

Électromagnétisme



Équations de Maxwell des basses fréquences Présentation formelle

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

4 décembre 2017

Objectifs

- ▶ Construire la formulation en potentiels vecteur magnétique et scalaire électrique du modèle électromagnétique des basses fréquences ;
- ▶ La question du mouvement en présence de champs variable n'est pas abordée ;
- ▶ Il s'agit essentiellement de comprendre le modèle de chauffage par induction longitudinal dans sa structure. Notamment la question de l'effet Kelvin n'est pas abordée (elle le sera dans la leçon suivante).

Équations de Maxwell dans l'hypothèse des basses fréquences et sans diélectriques et avec charges liées

$$\begin{array}{lll} \vec{e} : \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \text{Champs électriques} & E_3(V/m) \\ (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{e}(t, \vec{x}) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \vec{h} : \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \text{Champs magnétiques} & E_3(A/m) \\ (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{h}(t, \vec{x}) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \vec{b} : \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \text{Inductions magnétiques} & E_3(T) \\ (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{b}(t, \vec{x}) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \vec{j} : \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \text{Densités de courant électrique} & E_3(A/m^2) \\ (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{j}(t, \vec{x}) \text{ tel que } \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \end{array}$$

sont liés en tout point $\vec{x}$ de l'espace et en tout temps t par

$$\left\{ \begin{array}{lll} \vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{j} & \text{Ampère (sans Maxwell)} & E_3(A/m^2) \\ \vec{\nabla} \times \vec{e} = -\partial_t \vec{b} & \text{Maxwell-Faraday} & E_3(V/m^2 = T/s) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 & \text{Conservation de l'induction magnétique} & E_3(T/m) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{e} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Gauss (sans charges)} & \mathbb{R}(Cb/m^3) \end{array} \right.$$

Relations magnétique & loi d'Ohm

- Les équations de Maxwell ne sont pas suffisantes pour déterminer $\vec{e}$, $\vec{b}$, $\vec{h}$, ρ en fonction de $\vec{j}$; et d'ailleurs $\vec{j}$ n'est pas nécessairement une donnée.
- Il faut leur adjoindre les : **relation magnétique** (entre $\vec{b}$ et $\vec{h}$) et **loi d'Ohm** (entre $\vec{j}$ et $\vec{e}$).
- Ces relations lient algébriquement d'une part $\vec{b}$ et $\vec{h}$ et d'autre part $\vec{j}$ et $\vec{e}$ entre eux mais elle ne sont en général pas valable uniformément dans l'espace. Par exemple, pour la loi d'Ohm, on écrit

$$\vec{j} = \sigma \vec{e}$$

mais c'est seulement dans les parties de l'espace où la conductivité électrique est σ . Ailleurs c'est autre chose, par exemple

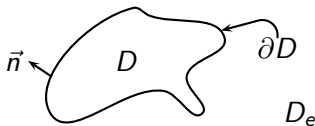
$$\vec{j} = \vec{0}$$

dans les parties de l'espace qui ne conduisent pas l'électricité.

- Ce qui demande quelques conventions préalables pour nommer les parties de l'espace.

Conventions pour nommer les domaines de l'espace

- Un **domaine** de l'espace est une partie de l'espace qui correspond à la notion d'ouvert en mathématique. C'est un ensemble de points tels que chacun d'entre eux est entouré par des points appartenant encore au domaine.
- Si un domaine D est considéré, il a un complémentaire D_e dans l'espace E_3 qui est encore un domaine



et les points du **bord** de D , qui coïncident avec les points du bord de D_e , n'appartiennent ni à D ni à D_e . **Ce bord est noté ∂D .**

- Le bord ∂D est une surface qu'on suppose lisse. Et donc il est possible d'associer à chaque point de cette surface un **vecteur normal $\vec{n}$ dirigé vers l'extérieur de D** ; l'application

$\vec{n} : \vec{x} \in \partial D \longrightarrow \vec{n}$ est appelée un champ de normales extérieures sur ∂D .

