

# Électromagnétisme



## Phénomènes des basses fréquences électromagnétiques

G. Vinsard

[Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr](mailto:Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr)

18 décembre 2017

# L'effet Kelvin

► Un champ électromagnétique à basse fréquence est écranté par un conducteur électrique. C'est dû à l'effet Kelvin ou effet de peau.

► Pour comprendre cela on peut étudier une situation simplifiée :

un domaine  $D$  conducteur de l'électricité (conductivité électrique  $\sigma$ ) et éventuellement magnétique (perméabilité relative  $\mu_r$ )

dont la géométrie est celle de la bande de largeur  $L$

$D = \{\vec{x} = x \vec{k}_x + y \vec{k}_y + z \vec{k}_z \in E_3 \text{ tel que } -L/2 < x < L/2\}$

est placé dans un champ magnétique uniforme  $h_s \vec{k}_y$  donc dirigé suivant  $\vec{k}_y$

dépendant sinusoidalement du temps  $h_s = \Re\{\underline{h_s} \exp^{j\omega t}\}$

On demande de calculer le champ électromagnétique en présence de la bande et en régime sinusoïdal établi.

## Équations de Maxwell et relations constitutives

► Pour ce problème il est inutile d'introduire le potentiel vecteur magnétique ; aussi part-on des **équations de Maxwell formulées en amplitudes complexes**

$$\left\{ \begin{array}{lll} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{h}} = \underline{\vec{j}} & \text{Ampère (sans Maxwell)} & E_3(A/m^2) \\ \vec{\nabla} \times \underline{\vec{e}} = -j \omega \underline{\vec{b}} & \text{Maxwell-Faraday} & E_3(V/m^2 = T/s) \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{b}} = 0 & \text{Conservation de l'induction magnétique} & E_3(T/m) \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{e}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Gauss (sans charges)} & \mathbb{R}(Cb/m^3) \end{array} \right.$$

et complétées par les **relations constitutives**

$$\begin{array}{ll} \underline{\vec{j}} = s \underline{\vec{e}} & \text{loi d'Ohm } s = \sigma \text{ si } |x| > L/2 \text{ et } 0 \text{ sinon} \\ \underline{\vec{b}} = \mu \underline{\vec{h}} & \text{relation magnétique } \mu = \mu_0 \mu_r \text{ si } |x| > L/2 \text{ et } 0 \text{ sinon} \end{array}$$

## Superposition 1/2

► Les  $\vec{h}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{e}$ ,  $\rho$  sont les sommes des champs qu'il y aurait en l'absence de la bande, soit  $\vec{h}_s$ ,  $\vec{b}_s$ ,  $\vec{j}_s$ ,  $\vec{e}_s$  ('s' pour 'source'),  $\rho_s$  et des champs que la présence du massif produit, soit  $\vec{h}_i$ ,  $\vec{b}_i$ ,  $\vec{j}_i$ ,  $\vec{e}_i$ ,  $\rho_i$  ('i' pour 'induit') :

$$\vec{h} = \vec{h}_s + \vec{h}_i ; \vec{b} = \vec{b}_s + \vec{b}_i ; \vec{e} = \vec{e}_s + \vec{e}_i ; \vec{j} = \vec{j}_s + \vec{j}_i ; \rho = \rho_s + \rho_i$$

► Les **champs sources** sont

$$\vec{h}_s = h_s \vec{k}_y ; \vec{b}_s = \mu_0 h_s \vec{k}_y ; \vec{e}_s = j \omega h_s \times \vec{k}_z ; \vec{j}_s = \vec{0} ; \rho_s = 0$$

D'après les données du problème il y a un champ magnétique dans du vide ; d'où l'induction magnétique ; d'où ce champ électrique (respectant Maxwell-Faraday) ; et d'où l'absence de courant (il doit bien y avoir un courant source mais ce courant capable de générer un champ magnétique uniforme dans tout l'espace est nécessairement situé à l'infini !)

**C'est une approximation.**

## Superposition 2/2

► Et donc les **champs induits** sont solutions de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times (\vec{h}_i + \vec{h}_s) = \vec{j}_i & ; \quad \vec{\nabla} \times (\vec{e}_i + \vec{e}_s) = -j \omega (\vec{b}_i + \vec{h}_s \times \vec{k}_y) \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{b}_i + \vec{h}_s) = 0 & ; \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{e}_i + \vec{e}_s) = \frac{\rho_i}{\epsilon_0} \\ \vec{j}_i = s (\vec{e}_i + j \omega \vec{h}_s \times \vec{k}_z) & ; \quad (\vec{b}_i + \mu_0 \vec{h}_s \times \vec{k}_y) = \mu (\vec{h}_i + \vec{h}_s \times \vec{k}_y) \end{array} \right.$$

