaire** existe entre le taux de déformation $\underline{\underline{d}}$ (partie symétrique du gradient du champ de vitesses) et le tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\underline{\tau}}$. Dans le cas d'un fluide **incompressible isotrope**, cette relation linéaire se réduit à un seul coefficient μ qui est la **viscosité dynamique** du fluide, et on a :

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \underline{\underline{d}} = \mu \left(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} + \left(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} \right)^T \right)$$

La loi de comportement d'un fluide newtonien est donc donnée par la relation :

Equation fondamentale 6-7

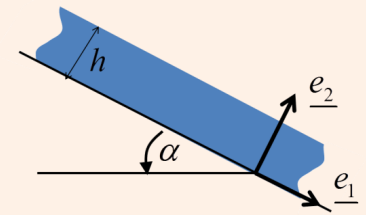
$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}} : \text{loi de comportement du fluide newtonien}$$

La **viscosité dynamique** correspond donc à la contrainte de cisaillement qui accompagne l'existence d'un gradient de vitesse dans un fluide. Pour les fluides newtoniens, cette propriété du matériau est indépendante du gradient de vitesse ; elle n'est en revanche pas du tout indépendante des variations de **température** du fluide. Par exemple, la viscosité dynamique de l'eau à 20°C est d'environ $10^{-3} Pa.s$, tandis qu'elle vaut $1.75 \times 10^{-3} Pa.s$ à 0°C.

Application à l'exemple introductif :

Considérons le champ de vitesses suivant $\underline{v}(x_2) = v_1(x_2)\underline{e}_1$, pour lequel on a calculé :

$$[\underline{d}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Le calcul de la contrainte partout au sein de ce fluide se fait donc aisément :

$$[\underline{\sigma}] = -p[\underline{I}] + 2\mu[\underline{d}] = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

6.4. Equation de Navier-Stokes

6.4.1. Démonstration et énoncé

Nous avons écrit précédemment (section 3.4) l'**équation d'équilibre** suivante, valable pour des matériaux solides ou fluides :

$$\text{div} \underline{\sigma} + \rho(\underline{f}^m - \underline{a}) = \underline{0}$$

L'accélération qui intervient dans cette équation peut être écrite en description eulérienne à partir de la dérivée particulaire de la vitesse :

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v}$$

Il vient donc l'équation d'équilibre suivante :

$$\underline{\underline{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f}^m = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right)$$

Considérons désormais la loi de comportement d'un **fluide newtonien** énoncé ci-dessus :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{I} + 2\mu \underline{\underline{d}}$$

On peut donc réécrire l'équation d'équilibre sous la forme :

$$\underline{\underline{div}}(-p \underline{I} + 2\mu \underline{\underline{d}}) + \rho \underline{f}^m = -\underline{\underline{div}}(p \underline{I}) + \underline{\underline{div}}(2\mu \underline{\underline{d}}) + \rho \underline{f}^m = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right)$$

Les deux termes $\underline{\underline{div}}(p \underline{I})$ et $\underline{\underline{div}}(2\mu \underline{\underline{d}})$ méritent d'être développés :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{div}}(p \underline{I}) &= \frac{\partial p}{\partial x_j} \underline{e}_j = \underline{\underline{grad}}(p) \\ \underline{\underline{div}}(2\mu \underline{\underline{d}}) &= \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i = 2\mu \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i = 2\mu \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{d}}) \end{aligned}$$

L'équation d'équilibre devient : $-\underline{\underline{grad}}(p) + 2\mu \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{d}}) + \rho \underline{f}^m = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right)$

On peut enfin calculer le terme $\underline{\underline{div}}(\underline{\underline{d}})$ au vu de sa définition :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v} + (\underline{\underline{grad}} \underline{v})^T \right) \Rightarrow \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{d}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}} \underline{v}) + \frac{1}{2} \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}} \underline{v})^T$$

Le terme $\underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}} \underline{v})$ se formule à partir du laplacien : $\underline{\Delta} \underline{v} = \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}} \underline{v})$