Relation magnétique

► Un domaine D de l'espace est supposé magnétique, son complémentaire ne l'étant pas. Cela signifie que la relation entre $\vec{b}$ et $\vec{h}$ est

$$\vec{b} = \begin{cases} \mu_0 (\vec{h} + \vec{m}) & \text{dans } D \text{ (i.e. en } \vec{x} \text{ avec } \vec{x} \in D) \\ \mu_0 \vec{h} & \text{sinon} \end{cases}$$

► $\vec{m}$ s'appelle l'aimantation. Cette aimantation peut être un vecteur donné rigidement lié à la matière de D ; cette matière est alors un aimant (uniformément aimanté) ;

► Mais également un champ de vecteur relié au champ magnétique $\vec{h}$ par $\vec{m} = \chi \vec{h}$; cette matière est alors dite : paramagnétique si $\chi > 0$ mais χ assez faible ; diamagnétique si $\chi < 0$ (et toujours assez faible, en tout cas $\chi > -1$).

Cette relation correspond également à une approximation d'un comportement appelé ferromagnétisme dans laquelle χ est pris très grand.

Loi d'Ohm des milieux immobiles & courants imposés

► Un domaine de l'espace est supposé conducteur de l'électricité, son complémentaire ne l'étant pas. Le domaine est immobile. Cela signifie que la relation entre $\vec{j}$ et $\vec{e}$ est

$$\vec{j} = \begin{cases} \sigma \vec{e} & \text{dans } D \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

où σ est appelée la conductivité électrique (c'est l'inverse de la résistivité électrique).

► Il y a également des situations dans lesquelles un domaine conducteur de l'espace D_s est parcouru par un courant dont la densité $\vec{j}_0$ est connue. Dans ce cas on n'écrit pas la loi d'Ohm dans ce domaine mais

$$\vec{j} = \begin{cases} \vec{j}_0 & \text{dans } D_s \\ \text{autre chose} & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Densité de courant connue : courant et support du courant

- Une densité de courant est connue quand elle se met sous la forme

$$\vec{j}_s = i \vec{u}$$

où i est le courant global (un nombre) correspondant à cette densité et $\vec{u}$ son support auquel on demande d'être : défini sur tout l'espace (quitte à être nul par endroits), à divergence et rotationnel nuls dans le domaine D où $|\vec{u}| \neq 0$ et à flux nul sur le bord de ce domaine.

- Typiquement c'est la densité de courant de la spire circulaire dans l'exercice qui suit.
- La densité de courant connue peut contenir plusieurs courants et alors pour N courants elle s'écrit alors

$$\vec{j}_s = \sum_{n=1}^N i_n \vec{u}_n$$

où les i_n sont les courants et les $\vec{u}_n$ leurs supports.

Exercice : Courant et support dans une spire axisymétrique

- En coordonnées cylindriques, la position est $\vec{x} = r \vec{k}_r + z \vec{k}_z$ avec

$$\vec{k}_r = \cos \theta \vec{k}_x + \sin \theta \vec{k}_y \quad ; \quad \vec{k}_\theta = -\sin \theta \vec{k}_x + \cos \theta \vec{k}_y$$

Un champ de vecteurs s'exprime comme $\vec{u} = u_r \vec{k}_r + u_\theta \vec{k}_\theta + u_z \vec{k}_z$ où les u_r , u_θ , u_z sont des fonctions des r , θ , z . Ses divergence et rotationnel s'écrivent

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= \frac{\partial_r (r u_r)}{r} + \frac{\partial_\theta u_\theta}{r} + \partial_z u_z \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{aligned} &\frac{\partial_\theta u_z}{r} - \partial_z u_\theta && \vec{k}_r \\ &+ \frac{\partial_z u_r - \partial_r u_z}{r} && \vec{k}_\theta \\ &+ \frac{\partial_r (r u_\theta)}{r} - \frac{\partial_\theta u_r}{r} && \vec{k}_z \end{aligned} \end{aligned}$$

- Une spire à section quelconque est définie comme $\vec{x}$ tel que $f(r, z) < 0$ (pour la section circulaire $f(r, z) = r^2 + (z - R)^2 - a^2$ où R est le rayon de la fibre moyenne et a le rayon de la section).
- Trouver le support $\vec{u}$ d'un courant parcourant la spire.