► Si le domaine conducteur (et éventuellement magnétique) était fini on demanderait aux champs induits de s'annuler à l'infini ;  
comme il ne l'est pas on leur demande juste de s'annuler dans la direction où ce domaine n'est pas infini, soit

$$|x| \rightarrow \infty \Rightarrow |\vec{h}_i|, |\vec{b}_i|, |\vec{e}_i|, |\vec{j}_i|, |\rho_i| \rightarrow 0$$

## Forme des équations des champs induits

► L'inspection des équations amène à constater que les champs induits sont de la forme

$$\vec{h}_i = \underline{h}_i(x) \vec{k}_y ; \vec{b}_i = \underline{b}_i(x) \vec{k}_y ; \vec{e}_i = \underline{e}_i(x) \vec{k}_z ; \vec{j}_i = \underline{j}_i(x) \vec{k}_z$$

et que

$$\forall x : \underline{\rho} = 0$$

$$|x| > L/2 : \underline{h}_i = 0 ; \underline{b}_i = 0 ; \underline{e}_i = 0 ; \underline{j}_i = 0$$

$$|x| < L/2 : \frac{d\underline{h}_i}{dx} = \underline{j}_i ; -\frac{d\underline{e}_i}{dx} = -j \omega \underline{b}_i ; \underline{j}_i = \sigma (\underline{e}_i + j \omega \underline{h}_s x) ; \underline{b}_i = \mu_0 \mu_r \underline{h}_i + \mu_0 (\mu_r - 1) \underline{h}_s$$

De plus Les champs électrique et magnétique sont à continuité tangentielle, d'où

$$|x| = L/2 \Rightarrow \underline{e}_i = 0 \text{ et } \underline{h}_i = 0$$

## Forme des équations des champs totaux

► La forme des équations de champs induit n'est pas trop sympathique ; aussi utilise-t-on plutôt les champs totaux

$$\vec{h} = \vec{h}_s + \vec{h}_i ; \vec{h} = \vec{h}_s + \vec{h}_i ; \vec{e} = \vec{e}_s + \vec{e}_i ; \vec{j} = \vec{j}_s + \vec{j}_i ; \rho = \rho_s + \rho_i$$

mais seulement à l'intérieur de la bande (à l'extérieur ils sont nuls), soit

$$|x| < L/2 : \frac{dh}{dx} = j ; j = \sigma e ; ; -\frac{de}{dx} = -j \omega b ; b = \mu_0 \mu_r h$$

avec comme conditions aux limites

$$x = \pm L/2 \Rightarrow e = \pm L/2 j \omega h_s \text{ et } h = h_s$$

## Choix de h comme variable

- En dérivant Ampère et en éliminant  $\underline{e}/dx$  avec la loi de Joule, Maxwell-Faraday et la relation magnétique on arrive à

$$\begin{aligned} |x| < L/2 & : \frac{d^2 \underline{h}}{dx^2} - j \omega \mu_0 \mu_r \sigma \underline{h} = 0 \\ |x| = L/2 & : \underline{h} = \underline{h}_s \end{aligned}$$

et, après calcul de h, reconstruction de

$$\underline{j} = \frac{d\underline{h}}{dx} ; \underline{e} = \frac{\underline{j}}{\sigma} ; \underline{b} = \frac{\underline{h}}{\mu_0 \mu_r}$$

Rappelons que

$$|x| > L/2 : \underline{h} = \underline{h}_s ; \underline{b} = \frac{\underline{h}_s}{\mu_0}$$

et que ce que vaut e n'a finalement pas d'importance.

# Solution de l'EDO

► C'est

$$\underline{h} = \underline{h}_s \frac{\cosh \left( (1+j) \frac{x}{\delta} \right)}{\cosh \left( (1+j) \frac{L}{\delta} \right)} \quad \text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu_0 \mu_r \omega}}$$

d'où

$$\underline{j} = \frac{\underline{h}_s}{\delta} \frac{\sinh \left( (1+j) \frac{x}{\delta} \right)}{\cosh \left( (1+j) \frac{L}{\delta} \right)} ; \quad \underline{e} = \frac{\underline{h}_s}{\delta \sigma} \frac{\sinh \left( (1+j) \frac{x}{\delta} \right)}{\cosh \left( (1+j) \frac{L}{\delta} \right)}$$

► On rappelle que

$$\cosh \zeta = \frac{\exp^{\zeta} + \exp^{-\zeta}}{2} ; \quad \sinh \zeta = \frac{\exp^{\zeta} - \exp^{-\zeta}}{2}$$

## La profondeur de pénétration de l'effet Kelvin

►  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu_0 \mu_r \omega}}$  s'appelle La profondeur de pénétration de l'effet Kelvin ;

► Pour comprendre ce qu'est l'effet Kelvin, supposons que  $\delta \ll L$ , alors : en posant  $x = -L/2 + \xi$  et en choisissant  $\underline{h}_s = h_s \in \mathbb{R}$ , la solution s'écrit

$$\begin{aligned} \text{Pour } 0 < \xi \ll L : \underline{h} &= h_s \exp^{-(1+j) \frac{\xi}{\delta}} \\ &= h_s \left( \cos \frac{\xi}{\delta} - j \sin \frac{\xi}{\delta} \right) \exp^{-\frac{\xi}{\delta}} \end{aligned}$$

On voit que son amplitude décroît exponentiellement : dès que  $\xi = \text{quelques } \delta : \underline{h} \approx 0$ .

