

Électromagnétisme



Lois de Faraday et d'Ohm

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

23 novembre 2017

Objectifs de la leçon

- ▶ Introduire les lois de Faraday et d'Ohm ;
- ▶ Compléter les équations de la magnétostatique par ces lois afin d'obtenir les équations de Maxwell des basses fréquences.
- ▶ Préalablement à l'abord de ces deux objectifs, l'aimant sphérique et son interaction avec un champ magnétique extérieur sont introduits.

Parce que la situation de l'aimant sphérique en mouvement à proximité d'un conducteur électrique servira d'exemple emblématique aux notions de la leçon.

L'aimant sphérique

► L'aimant sphérique présente l'avantage que l'expression du champ magnétique qu'il produit a une expression analytique. Si l'aimant

- est une boule de rayon R centrée à l'origine ;
- d'axe d'aimantation $\vec{d}$: un vecteur de direction, de norme 1 $|\vec{d}| = 1$ (le pôle nord (resp. sud) est le point qui maximise (resp. minimise) $\vec{d} \cdot \vec{x}$ sur la sphère ($|\vec{x}| = R$))
- et de densité d'aimantation m , une quantité ne dépendant que de la matière qui compose l'aimant (en Ampère par mètre A/m) qui vaut approximativement : $10^6 A/m$ pour du néodyme-fer-bore et $0.3 \cdot 10^6 A/m$ pour de la ferrite ;

alors le champ magnétique $\vec{h}$ est

$$\text{et } \vec{h} = m \begin{cases} -\frac{1}{3} \vec{d} & \text{pour } |\vec{x}| < R \\ \frac{R^3}{3 |\vec{x}|^3} \left(3 \frac{(\vec{d} \cdot \vec{x}) \vec{x}}{|\vec{x}|^2} - \vec{d} \right) & |\vec{x}| > R \end{cases}$$

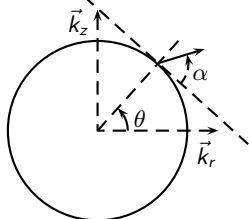
Commentaire sur la planche précédente

- *Il y a une boule ; dans cette boule une aimantation qui est donnée par son intensité n et sa direction $\vec{d}$; et à cette aimantation est associé $\vec{h}$ une fonction à valeur vectorielle dépendant de la position $\vec{x}$ dans l'espace qu'on appelle un champ magnétique.*
- Est-on bien sûr de comprendre de quoi il s'agit ? Est-ce que ça a la moindre utilité d'ailleurs ?
- Dans un contexte de sciences de l'ingénieur, on ne peut pas « comprendre » tant qu'on n'a pas mis en œuvre les notions pour en faire tirer un résultat pratique et observable. Et le critère qui permet un jugement sur l'utilité est précisément qu'un résultat pratique et observable dérivant des notions soit donné.
- Seulement il est nécessaire de s'appropriier les notions avant de pouvoir en extraire des résultats pratiques et observable. D'où un travail préalable.

Exercice de compréhension de la formule

- ▶ Attention ! Le magnétisme terrestre ne s'explique plus comme cela depuis près de 150 ans.
- ▶ Mais quantitativement le champ magnétique terrestre est approximativement celui que produirait un aimant sphérique en néodyme-fer-bore de 120 km de rayon, placé au centre de la terre (rayon ≈ 6400 km) et dont l'axe d'aimantation est aligné sur l'axe de rotation de la terre (on confond les nord géographique et magnétique).
- ▶ Montrer que ce modèle explique que le champ magnétique à Nancy (latitude $\approx 48^\circ$ nord) est d'intensité 3.6 A/m ($4.5 \mu\text{T}$ micro-tesla) avec un angle $\approx 66^\circ$ par rapport à l'horizontal et est dirigé vers le pôle sud.

Correction



$\vec{k}_z$ et $\vec{k}_r$ sont les vecteurs de base suivant l'axe et radial ;
Le cercle a pour rayon celui de la terre : $\mathcal{R}$;
 θ est la latitude ;
 α l'angle que fait le vecteur $\vec{h}$ avec l'horizontale.