Correction

- C'est $\vec{u} = \vec{k}_\theta \begin{cases} \frac{\alpha}{r} & \text{pour } f(r, z) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ avec $\alpha = \int_{f(r, z) < 0} \frac{dr \, dz}{r}$
- D'une part $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ et d'autre part si on pose $\vec{j}_s = i \vec{u}$ le flux de $\vec{j}$ à travers une surface $\forall \theta : f(r, z) < 0$ est i qui est le courant global.
- Pour une spire à section circulaire $f(r, z) = r^2 + (z - R)^2 - a^2$

$$\alpha = \frac{1}{r \, 2\pi (R - \sqrt{R^2 - a^2})} \quad \left(\approx \frac{1}{\pi a^2} \text{ si } a \ll R \right)$$

Système des équations de Maxwell, des relation magnétique et loi d'Ohm dans des domaines immobiles dans l'hypothèse des basses fréquences sans diélectrique et avec charges liées

► Trouver $\vec{b}$, $\vec{h}$, $\vec{e}$ tels que

$$\vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{j} \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{e} = -\partial_t \vec{b} \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{e} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

avec

$$\vec{b} = \mu (\vec{h} + \vec{m}_s) \quad ; \quad \vec{j} = s \vec{e} + \vec{j}_s$$

où

$$\begin{array}{llll} \mu & : & E_3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \vec{x} & \longrightarrow \mu(\vec{x}) \\ \vec{j}_s & : & E_3 & \longrightarrow E_3(A/m^2) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow \vec{j}_s(\vec{x}) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{llll} s & : & E_3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \vec{x} & \longrightarrow s(\vec{x}) \\ \vec{m}_s & : & E_3 & \longrightarrow E_3(A/m) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow \vec{m}_s(\vec{x}) \end{array}$$

sont des données (voir planche suivante).

Forme des données

- ▶ μ , la fonction de perméabilité, et s , la fonction de conductivité, sont des fonctions constantes par morceaux ; c'est à dire que chacune d'entre elles on donne un jeu de domaines $D_1, D_2, \dots, D_N$ dont la somme recompose $E_3 = D_1 + D_2 + \dots + D_N$ (aux bords des domaines près) et sur chaque domaine la fonction considérée (μ ou s) prend des valeurs constantes.
- ▶ $\vec{m}_s$, l'aimantation source, est un champ de vecteurs constant par morceaux au sens précédent ;
- ▶ $\vec{j}_s$, la densité de courants source, est un champ de vecteurs à divergence nulle qui n'est pas constant par morceau mais est discontinu tangentiellement à la frontière entre le domaine où il n'est pas nul (on appelle ce domaine le support) et celui où il s'annule.

Les potentiels électrodynamiques : lemmes de Poincaré

- Le système des équations de Maxwell muni de la relation magnétique et de la loi d'Ohm apparaît sous la forme de relations différentielles du premier ordre et de relations algébriques. Certaines approches modernes permettent de l'analyse sous cette forme mais traditionnellement on le fait en introduisant les potentiels électrodynamiques, ce qui sera la voie utilisée ici.
- L'introduction de ces potentiels s'appuie sur les lemmes globaux de Poincaré :

Un champ à rotationnel nul dans tout E_3 est un champ potentiel

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0} \implies \exists \varphi \text{ tel que } \vec{u} = \vec{\nabla} \varphi$$

φ est appelé le potentiel scalaire du champ de vecteurs $\vec{u}$

Un champ à divergence nulle dans tout E_3 est un champ rotationnel

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \implies \exists \vec{v} \text{ tel que } \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

$\vec{v}$ est appelé le potentiel vecteur du champ de vecteurs $\vec{u}$;

Les potentiels électrodynamiques : lemmes de Poincaré (suite)