Enfin, si on considère un fluide **incompressible** tel que $\underline{\underline{div}} \underline{v} = 0$:

$$\left(\underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \right)^T = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \Rightarrow \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}}(\underline{v}))^T = \frac{\partial (\underline{\underline{grad}} \underline{v})_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i = \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \underline{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \underline{\underline{div}} \underline{v} = \underline{0}$$

On reformule donc l'équation d'équilibre de la façon suivante :

$$-\underline{\underline{grad}}(p) + \mu \underline{\Delta} \underline{v} + \rho \underline{f}^m = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right)$$

Si l'on prend en compte le fait que dans la plupart des cas la seule force massique $\underline{f}^m$ est l'accélération de la pesanteur $\underline{g}$, on arrive enfin à **l'équation de Navier-Stokes** essentielle en mécanique des fluides :

Equation fondamentale 6-8

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\underline{grad}}(p) + \mu \underline{\Delta} \underline{v} + \rho \underline{g} : \text{équation de Navier-Stokes}$$

A retenir 6-1

L'équation de Navier-Stokes est la combinaison de **l'équation d'équilibre** d'un milieu continu, de la **loi de comportement d'un fluide newtonien** et de **l'incompressibilité** du fluide.

6.4.2. Utilisation

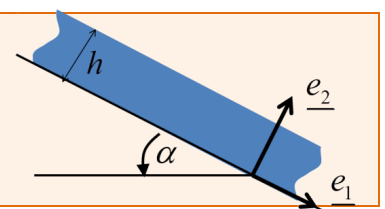
L'équation de Navier-Stokes est donc une équation **différentielle**, dont les inconnues sont le champ de **vitesse**s et la **pression**. On a donc 4 inconnues (les trois composantes du champ de vitesses $\underline{v}(\underline{x})$ et la pression $p(\underline{x})$) pour une équation vectorielle (donc trois équations)... en pratique, la condition d'incompressibilité du fluide $\text{div } \underline{v} = 0$ constitue la quatrième équation qui permet de résoudre le système.

Oublions la rigueur mathématique un court instant : l'équation de Navier-Stokes peut être vue comme l'analogie de « somme des forces = masse × accélération », dans le sens où :

- $-\underline{\underline{grad}} p$ correspond aux « forces de pression »
- $\mu \underline{\Delta} \underline{v}$ correspond aux « forces visqueuses »
- $\rho \underline{g}$ correspond aux « forces de pesanteur »
- $\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{Grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right)$ correspond à l'accélération du fluide

Application à l'exemple introductif :

Tentons d'utiliser l'équation de Navier-Stokes pour déterminer complètement le champ $\underline{v}(x_2) = v_1(x_2) \underline{e}_1$ dans le cas de l'écoulement le



long du plan incliné. Dans cette équation, on peut rapidement éliminer le terme de gauche (écoulement établi) :

$$\rho \left[\frac{d\underline{v}}{dt} \right] = \rho \left(\cancel{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}} + [\underline{\text{grad}}(\underline{v})] \cdot [\underline{v}] \right) = \rho \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(x_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si on considère la forme $p(x_1, x_2)$ pour le champ de pression en raison de l'hypothèse de plan infini :

$$-\underline{\text{grad}}(p) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} \underline{e}_1 - \frac{\partial p}{\partial x_2} \underline{e}_2 - \cancel{\frac{\partial p}{\partial x_3} \underline{e}_3}$$

Le laplacien du champ de vitesses se calcule en se référant à la section 2.6.1.4 :

$$\Delta \underline{v} = \underline{\text{div}}(\underline{\text{grad}} \underline{v}) = \underline{\text{div}} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 \right) = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \underline{e}_1$$

Au final, l'équation de Navier-Stokes mène au système de deux équations :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \rho g \sin \alpha \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2} - \rho g \cos \alpha \end{cases}$$

L'équation de Navier-Stokes est non linéaire du fait de l'expression de l'accélération.