► La direction d'aimantation est $\vec{d} = \vec{k}_z$; La position de Nancy est $\mathcal{R} (\cos \theta \vec{k}_r + \sin \theta \vec{k}_z)$; le champ magnétique y est donc

$$\vec{h} = \frac{R^3 m}{\mathcal{R}^3} \left(\sin \theta \cos \theta \vec{k}_r + \left(\sin^2 \theta - \frac{1}{3} \right) \vec{k}_z \right)$$

De plus, la direction de l'horizontale est $\vec{\tau} = \sin \theta \vec{k}_r - \cos \theta \vec{k}_z$ d'où

$$|\vec{h}| = \frac{R^3 m}{\mathcal{R}^3} \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \left(\sin^2 \theta - \frac{1}{3} \right)^2} = 3.5815 \text{ A/m}$$
$$\cos \alpha = \frac{\vec{h} \cdot \vec{\tau}}{|\vec{h}|} = \frac{\sin^2 \theta \cos \theta - \cos \theta \left(\sin^2 \theta - \frac{1}{3} \right)}{\sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \left(\sin^2 \theta - \frac{1}{3} \right)^2}} = 0.41052$$

Interaction entre un champ magnétique extérieur et un aimant sphérique

- $\vec{h}_s$ est un champ magnétique extérieur ; i.e. il est produit par n'importe quelle source en dehors de l'aimant considéré ; de plus ce champ est à laplacien nul dans toute la région de l'espace occupée par l'aimant (c'est toujours le cas).
- Dans ces circonstances, la partie de la coénergie magnétique qui traduit l'interaction entre ce champ et l'aimant est

$$\overline{W} = \mu_0 \mathcal{M} \vec{d} \cdot \vec{h}_s(0)$$

où

$$\mathcal{M} = m \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ et } \mu_0 = 4 \pi 10^{-7} \text{ H/m}$$

$\mathcal{M}$ est le moment magnétique de l'aimant ; μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

Commentaires sur la planche précédente 1/2

- Qu'est-ce que le laplacien d'un champ de vecteur $\vec{h}$? c'est un autre champ de vecteur $\vec{\Delta h}$ qui a pour expression : si $\vec{h} = h_x \vec{k}_x + h_y \vec{k}_y + h_z \vec{k}_z$

$$\vec{\Delta h} = \Delta h_x \vec{k}_x + \Delta h_y \vec{k}_y + \Delta h_z \vec{k}_z$$

où $\Delta\phi$ est le laplacien d'un champ scalaire ϕ (ici $\phi = h_x, h_y, h_z$ les composantes de $\vec{h}$ dans la base orthornormée $(\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z)$) et on appelle champ scalaire une fonction de la position.

- Qu'est-ce que le laplacien d'un champ scalaire ϕ ? c'est un autre champ scalaire $\Delta\phi$ qui a pour expression : si $\vec{x} = x \vec{k}_x + y \vec{k}_y + z \vec{k}_z$

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial^2x} + \frac{\partial^2\phi}{\partial^2y} + \frac{\partial^2\phi}{\partial^2z}$$

Commentaires sur la planche précédente 2/2

- ▶ En quoi le fait d'être un champ à laplacien nul est-il nécessaire ?
là il faut déjà entrer dans les propriétés des champs à laplacien nul.
C'est un des sujets du cours de mathématiques.
- ▶ Il faut également savoir laquelle de ces propriétés est utilisée pour affirmer que la partie de la coénergie magnétique qui traduit l'interaction entre ce champ et l'aimant est ...
- ▶ C'est à dire qu'il faut savoir *a priori* ce qu'est la coénergie magnétique. Le cours précédent a introduit la coénergie magnétique comme cette énergie qui est une forme quadratique des courants électriques. Mais ici il n'y a pas de courants électriques !
- ▶ Et de toute façon le concept d'énergie n'a d'intérêt que si cette énergie varie. Si la cause de variation est un mouvement, la variation de l'énergie est le travail des forces qui correspondent à ce mouvement.

Force qu'un champ magnétique extérieur génère sur un aimant sphérique

- Si le centre de l'aimant est à la position $\vec{X}$ dans l'espace, la coénergie magnétique d'interaction est

$$\overline{W} = \mu_0 \mathcal{M} \vec{d} \cdot \vec{h}_s(\vec{X})$$

- La force générée sur l'aimant est alors

$$\vec{f} = \vec{\nabla}_{\vec{X}} \overline{W} = \partial_x \overline{W} \vec{k}_x + \partial_y \overline{W} \vec{k}_y + \partial_z \overline{W} \vec{k}_z$$

où $\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z$ forment une base orthonormée de l'espace et $\vec{X} = x \vec{k}_x + y \vec{k}_y + z \vec{k}_z$.