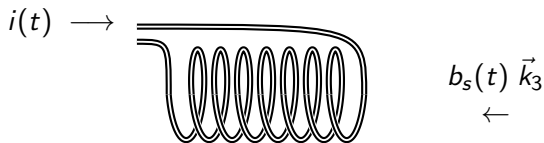
C'est l'effet Kelvin : le champ magnétique ne pénètre pas de plus de quelques  $\delta$  dans le sens de la profondeur dans un milieu conducteur de l'électricité.

## Un problème plus réaliste

- ▶ On place une billette pleine (rayon  $R$  longueur  $L$ ) dans une bobine de  $N$  spires parcourues par un courant d'amplitude  $I$  (peu importe la phase,  $I$  est réel) ;
- ▶ On donne directement la solution (les étapes de calcul sont omises) ;
- ▶ Cela permet d'obtenir une solution à partir de laquelle il devient possible de donner des indication qualitatives sur le comportement d'un matériau conducteur (éventuellement magnétique) en présence d'un champ magnétique variable.

## Induction source uniforme

Le champ magnétique source est le champ dans une bobine



Inducteur

Induction source

orientée suivant son axe ( $\vec{k}_3$ ) et supposée uniforme à l'intérieur de l'inducteur et nulle à l'extérieur. Les champs et induction sources sont alors être reliée au courant  $i(t)$  par le théorème d'Ampère comme

$$h_s = \frac{N i(t)}{L} ; b_s(t) = \mu_0 h_s = \frac{\mu_0 N i(t)}{L}$$

où  $N$  est le nombre de spires de la bobine (sur le dessin  $N = 7$ ) et  $L$  sa hauteur.

## Équation Du champ magnétique

► Lorsque  $r \longrightarrow \infty$  il faut que  $\underline{h}_z \longrightarrow \underline{h}_s$  d'où

$$\text{Cste}_1 = 0 \text{ et } \text{Cste}_0 = h_s = \frac{N i}{L}$$

►  $h_z$  est continu au passage de  $r = R$  (si  $h_z$  n'était pas continu il y aurait une densité de courant infinie) et

$$\frac{d\underline{h}_s}{dr}(0) = 0$$

par raison de symétrie, et donc le problème se réduit à trouver  $\underline{h}_z$  dans  $]0, R[$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{1}{\sigma} \frac{d\underline{h}_z}{dr} \right) - j \omega \mu_0 \mu_r \underline{h}_z = 0 \\ \frac{d\underline{h}_z}{dr}(0) = 0 ; \underline{h}(R) = \frac{N i}{L} \end{array} \right.$$

## Solution

- la solution est

$$\underline{h}(r) = \frac{N \underline{i}}{L} \frac{J_0 \left( (1-j) \frac{r}{\delta} \right)}{J_0 \left( (1-j) \frac{R}{\delta} \right)}$$

où

- $J_0$  est la fonction de Bessel de première espèce
- $\delta$  est la profondeur de pénétration de l'effet Kelvin

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma \omega \mu_0 \mu_r}}$$

- Par définition la puissance dissipée par effet Joule est

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_0^L dz \int_0^R dr \int_0^{2\pi} r d\theta \frac{j_\theta(t, r)^2}{\sigma} \\ &= \underbrace{\frac{2\pi L}{\sigma} \int_0^R r dr \left| \frac{d\underline{h}}{dr} \right|^2}_{=P} + \text{termes fluctuants à la pulsation } 2\omega \end{aligned}$$

## Puissance Joule dans la charge (1/2)

► Après quelques calculs<sup>1</sup> la puissance Joule est

$$P = 2\pi \frac{R}{L} (N|i|)^2 \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r \omega}{\sigma}} \Re \left\{ (-1 + j) \frac{J_1((1-j)\frac{R}{\delta})}{J_0((1-j)\frac{R}{\delta})} \right\}$$

qui se met sous la forme

$$P = (\pi R^2 L) \left( \frac{N I}{L} \right)^2 \mu_0 \mu_r \omega f(x)$$

$$\text{où } x = \frac{R}{\delta} = R \sqrt{\frac{\sigma \omega \mu_0 \mu_r}{2}} \text{ et } f(x) = \frac{1}{x} \Re \left( (-1 + j) \frac{J_1((1-j)x)}{J_0((1-j)x)} \right)$$