- Le potentiel scalaire électrique est défini à une constante près ; en convenant qu'il tende vers 0 à l'infini cette constante vaut 0, d'où l'unicité du potentiel scalaire d'un champ à rotationnel nul. Donc

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0} \implies \exists ! \varphi \text{ tel que } \vec{u} = \vec{\nabla} \varphi \text{ et } \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \varphi = 0$$

- Comme le rotationnel d'un gradient est nul, le potentiel vecteur n'est pas défini de façon unique. Mais si on donne comme contrainte à ce potentiel vecteur d'être à divergence nulle on obtient l'unicité et qu'en plus on lui impose de tendre vers 0 à l'infini. Donc

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \implies \exists ! \vec{v} \text{ tel que } \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{v} ; \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 ; \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{v}| = 0$$

Les potentiels électrodynamiques

- Ainsi de $\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$ vient l'existence du **potentiel vecteur magnétique** $\vec{a}$ tel que

$$\vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$$

et ce potentiel vecteur magnétique est défini de façon unique s'il disparaît à l'infini et

$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$ Ce qui est appelé la jauge de Coulomb

- La relation de Maxwell-Faraday $\vec{\nabla} \times \vec{e} = -\partial_t \vec{b}$ devient alors $\vec{\nabla} \times (\vec{e} + \partial_t \vec{a}) = \vec{0}$ d'où est déduit l'existence du **potentiel scalaire électrique** φ tel que

$$\vec{e} = -\partial_t \vec{a} - \vec{\nabla} \varphi$$

- Les potentiels scalaire électrique φ et vecteur magnétique $\vec{a}$ sont appelés les potentiels électrodynamiques. Il est possible de formuler les problèmes d'électromagnétisme des basses fréquences à partir d'eux seuls.

Formulation en potentiels

- Les relations d'Ampère $\vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{j}$, magnétique $\vec{b} = \mu (\vec{h} + \vec{m}_s)$ et la loi d'Ohm $\vec{j} = s \vec{e} + \vec{j}_s$ se regroupent comme

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{m}_s \right) = -s (\partial_t \vec{a} + \vec{\nabla} \varphi) + \vec{j}_s$$

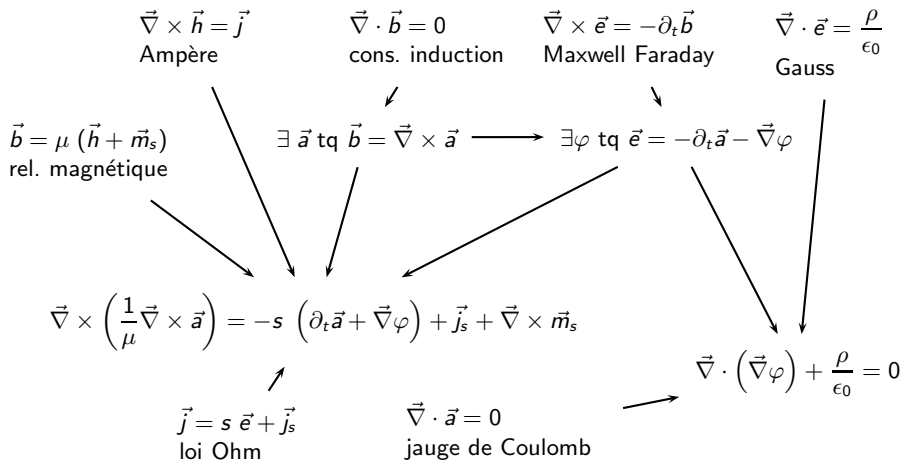
- La loi de Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{e} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ devient

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\partial_t \vec{a} + \vec{\nabla} \varphi \right) + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Mais du fait de la jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$ cette relation se réduit à

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Formulation en potentiels : synoptique



La relation amont d'une flèche est utilisée pour obtenir la relation aval ; les relations sur lesquelles ne pointent aucune flèche sont celles qui sont données *a priori*.