- Le couple généré sur l'aimant est

$$\vec{\gamma} = \mu_0 \mathcal{M} \vec{d} \times \vec{h}_s(\vec{X})$$

où $\times$ signifie « produit vectoriel ».

Commentaire sur la planche précédente

► Le gradient d'une fonction $\overline{W}$ dépendant d'un vecteur $\vec{X}$ est introduit. Si $\overline{W}$ est différentiable par rapport à $\vec{X} = x \vec{k}_x + y \vec{k}_y + z \vec{k}_z$, il est alors possible de contruire avec elle le vecteur

$$\vec{\nabla} \overline{W}(\vec{X}) = \partial_x \overline{W}(x, y, z) \vec{k}_x + \partial_y \overline{W}(x, y, z) \vec{k}_y + \partial_z \overline{W}(x, y, z) \vec{k}_z$$

qui est appelé le gradient de $\overline{W}$ en $\vec{X}$. Ce vecteur permet d'écrire le développement de Taylor de $\overline{W}$ en $\vec{X}$ à l'ordre 1 comme

$$\overline{W}(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = \underbrace{\overline{W}(x, y, z)}_{=0} + \vec{\nabla} \overline{W}(\vec{X}) \cdot \delta \vec{X} + o(|\delta \vec{X}|)$$

avec $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} = 0$ et $\delta \vec{X} = \delta x \vec{k}_x + \delta y \vec{k}_y + \delta z \vec{k}_z$

► On a écrit $\overline{W}(\vec{X}) = \overline{W}(x, y, z)$; c'est un abus de notation mais il est légitime dès lors qu'on ne change pas de base pour écrire le vecteur position en coordonnées.

Commentaire sur le commentaire précédent

- Les dérivées partielles d'une fonction

$$\begin{aligned}\overline{W} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow R && \text{se notent } \partial_x \overline{W}, \partial_y \overline{W}, \partial_z \overline{W}. \\ (x, y, z) &\longrightarrow \overline{W}(x, y, z)\end{aligned}$$

Ce sont des fonctions $\partial_x \overline{W} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow R$

$$(x, y, z) \longrightarrow \partial_x \overline{W}(x, y, z)$$

définies par

$$\partial_x \overline{W}(x, y, z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\overline{W}(x + \epsilon, y, z) - \overline{W}(x, y, z)}{\epsilon}$$

(idem pour $\partial_y \overline{W}$, $\partial_z \overline{W}$)

- Lorsque les limites existent la fonction $\overline{W}$ est dite différentiable, sa différentielle est l'application linéaire (en revenant aux notations en vecteurs)

$$\begin{aligned}D(\overline{W})(\vec{X}) : E_3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \delta \vec{X} &\longrightarrow \vec{\nabla} \overline{W}(\vec{X}) \cdot \delta \vec{X}\end{aligned}$$

Exercice

► Calculer la force qu'exercent l'un sur l'autre deux aimants identiques (même rayon, même densité d'aimantation) de centres $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$ et directions d'aimantation $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$ dans les configurations :

1. $\vec{d}_1 = \vec{d}_2 = \vec{d}$, $\vec{X}_1 = \vec{0}$, $\vec{X}_2 = x \vec{d}$;
2. $\vec{d}_1 = \vec{d}$, $\vec{d}_2 = -\vec{d}$, $\vec{X}_1 = \vec{0}$, $\vec{X}_2 = x \vec{d}$;
3. $\vec{d}_1 = \vec{d}_2 = \vec{d}$, $\vec{X}_1 = \vec{0}$, $\vec{X}_2 = x \vec{d}^\perp$ avec $\vec{d}^\perp \cdot \vec{d} = 0$
4. $\vec{d}_1 = \vec{d}$, $\vec{d}_2 = -\vec{d}$, $\vec{X}_1 = \vec{0}$, $\vec{X}_2 = x \vec{d}^\perp$ avec $\vec{d}^\perp \cdot \vec{d} = 0$
5. $\vec{d}_1 = \vec{d}_2 = \vec{d}$, $\vec{X}_1 = \vec{0}$, $\vec{X}_2 = x (\cos \theta \vec{d} + \sin \theta \vec{d}^\perp)$

De plus dans ce cas :

- 5.1 que remarque-t-on pour $\theta = 54^\circ 44' 8''$?
- 5.2 donner les zones d'attraction et de répulsion pour des aimants de moments magnétiques alignés.

