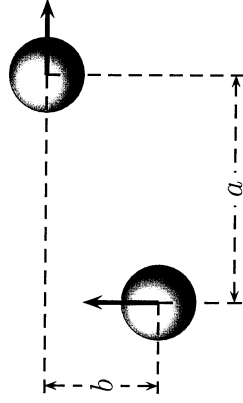


Informations : Documents et calculatrices interdites – 10mn

On donne deux aimants identiques dont les directions d'aimantation et la position relative sont indiquées sur le dessin



- Calculer l'énergie d'interaction.
- Calculer la force que les aimants exercent l'un sur l'autre.
- Calculer le couple que les aimants exercent l'un sur l'autre.

- La relation d'Ampère est $\nabla \times \vec{h} = \vec{j}$. Permet-elle d'écrire que le champ magnétique $\vec{h}$ est le potentiel vecteur de la densité de courant $\vec{j}$?
- Quelle condition sur $\vec{j}$ seul impose-t'elle ?
- On suppose que l'espace est vide à l'exception de la boule $\mathcal{B}$ des $\vec{x}$ tels que $|\vec{x}| < R$ qui est composée d'un matériau conducteur de l'électricité. Quelle relation y-a-t-il entre la densité de courant et le champ électrique dans $\mathcal{B}$? Que vaut la densité de courant à l'extérieur de $\mathcal{B}$?
- Écrire la relation de Maxwell-Faraday.

Rappels

Champ magnétique d'un aimant d'intensité d'aimantation m , de rayon R , centré sur l'origine, de direction d'aimantation $\vec{d}$ à la position $\vec{x}$

$$\vec{h} = m \begin{cases} -\frac{1}{3} \frac{\vec{d}}{R^3} & \text{pour } |\vec{x}| < R \\ \frac{3}{3} \frac{(\vec{d} \cdot \vec{x}) \vec{x}}{|\vec{x}|^3} - \vec{d} & |\vec{x}| > R \end{cases}$$

Énergie d'interaction d'un aimant dont le centre est en $\vec{X}$ en présence d'un champ magnétique extérieur $\vec{h}_s$ ($\mathcal{M} = 4/3 \pi R^3 m$)

$$\overline{W} = \mu_0 \mathcal{M} \vec{d} \cdot \vec{h}_s(\vec{X})$$

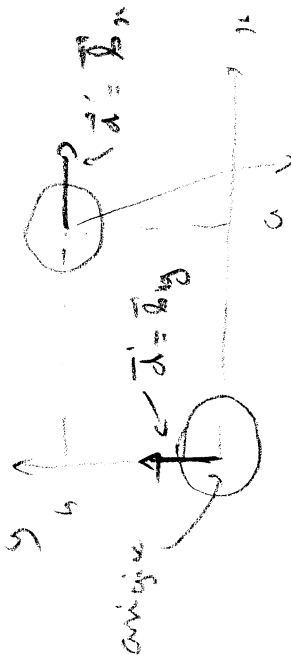
Force et couple exercés sur l'aimant

$$\vec{f} = \vec{\nabla}_{\vec{X}} \overline{W} = \partial_x \overline{W} \vec{k}_x + \partial_y \overline{W} \vec{k}_y + \partial_z \overline{W} \vec{k}_z$$

$$\vec{\gamma} = \mu_0 \mathcal{M} \vec{d} \times \vec{h}_s(\vec{X})$$

a) - b) - c)

Faire un dessin



le centre de l'aimant
est en $a \vec{e}_x + b \vec{e}_y = \vec{x}$

$$a) \vec{B}(\vec{x}) = \text{champ en } \vec{x}$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu R^3}{3 |\vec{x}|^3} \left(3 \frac{(\vec{x} \cdot \vec{x}) \vec{x}}{|\vec{x}|^2} - \vec{x} \right)$$

$$= \frac{\mu}{4\pi (a^2 + b^2)^{3/2}} \left[3 \frac{b (a \vec{e}_x + b \vec{e}_y)}{a^2 + b^2} - \vec{e}_y \right]$$

$$= \frac{\mu}{4\pi (a^2 + b^2)^{3/2}} \left[3ab \vec{e}_x + (2b^2 - a^2) \vec{e}_y \right]$$

$$\vec{W} = \mu_0 \mu \vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x})$$

$$= \frac{\mu_0 \mu^2}{4\pi} \frac{3ab}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

b) $\vec{J} = \nabla \vec{x} \cdot \vec{W}$ et ici les coordonnées sont
a selon $\vec{e}_x$, b selon $\vec{e}_y$ et disons $\vec{e}_z$
selon $\vec{e}_z$

$$\text{donc } \vec{J} = \frac{\partial \vec{W}}{\partial a} \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{W}}{\partial b} \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{W}}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{on } \vec{W} = \frac{\mu_0 \mu^2}{4\pi} \frac{3ab}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{W}}{\partial a} = \frac{3\mu_0 \mu^2}{4\pi} \left[\frac{b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} - 5 \frac{a^2 b}{(a^2 + b^2)^{5/2}} \right]$$

$$= \frac{3\mu_0 \mu^2}{4\pi} b \frac{(b^2 - 4a^2)}{(a^2 + b^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial b} = \frac{3\mu_0 \mu^2}{4\pi} a \frac{(a^2 - 5b^2)}{(a^2 + b^2)^{5/2}}$$

(on permute a et b
dans l'ordre de la signification
entre a et b des $\vec{W}$)

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial z} = 0 \quad (\text{pas de } z)$$

$$\vec{J} = - \frac{3\mu_0 \mu^2}{4\pi (a^2 + b^2)^{3/2}} \left[b(4a^2 - b^2) \vec{e}_x + a(4b^2 - a^2) \vec{e}_y \right]$$

$$c) \vec{\mathcal{E}} = \mu_0 M \vec{J}' \times \vec{R}'(\vec{x})$$

$$= \frac{\mu_0 M^2}{4\pi} \frac{2b^2 - a^2}{(a^2 + b^2)^{5/2}} \vec{R}_3$$

$$d) \text{ Si } \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{J}, \quad \vec{R}$$

al' hier le potentiel vectoriel de $\vec{J}$

$$e) \text{ Si } \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{J} \text{ alors}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

$$f) \vec{J} = \begin{vmatrix} \sigma \vec{E} \\ 0 \end{vmatrix} \text{ ds } B \text{ à l'intérieur}$$

$$g) \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$