Système formulé en potentiels

► Le modèle de calcul formulé en potentiel vecteur magnétique $\vec{a}$ et potentiel scalaire électrique φ est

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) + s \left(\partial_t \vec{a} + \vec{\nabla} \varphi \right) &= \vec{j}_s + \vec{\nabla} \times \vec{m}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \varphi \right) + \frac{\rho}{\epsilon_0} &= 0 \end{cases}$$

où il s'agit de calculer $\vec{a}$, φ , ρ à partir des données $\vec{j}_s$, $\vec{m}_s$, μ , s .

► Comme ce système contient la dérivée temporelle de $\vec{a}$, il conviendrait de lui ajouter une condition initiale comme par exemple

$$\vec{a}(t = 0, \vec{x}) = \vec{0}$$

mais on va se limiter en fait aux cas où $\vec{j}_s$ est un champ dépendant périodiquement du temps, où $\vec{m}_s$ n'existe pas et où on ne s'intéresse pas au régime transitoire : donc $\vec{a}$ et φ seront les solutions dépendant périodiquement du temps.

Le régime sinusoïdal établi

► La densité de courant source étant $\vec{j}_s = i \vec{u}$, on suppose que i est une variable dépendante du temps et cela sinusoïdalement, soit

$$i(t) = \sqrt{2} \Re\{\underline{i} \exp^{j \omega t}\}$$

ou $j = \sqrt{-1}$, $\Re\{.\}$ signifie 'partie réelle de', $\omega = 2 \pi f$ la pulsation associée à la fréquence f et $\underline{i}$ l'amplitude efficace complexe. La densité de courant peut alors être écrite

$$\vec{j}_s = \sqrt{2} \Re\{\underline{j}_s \exp^{j \omega t}\} \text{ avec } \underline{j}_s = \underline{i} \vec{u}$$

$\underline{j}_s$ est un champ de vecteurs à valeurs complexes qu'on appelle l'amplitude efficace de la densité de courant source.

► Bien entendu cela reste valable dans le cas où il y a plusieurs courants $\vec{j} = \sum_{n=1}^N i_n \vec{u}_n$ pourvu que leurs dépendances en temps soient à la même fréquence f (en particulier c'est valable quand les courants forment un système polyphasé).

Le régime sinusoïdal établi (suite)

► Le régime sinusoïdal établi correspond à l'hypothèse que $\vec{a}$ comme φ dépendent sinusoïdalement du temps, soit donc

$$\vec{a} = \sqrt{2} \{ \underline{\vec{a}} \exp^{j \omega t} \} ; \varphi = \sqrt{2} \{ \underline{\varphi} \exp^{j \omega t} \}$$

où $\underline{\vec{a}}$ est un champ de vecteurs à valeurs complexes appelé l'amplitude efficace complexe du potentiel vecteur magnétique ; $\underline{\varphi}$ est un champ de scalaire à valeur appelé l'amplitude efficace complexe du potentiel scalaire électrique.

► On a

$$\partial_t \left(\sqrt{2} \Re \{ \underline{\vec{a}} \exp^{j \omega t} \} \right) = \sqrt{2} \Re \{ j \omega \underline{\vec{a}} \exp^{j \omega t} \}$$

ce qui se voit en remplaçant

$$\Re \{ \underline{\vec{a}} \exp^{j \omega t} \} = \frac{\underline{\vec{a}} \exp^{j \omega t} + (\underline{\vec{a}} \exp^{j \omega t})^*}{2}$$

où * signifie 'complexe conjugué' et en procédant algébriquement.

Le régime sinusoïdal (ter)

► On obtient alors

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j \omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) & = \underline{\vec{j}}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} & = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) + \frac{\rho}{\epsilon_0} & = 0 \end{cases}$$

après avoir remarqué que, par exemple,

$$\Re \left\{ \left(\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j \omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) - \underline{\vec{j}}_s \right) \exp^{j \omega t} \right\} = 0$$

doit être vrai à tout temps : donc en particulier à $t = 0 \Rightarrow \exp^{j \omega t} = 1$; à $t = \pi/(2\omega) \Rightarrow \exp^{j \omega t} = j$. Les parties réelles et imaginaire de l'amplitude étant nulles, il faut que celle-ci le soit.