Correction 1/2

$$1. \overline{W} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{2}{x^3} \Rightarrow \vec{f} = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{6}{x^4} \vec{d}$$

$$2. \overline{W} = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{2}{x^3} \Rightarrow \vec{f} = +\frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{6}{x^4} \vec{d}$$

$$3. \overline{W} = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{1}{x^3} \Rightarrow \vec{f} = +\frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{3}{x^4} \vec{d}^\perp$$

$$4. \overline{W} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{1}{x^3} \Rightarrow \vec{f} = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{3}{x^4} \vec{d}^\perp$$

$$5. \overline{W} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{3 \cos \theta^2 - 1}{x^3} \Rightarrow$$

$$\vec{f} = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi} \frac{3 (3 \cos \theta^2 - 1)}{x^4} (\cos \theta \vec{d} + \sin \theta \vec{d}^\perp)$$

Correction 2/2



Attraction
max



Attraction
 $1/2$ max



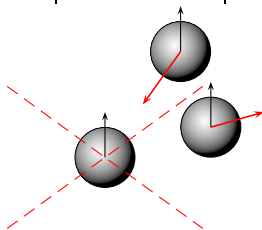
Répulsion
max



Répulsion
 $1/2$



Pas de
forces (mais
un couple)



Aimant tombant dans un tube de cuivre : observations

► Un aimant immobile au voisinage d'un tube de cuivre ne subit aucune force notable

⇒ le cuivre n'est pas un milieu dans lequel il y a du magnétisme induit (contrairement au fer, nickel ou cobalt).

► Après un court transitoire, la chute d'un aimant placé à l'intérieur d'un tube de cuivre se fait à vitesse constante

⇒ il existe une force d'interaction entre le cuivre et l'aimant en mouvement qui compense la force de gravité.

Explication de l'observation : les lois

- La loi de Faraday affirme que la variation dans le temps d'un champ magnétique $\vec{h}$ engendre un champ électrique $\vec{e}$ selon la loi

$$\vec{\nabla} \times \vec{e} = -\mu_0 \partial_t \vec{h}$$

- La loi d'Ohm (locale) affirme que dans un conducteur électrique homogène soumis à un champ électrique $\vec{e}$ circule un courant électrique $\vec{j}$ tel que

$$\vec{j} = \sigma \vec{e}$$

où σ (en S/m : Siemens par mètre) est appelé la conductivité électrique (c'est l'inverse de la résistivité électrique (en Ωm)) ; il est caractéristique du milieu conducteur.

- La loi d'Ampère affirme qu'un courant électrique de densité de courant $\vec{j}$ engendre un champ magnétique $\vec{h}$ tel que

$$\vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{j}$$

Commentaires sur la planche précédente

- $\vec{\nabla} \times \vec{e}$ est le rotationnel de $\vec{e}$.

$$\begin{aligned}\vec{e} = e_x \vec{k}_x + e_y \vec{k}_y + e_z \vec{k}_z \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{e} = & (\partial_y e_z - \partial_z e_y) \vec{k}_x \\ & + (\partial_z e_x - \partial_x e_z) \vec{k}_y \\ & + (\partial_x e_y - \partial_y e_x) \vec{k}_z\end{aligned}$$

- $\partial_t \vec{h}$ est la dérivée partielle du champ de vecteurs $\vec{h}$ par rapport au temps. Ce qui indique que $\vec{h}$ n'est pas seulement une fonction (vectorielle) des coordonnées d'espace x, y, z mais elle l'est encore du temps t .

- Il serait très fastidieux de toujours indiquer les variables qui sont les arguments de $\vec{h}$, $\vec{e}$ ou $\vec{j}$, lesquelles sont les composantes du vecteur position $\vec{X}$ et du temps t .

Aussi utilise-t-on plus ou moins implicitement la notion de variables dépendante et indépendante : $\vec{h}$, $\vec{e}$ ou $\vec{j}$ sont des variables dépendantes des variables indépendantes $\vec{X}$ et t .