La résolution de cette équation nécessite bien entendu des **conditions aux limites**, dont les formes les plus naturelles sont :

→ une vitesse donnée au bord: $\forall \underline{x} \in \partial\Omega, \underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}^0(\underline{x})$

→ une pression donnée en un point du bord : $p(\underline{x}^0 \in \partial\Omega) = p^0$

Une condition aux limites classiquement rencontrée et la condition **d'adhérence à la paroi**, qui stipule que $\forall \underline{x} \in \partial\Omega, \underline{v}(\underline{x}) = \underline{0}$.

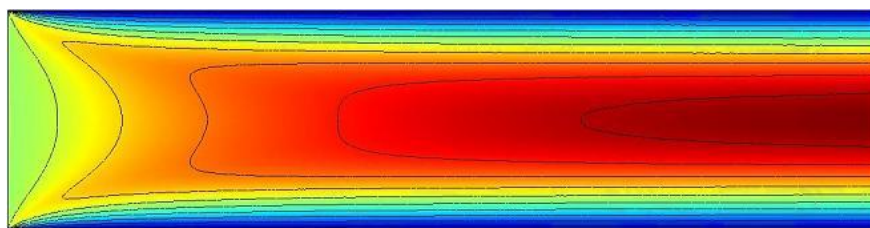


Figure 38: Exemple d'écoulement dit "de Poiseuille" avec condition d'adhérence à la paroi. Le code couleur correspond à la norme du champ de vitesses.

Application à l'exemple introductif :

Des conditions aux limites sont requises pour résoudre système précédent issu de l'équation de Navier-Stokes.

La seconde équation implique : $p(x_1, x_2) = -\rho g \cos \alpha x_2 + f(x_1)$

D'une part, la pression à la surface du fluide (surface libre, voir section 4.3) est égale à la pression atmosphérique, et donc :

$$p(x_1, h) = -\rho g \cos \alpha h + f(x_1) = P_0 \Rightarrow f(x_1) = P_0 + \rho g \cos \alpha h$$

Et on en déduit la pression :

$$p(x_2) = \rho g \cos \alpha (h - x_2) + P_0$$

La première équation qui résulte de l'équation de Navier-Stokes devient :

$$0 = -\cancel{\frac{\partial p}{\partial x_1}} + \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \rho g \sin \alpha \Rightarrow \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = -\frac{\rho g}{\mu} \sin \alpha \Rightarrow v_1 = -\frac{\rho g}{2\mu} \sin \alpha x_2^2 + A x_2 + B$$

La condition d'adhérence à la paroi nous permet d'écrire :

$$v_1(x_2 = 0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

De plus, la contrainte dans le fluide a précédemment été calculée :

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} -p & \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

La condition de surface libre à la surface du fluide implique :

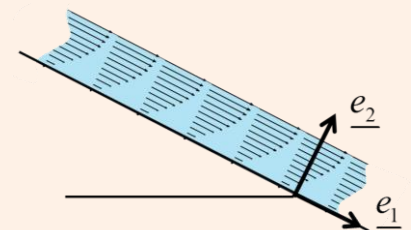
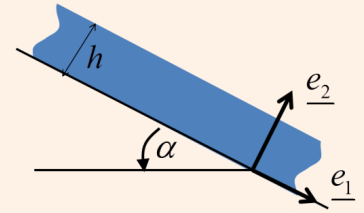
$$\underline{t}(x_2 = h, \underline{e}_2) = \underline{\underline{\sigma}}(x_2 = h) \cdot \underline{e}_2 = \sigma_{12}(x_2 = h) \underline{e}_1 + \sigma_{22}(x_2 = h) \underline{e}_2 + \sigma_{32}(x_2 = h) \underline{e}_3 = -P_0 \underline{e}_2$$