Quelques remarques sur le calcul effectif de $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\varphi}$, $\underline{\rho}$

- ▶ Dans la majeure partie des cas on ne connaît pas de solution analytique, aussi faut-il se limiter à des calculs numériques. Ceux-ci sont généralement faits par la méthode des éléments finis dont l'explication dépasse les objectifs de la leçon.
- ▶ Toutefois les résultats qu'un logiciel de calcul permet d'obtenir ne dépassent pas lui ces objectifs !
- ▶ On suppose donc disposer d'un tel logiciel et la suite de la leçon porte sur l'analyse des résultats qu'il fournit.
- ▶ Pour discuter de ces résultats on introduit les amplitudes complexes de l'induction magnétique, du champ électrique et de la densité de courants électriques qui sont telles que

$$\underline{\vec{b}} = \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}; \underline{\vec{e}} = -j \omega \underline{\vec{a}} - \vec{\nabla} \underline{\varphi}; \underline{\vec{j}} = s \underline{\vec{e}}$$

Le rôle de la densité de charges liées $\underline{\rho}$ et du potentiel scalaire électrique

► C'est technique pour la modélisation mais assez simple à comprendre globalement !

► Si la fonction de conductivité est $s = \begin{cases} \sigma & \text{dans } D \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ on s'attend à ce que le courant circulant dans D du fait que ce domaine conduit l'électricité ne corresponde pas à un flux de charges électriques qui sortiraient de ce domaine. Pour que cela n'arrive pas il faut que

$$\underline{\vec{j}} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D$$

► Et ce ne serait pas garanti si le potentiel scalaire électrique et la densité de charges liées n'avaient pas été prises en compte dans le modèle. Ceci dit dans les cas axisymétrique et en géométrie 2D droite il sont vraiment nuls.

Puissances apparentes, active et réactive

► Supposons la densité de courants sources de la forme $\vec{j}_s = \underline{j} \vec{u}$, il vient alors

$$\underline{j} \vec{u} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j \omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right)$$

Faisons le produit scalaire de cette identité par $(j \omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi})^*$ et intégrons le résultat sur tout l'espace, il vient alors

$$\underbrace{\underline{j} \int_{E_3} \vec{u} \cdot (j \omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi})^* dV}_{= \underline{S}^*} = \underbrace{\int_{E_3} s (j \omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi}) \cdot (j \omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi})^* dV}_{= P} + \underbrace{\int_{E_3} \left(\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) \right) \cdot (j \omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi})^* dV}_{= -j Q}$$

soit

$$\underline{S}^* = P - j Q$$

Puissance active : P

► Si $s = \begin{cases} \sigma & \text{dans } D \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ alors

$$P = \int_D \sigma \left| j \omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right|^2 dV = \int_D \sigma |\underline{\vec{e}}|^2 dV = \int_D \frac{|\underline{\vec{j}}|^2}{\sigma} dV$$

P apparaît comme un terme positif qui somme les contributions de $|\underline{\vec{j}}|^2/\sigma$ sur le domaine conducteur D .

► D'autre part en chaque point $\vec{x}$, $\vec{j} = \frac{\delta i}{\delta S} \vec{d}$ où δi est le courant électrique qui traverse la surface δS dont $\vec{d}$ est la normale. Et donc, si $dV = \delta S \delta l$

$$\frac{|\underline{\vec{j}}|^2}{\sigma} dV = \frac{1}{\sigma} \frac{\delta l}{\delta S} |\delta i|^2$$

qu'on reconnaît être la puissance calculée avec la formule élémentaire de la résistance $(1/\sigma \delta l/\delta S)$ d'un courant δi traversant un tronçon de cylindre de longueur δl et de surface δS .

Ce qui légitime d'appeler P la puissance active : c'est la puissance Joule injectée au domaine conducteur D .