Explication de l'observation : l'explication qualitative

- ▶ L'aimant se déplace dans un référentiel fixe et donc le champ magnétique $\vec{h}$ qu'il produit est variable dans ce référentiel ;
- ▶ Avec la loi de Faraday, un champ électrique $\vec{e}$ est engendré par ce déplacement ;
- ▶ L'aimant est à l'intérieur d'un tube de cuivre, donc conducteur de l'électricité, par la loi d'Ohm le champ électrique correspond alors à un courant électrique dans le tube dont la densité est $\vec{j}$;
- ▶ Par la loi d'Ampère le courant électrique engendre un champ magnétique $\vec{h}_i$; ce champ magnétique génère une force sur l'aimant (cf. planche 10) ;

Cette force s'avère être dans le sens où elle s'oppose au mouvement ; c'est un avatar de la loi (qualitative) de Lenz (explicitée plus loin).

L'explication quantitative mise en œuvre

- ▶ L'explication quantitative de l'observation consiste à calculer à partir des lois de Faraday, d'Ohm et d'Ampère la vitesse constante de l'aimant dans le tube.
- ▶ Elle suppose donc que ces lois soient comprises en profondeur.
- ▶ Et c'est de cela que la suite traite.

Le champ magnétique variable de l'aimant qui se déplace

- Si le centre de l'aimant est $\vec{X}(t)$ et que sa direction d'aimantation est $\vec{d}$ (elle est supposée ne pas varier dans le temps) alors le champ magnétique qu'il génère est pour $|\vec{x} - \vec{X}(t)| > R$:

$$\vec{h}(t, \vec{x}) = \frac{R^3 m}{3 |\vec{x} - \vec{X}(t)|^3} \left(3 \frac{(\vec{d} \cdot (\vec{x} - \vec{X}(t)) (\vec{x} - \vec{X}(t)))}{|\vec{x} - \vec{X}(t)|^2} - \vec{d} \right)$$

- En posant $\vec{y} = \vec{x} - \vec{X}$, $\dot{\vec{X}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\vec{X}(t + \epsilon) - \vec{X}(t)}{\epsilon}$, il vient

$$\partial_t \vec{h} = -\frac{R^3 m}{3} \left(\frac{\vec{y} \left((\dot{\vec{X}} \cdot \vec{d}) |\vec{y}|^2 - 5 (\dot{\vec{X}} \cdot \vec{y}) (\vec{d} \cdot \vec{y}) \right)}{|\vec{y}|^7} + \frac{\dot{\vec{X}} (\vec{d} \cdot \vec{y})}{|\vec{y}|^5} + \frac{(\dot{\vec{X}} \cdot \vec{y}) \vec{d}}{|\vec{y}|^5} \right)$$

Commentaires sur la planche précédente 1/2

- Une première question est de savoir faire ce genre de calculs.
Par exemple le calcul de

$$\frac{d|\vec{x} - \vec{X}(t)|}{dt} = \frac{1}{2 |\vec{x} - \vec{X}(t)|} \frac{d|\vec{x} - \vec{X}(t)|^2}{dt}$$

et comme

$$|\vec{x} - \vec{X}(t)|^2 = \vec{x}^2 + \vec{X}(t)^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{X}(t)$$

$$\frac{d|\vec{x} - \vec{X}(t)|^2}{dt} = 2 \vec{X}(t) \cdot \dot{\vec{X}}(t) - 2\vec{x} \cdot \dot{\vec{X}}(t) = 2 (\vec{X}(t) - \vec{x}) \cdot \dot{\vec{X}}(t)$$

d'où $\frac{d|\vec{x} - \vec{X}(t)|}{dt} = -\frac{(\vec{x} - \vec{X}(t)) \cdot \dot{\vec{X}}(t)}{|\vec{x} - \vec{X}(t)|}$ Et par composition on déduit que

$$\frac{d \left(|\vec{x} - \vec{X}(t)|^{-n} \right)}{dt} = n \frac{(\vec{x} - \vec{X}(t)) \cdot \dot{\vec{X}}(t)}{|\vec{x} - \vec{X}(t)|^{n+2}}$$