On peut donc en déduire la dernière constante :

$$\sigma_{12}(x_2 = h) = \mu \left. \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right|_{x_2=h} = -\rho g \sin \alpha h + A\mu = 0 \Rightarrow A = \frac{\rho g}{\mu} \sin \alpha h$$

On vient donc enfin de déterminer intégralement le profil de vitesse :

$$v_1(x_2) = -\frac{\rho g}{2\mu} \sin \alpha x_2^2 + \frac{\rho g}{\mu} \sin \alpha h x_2 = \frac{\rho g}{\mu} \sin \alpha \left(h - \frac{x_2}{2} \right) x_2$$



Résumé du CHAPITRE 6 : ce qu'il faut savoir

- ✓ **Définition et calcul d'une vitesse de déformation et de rotation**
- ✓ **Définition et calcul de la vorticité d'un fluide**
- ✓ **Loi de conservation de la masse et conservation du débit massique**
- ✓ **Loi de comportement d'un fluide newtonien : définition et utilisation**
- ✓ **Equation de Navier-Stokes : hypothèses, interprétation physique**

Résumé des notations utilisées

Nom	Notation	Unité SI	Commentaire / définition
Scalaire	a		Elément de $\mathbb{R}$
Vecteur	$\underline{a}$		Elément de $\mathbb{R}^3$
Tenseur d'ordre n	$\underline{\underline{A}}$ (n>2) $\underline{\underline{A}}$ (n=2)		Elément de $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^3$
Configuration de référence	K_0		Ensemble des points à $t = t_0$
Configuration actuelle	K_t		Ensemble des points à t
Vecteur déplacement	$\underline{u}$	m	Différence entre la position d'un point dans K_0 et K_t
Vecteur vitesse (<i>eulérien</i>)	$\underline{v}$	$m \cdot s^{-1}$	Dérivée temporelle du déplacement
Gradient de la transformation	$\underline{\underline{F}}$	Sans unité	Tenseur mixte transformant un vecteur de K_0 dans K_t
Jacobien de la transformation	J	Sans unité	Déterminant de $\underline{\underline{F}}$: variation de volume
Tenseur des déformations de Green-Lagrange	$\underline{\underline{E}}$	Sans unité	Compare les produits scalaires dans K_0 et K_t (lagrangien)
Tenseur des déformations d'Euler-Almansi	$\underline{\underline{e}}$	Sans unité	Compare les produits scalaires dans K_0 et K_t (eulérien)
Tenseur des déformations linéarisé	$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Sans unité	Linéarisation de $\underline{\underline{E}}^{GL}$ en HPP
Tenseur de description eulérienne	$\underline{\underline{k}}$	s^{-1}	Gradient eulérien des vitesses
Tenseur vitesse de déformation eulérienne	$\underline{\underline{d}}$	s^{-1}	Partie symétrique de $\underline{\underline{k}}$
Tenseur vitesse de rotation	$\underline{\underline{\Omega}}$	s^{-1}	Partie antisymétrique de $\underline{\underline{\Omega}}$
Vecteur-contrainte (<i>eulérien</i>)	$\underline{t}$	$Pa = N \cdot m^{-2}$	Densité surfacique d'effort exercée par le complémentaire d'un milieu sur un milieu pour une facette donnée
Tenseur des contraintes de Cauchy	$\underline{\underline{\sigma}}$	$Pa = N \cdot m^{-2}$	« Contient » les projections de tous les vecteurs-contraintes pour toutes les facettes (<i>eulérien</i>)
Loi de comportement			Loi locale liant les contraintes, les déformations et la température d'un milieu
Module de Young	E	$Pa = N \cdot m^{-2}$	Lien entre une composante de $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en HPP et en élasticité linéaire
Coefficient de Poisson	ν	Sans unité	Lien entre déformation selon une direction et selon la direction transverse
Vorticité	$\underline{\underline{\omega}}$	s^{-1}	Rotationnel du champ de vitesses
Viscosité dynamique	μ	$Pa \cdot s$	Lien entre $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{d}}$ pour un fluide newtonien