Puissance réactive : Q

► Avec la formule $\int_{E_3} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \, dV = \int_{E_3} \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{w}) \, dV$ (cf. cours de mathématiques) Q se transforme comme

$$Q = \omega \int_{E_3} \frac{|\vec{b}|^2}{\mu} \, dV$$

► Son interprétation physique dans le contexte des amplitudes complexes est assez difficile si on souhaite éviter de raconter des âneries , aussi Q sera-t-elle appelée **Puissance réactive** sans plus de justifications.

Puissance apparente & tension source

- Si $D_s = \{\vec{x} \text{ tel que } |\vec{u}| \neq 0\}$ est le domaine du courant source, $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ sur ∂D_s et donc

$$\underline{S} = \left(\int_{D_s} (j \omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi}) \cdot \vec{u} dV \right) \underline{i}^*$$

- On appelle tension source

$$\underline{V} = \int_{D_s} (j \omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi}) \cdot \vec{u} dV = - \int_{D_s} \underline{\vec{e}} \cdot \vec{u} dV$$

c'est la force électromotrice qui génère le courant $\underline{i}$.

Impédance

- L'interprétation des résultats de calcul conduit à

$$\underline{V} \underline{i}^* = P + j Q$$

qui permet d'écrire

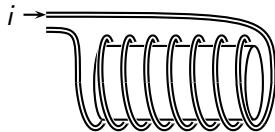
$$\underline{V} = \left(\frac{P}{|\underline{i}|^2} + j \frac{Q}{\omega |\underline{i}|^2} \omega \right) \underline{i}$$

et donc de définir l'impédance

$$Z = R + j L \omega \text{ avec } R = \frac{P}{|\underline{i}|^2} = \Re \left\{ \frac{\underline{V}}{\underline{i}} \right\} ; L = \frac{Q}{\omega |\underline{i}|^2} = \Im \left\{ \frac{\underline{V}}{\underline{i}} \right\}$$

Exercice : Chauffage par induction longitudinal

- On place une billette axisymétrique conductrice de l'électricité dans un inducteur comme représenté ci-dessous

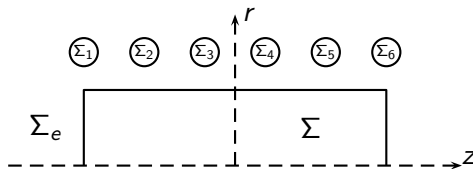


- Il s'agit d'écrire un modèle permettant de calculer l'impédance du dispositif en fonction : de la géométrie (nombre de tours de l'enroulement inducteur, disposition de ces tours, rayon et longueur de la billette, valeur des conductivité et perméabilité magnétique de sa matière).

Pour cela on choisit un modèle axisymétrique, ce qui suppose de réaliser quelques approximations sur la géométrie de l'inducteur.

Correction

- Géométrie : avec l'approximation suggérée, le domaine de calcul est



où $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ se décompose en Σ_n , les sections des N composantes de l'inducteur (ici $N = 6$) ; Σ la section de la charge et Σ_e celle du reste du domaine de calcul.

- Densité de courant source

$$\vec{j}_s = \begin{cases} i/(r \chi) & \text{dans les } \Sigma_n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{avec } \chi = \int_{\Sigma_1} \frac{dr \, dz}{r}$$

Correction

- Conductivité électrique d et perméabilité magnétique μ

$$s = \begin{cases} \sigma & \text{dans } \Sigma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ; \mu(r, z) = \begin{cases} \mu_0 \mu_r & \text{dans } \Sigma \\ \mu_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Potentiel vecteur magnétique (amplitude complexe de la composante orthoradiale) $\underline{a}$ est solution de

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \mu} \frac{\partial(r \underline{a})}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r \mu} \frac{\partial(r \underline{a})}{\partial z} \right) + \underline{j}_s - j \omega s \underline{a} = 0$$

- Tension source

$$\underline{v} = \frac{2 \pi}{\chi} \sum_{n=1}^N \int_{\Sigma_n} j \omega \underline{a} \, dr \, dz$$

La tension aux bornes de l'inducteur est la somme de chacune des tensions des spires qui le composent (l'amenée de courant est négligée).