Commentaires sur la planche précédente 2/2

- Pour éviter d'écrire $\vec{x} - \vec{X}(t)$ on a posé $\vec{y} = \vec{x} - \vec{X}(t)$. Cela ne va pas plus loin qu'une simple écriture ! En particulier **ce n'est pas un changement de référentiel**.
- En effet dans le référentiel $\mathcal{R}'$ fixe par rapport de l'aimant, le champ qu'il produit ne dépend pas du temps et la relation de Maxwell-Faraday s'écrit $\vec{\nabla} \times \vec{e}'$ (où $\vec{e}'$ est le champ électrique dans $\mathcal{R}'$) ; ajoutée à la loi de Gauss sans sources $\vec{\nabla} \cdot \vec{e}' = 0$ elle conduit à $\vec{e}' = \vec{0}$. Et donc pas de production de champ électrique.
- Il y aura bien sûr quand même un courant électrique dans ce référentiel parce que la loi d'Ohm ne s'y écrit plus $\vec{j}' = \sigma \vec{e}'$ mais $\vec{j}' = \sigma \left(\vec{e}' + \mu_0 \vec{X} \times \vec{h}' \right)$ ($\vec{j}', \vec{b}'$ étant les densités de courant et champ magnétique dans $\mathcal{R}'$).
- Mais comme il s'agit de notions qui ont nécessité la relativité restreinte pour devenir claires on conviendra de repousser leur considérations. . .

Le champ électrique produit par le déplacement de l'aimant

► L'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\nabla} \times \vec{e} = -\mu_0 \partial_t \vec{h}$ a pour solution dans le domaine extérieur à l'aimant, soit $|\vec{y}| > R$ où toujours $\vec{y} = \vec{x} - \vec{X}$,

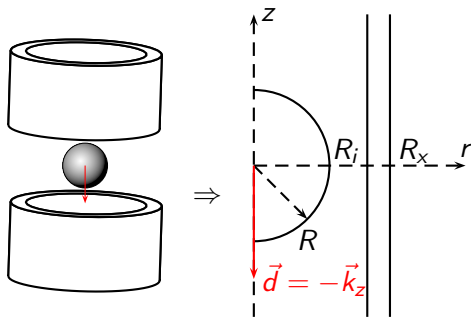
$$\vec{e} = -\frac{R^3 m \mu_0}{3} \left(\frac{(\dot{\vec{X}} \times \vec{d})}{3|\vec{y}|^3} + \frac{(\dot{\vec{X}} \cdot \vec{y})(\vec{d} \times \vec{y})}{|\vec{y}|^5} \right)$$

► Cette solution n'est pas unique. Si on considère le gradient d'un champ scalaire $\vec{\nabla} \phi$ d'un champ scalaire ϕ quelconque alors : puisque $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \psi) = \vec{0}$, une autre solution de Maxwell-Faraday est $\vec{e} + \vec{\nabla} \phi$.

► L'expression de $\vec{e}$ peut se trouver par intégration directe de l'expression du rotationnel ; mais ce serait assez fastidieux. En fait l'expression a été obtenue en introduisant le potentiel vecteur du champ magnétique. Notion qui sera expliquée dans la leçon suivante.

Le courant électrique champ électrique produit par le déplacement de l'aimant dans un tube dans le cas où la direction d'alimentation est dirigée suivant l'axe du tube et où la position du centre de l'aimant est sur cet axe

► Soit



$$\begin{aligned}\vec{y} &= x \vec{k}_x + y \vec{k}_y + z \vec{k}_z \\ &= r \vec{k}_r + z \vec{k}_z\end{aligned}$$

avec

$$\vec{k}_r = \cos \theta \vec{k}_x + \sin \theta \vec{k}_y$$

$$\vec{k}_\theta = -\sin \theta \vec{k}_x + \cos \theta \vec{k}_y$$

et donc

$$x = r \cos \theta ; y = r \sin \theta$$

Le cylindre est donc tel que

$$R_i < r < R_x$$

et l'aimant tel que

$$\sqrt{r^2 + z^2} < R$$

Dans ces circonstances...

► La position de l'aimant est $\vec{X} = -Z \vec{k}_z$, sa vitesse est $\dot{\vec{X}} = -\dot{Z} \vec{k}_z$

► Le champ électrique est $\vec{e} = \frac{R^3 m \mu_0}{3} \frac{\dot{Z} r z}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \vec{k}_\theta$