La puissance apparaît comme le produit

- du volume de la charge  $\pi R^2 L$  ;
- le carré du champ magnétique source  $(N I / L)^2$  avec  $I = |i|$  ;
- du produit de la perméabilité du milieu  $\mu_0 \mu_r$  par la pulsation  $\omega$  d'unité Ohm/m ;
- par une fonction  $f$

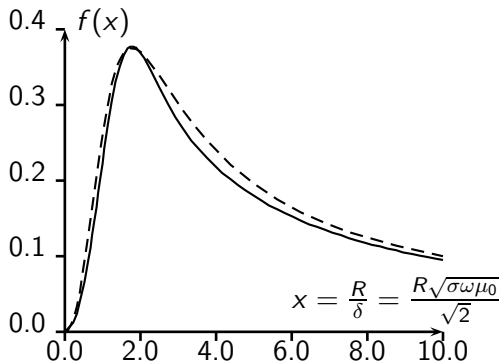
1. Poynting ou la forme variationnelle de l'équation en  $\underline{h_z}$

## Puissance Joule dans la charge (2/2)

- Une approximation possible de  $f$  est

$$f(x) \approx \frac{x^2}{2.81 + x^3} \text{ pour } 0 \leq x \leq \infty$$

Voici le tracé de  $f$  et de cette approximation

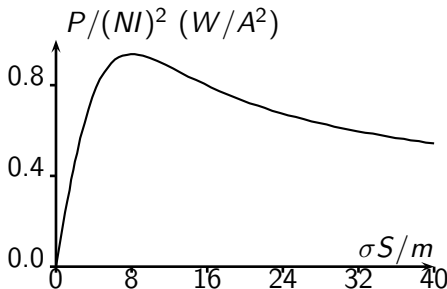


## Puissance vs conductivité

Les dépendances asymptotiques de la puissance en fonction des paramètres sont :

► Par rapport à la conductivité  $\sigma$

- si  $\sigma \rightarrow \infty$  alors  $\delta \approx 1/\sqrt{\sigma} \rightarrow 0$ ;  $x \approx \sqrt{\sigma} \rightarrow \infty$ ;  
 $f \approx 1/\sqrt{\sigma} \rightarrow 0$  d'où  $P \approx 1/\sqrt{\sigma} \rightarrow 0$
- si  $\sigma \rightarrow 0$  alors  $\delta \approx 1/\sqrt{\sigma} \rightarrow \infty$ ;  $x \approx \sqrt{\sigma} \rightarrow 0$ ;  
 $f \approx \sigma \rightarrow 0$  d'où  $P \approx \sigma \rightarrow 0$
- Il existe donc une valeur de  $\sigma$  pour laquelle la puissance injectée est maximale.



## Puissance vs fréquence et perméabilité

- ▶ Par rapport à la pulsation  $\omega$ 
  - ▶ si  $\omega \rightarrow \infty$  alors  $\delta \approx 1/\sqrt{\omega}$ ;  $x \approx \sqrt{\omega}$ ;  $f \approx 1/\sqrt{\omega}$  d'où  $P \approx \sqrt{\omega} \rightarrow \infty$
  - ▶ si  $\omega \rightarrow 0$  alors  $\delta \approx 1/\sqrt{\omega} \rightarrow \infty$ ;  $x \approx \sqrt{\omega} \rightarrow 0$ ;  $f \approx \omega \rightarrow 0$  d'où  $P \approx \omega^2 \rightarrow 0$
  - ▶ la puissance est croissante par rapport à la fréquence.
- ▶ Par rapport à la perméabilité magnétique relative  $\mu_r$ 
  - ▶ si  $\mu_r \rightarrow \infty$  alors  $\delta \approx 1/\sqrt{\mu_r}$ ;  $x \approx \sqrt{\mu_r}$ ;  $f \approx 1/\sqrt{\mu_r}$  d'où  $P \approx \sqrt{\mu_r} \rightarrow \infty$
  - ▶ si  $\mu_r \rightarrow 0$  alors  $\delta \approx 1/\sqrt{\mu_r} \rightarrow \infty$ ;  $x \approx \sqrt{\mu_r} \rightarrow 0$ ;  $f \approx \mu_r \rightarrow 0$  d'où  $P \approx \mu_r^2 \rightarrow 0$
  - ▶ la puissance est croissante par rapport à la perméabilité ; le comportement à l'infini doit être pris avec précaution ; le comportement magnétique d'un matériau cesse de pouvoir être représenté par une relation linéaire entre champ et induction lorsque la puissance injectée est infinie.