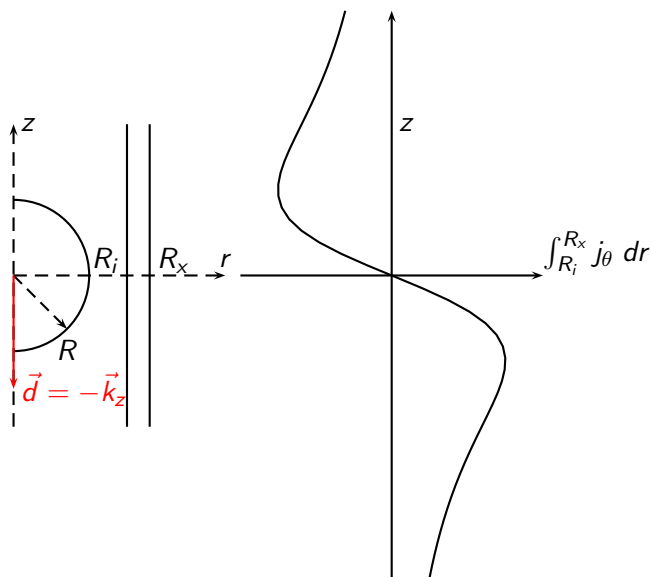
► La loi d'Ohm s'applique dans le tube, elle s'écrit

$$\vec{j} = \begin{cases} \frac{R^3 m \mu_0 \sigma \dot{Z}}{3} \frac{r z}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \vec{k}_\theta & \text{si } R_i < r < R_x \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

soit, en utilisant le moment magnétique $\mathcal{M}$ (cf. planche 7)

$$\vec{j} = \begin{cases} j_\theta \vec{k}_\theta & \text{si } R_i < r < R_x \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } j_\theta = \frac{\sigma \mu_0 \mathcal{M} \dot{Z}}{4 \pi} \frac{r z}{(r^2 + z^2)^{5/2}}$$

La forme du courant dans le tube



Champ magnétique produit par la densité de courants $\vec{j}$

- Le champ magnétique d'une spire circulaire de rayon r parcourue par un courant i prend une forme simple sur l'axe $\vec{k}_z$ et à la position ζ par rapport au plan de la spire (cf. 1ier cycle); c'est

$$\vec{h}_i(\zeta) = \frac{i r^2}{(r^2 + \zeta^2)^{3/2}} \vec{k}_z$$

- En considérant donc que la densité de courant $\vec{j}$ est la superposition de telles spires, donc $a = r$ et $i = j_\theta dr dz$, la position relative de ces spires élémentaires par rapport au centre de l'aimant est z . Et donc en sommant les contributions, le champ magnétique sur l'axe est

$$\vec{h}_i(\zeta \vec{k}_z) = \frac{\sigma \mu_0 \mathcal{M} \dot{Z}}{4 \pi} \vec{k}_z \int_{R_i}^{R_x} dr \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{r z}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \frac{r^2}{(r^2 + (\zeta - z)^2)^{3/2}}$$

Coénergie magnétique et force sur l'aimant

- Le champ magnétique en $\zeta = 0$ qui correspond au centre de l'aimant est

$$\vec{h}_i(\vec{0}) = \frac{\sigma \mu_0 \mathcal{M} \dot{Z}}{4 \pi} \vec{k}_z \int_{R_i}^{R_x} dr \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{r z}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^2)^{3/2}} = \vec{0}$$

La coénergie magnétique est donc (cf. planche 10) $\overline{W} = 0$

- Mais la force que le champ magnétique $\vec{h}_i$ exerce sur l'aimant est

$$\vec{f} = \mu_0 \mathcal{M} \left(-\vec{k}_z \right) \cdot \left. \frac{d}{d\zeta} \left(\vec{h}_i \right) \right|_{\text{en } \zeta=0}$$

soit

$$\vec{f} = \mu_0 \mathcal{M} \frac{\sigma \mu_0 \mathcal{M} \dot{Z}}{4 \pi} \frac{5\pi}{128} \left(\frac{1}{R_i^3} - \frac{1}{R_x^3} \right) = \frac{5 \sigma (\mu_0 \mathcal{M})^2 \dot{Z}}{512} \left(\frac{1}{R_i^3} - \frac{1}{R_x^3} \right)$$

Comparaison avec l'expérience

- Avec les données ($\mathfrak{M}$ est la masse de l'aimant) :

m (kA/m)	R (mm)	R_i (mm)	R_x (mm)	σ (kS/m)	$\mathfrak{M}$ (g)
0.8	6	4.5	5.5	59.6	8.1

et en supposant que la force $\vec{f}$ la force de pesanteur $-\mathfrak{M} g \vec{k}_z$ le mouvement de l'aimant est uniforme de vitesse

$$\dot{Z} = 3.3 \text{ cm/s}$$

Il faut donc un temps de 13 s pour que l'aimant fasse une chute de 44 cm dans le tube.

- **Hélas le temps obtenu par l'expérience est de 6 s !** La vitesse correspondante est donc près de 2 fois celle qui est estimée par ce modèle.

Explication des écarts entre expérience et modèle

- Si on admet que la direction d'aimantation est dirigée suivant l'axe du tube, il reste que tous les champs électrique et magnétiques n'ont pas été considérés.

En effet le champ $\vec{h}_i$ dépend du temps, il produit par Maxwell-Faraday un champ électrique $\vec{e}_i$ ($\vec{\nabla} \times \vec{e}_i = -\mu_0 \partial_t \vec{h}_i$); ce champ $\vec{e}_i$ participe à la production d'un courant électrique $\vec{j}_i$ par la loi d'Ohm ($\vec{j}_i = \sigma \vec{e}_i$); et ce courant $\vec{j}_i$ produit un champ magnétique $\vec{h}_{ji}$ par Maxwell-Ampère ($\vec{\nabla} \times \vec{h}_{ji} = \vec{j}_i$).

Les conséquences sont que :

- d'une part $\vec{h}_{ji}$ agit sur l'aimant et modifie la force due à la présence du tube conducteur ;
 - et d'autre part comme $\vec{h}_{ji}$ dépend également du temps il génère encore d'autres champs comme on l'a expliqué pour $\vec{h}_i$.
-
- De toute façon la direction d'aimantation a une dynamique plus complexe que de rester sagement alignée sur l'axe.

Conclusion de la leçon

- ▶ La leçon a permis de mettre en œuvre les relations de Maxwell-Faraday, Maxwell-Ampère et la loi d'Ohm sur un exemple concret.
- ▶ Cette mise en œuvre s'est avérée un peu trop approximative pour conduire à un résultat quantitativement acceptable (il l'est qualitativement dans la mesure où on obtient l'ordre de grandeur de la vitesse de l'aimant dans le tube).
- ▶ Il est donc nécessaire de progresser dans la mise en œuvre ces lois. Et c'est l'objectif de la leçon suivante qui procédera plutôt synthétiquement qu'analytiquement comme dans cette leçon.

Exercice : les unités

- Donner les unités des : densité d'aimantation $\vec{m} = m \, vd$, moment magnétique $\mathcal{M}$, champ magnétique $\vec{h}$, perméabilité magnétique du vide μ_0 , champ électrique $\vec{e}$, densité de courant $\vec{j}$.
- Établir des correspondances entre unités à partir des relations de Maxwell-Ampère $\vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{j}$, Maxwell-Faraday $\vec{\nabla} \times \vec{e} = -\mu_0 \partial_t \vec{h}$, loi d'Ohm $\vec{j} = \sigma \vec{e}$.
- Relier les relations et loi précédentes aux relations donnant la correspondance entre tension aux bornes et courant dans des dipôles au sens du circuit électrique (résistance, inductance, capacité). Notamment lequel de ces dipôles est absent ici ?

Exercice : les opérateurs

- On utilise les opérateurs : dérivée partielle par rapport au temps (∂_t) ; gradient d'un champ scalaire ϕ ($\vec{\nabla}\phi$) ; divergence d'un champ de vecteurs $\vec{a}$ ($\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$) ; rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{a}$ ($\vec{\nabla} \text{ times } \vec{a}$).

Écrire leurs expressions en coordonnées cartésiennes.

- $\vec{\nabla}$ s'appelle le vecteur symbolique de dérivation de Hamilton. Il peut être écrit dans une base orthonormée ($\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z$)

$$\vec{\nabla} = \partial_x \vec{k}_x + \partial_y \vec{k}_y + \partial_z \vec{k}_z$$

Se rendre compte qu'appliquer les opérations vectorielles algébriques produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ($\vec{a} \cdot \vec{b}$) et produit vectoriel de ces vecteurs ($\vec{a} \times \vec{b}$) au cas où un de ces vecteurs est $\vec{\nabla}$ et l'autre un champ de vecteurs conduit, *mutatis mutandis*, aux expressions correctes de la divergence et du rotationnel. Que se passe-t-il pour le gradient d'un champ scalaire ?