

ÉLECTROMAGNÉTISME

LICENCE

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Christophe Chatelain, 2019

SOMMAIRE

1. Électromagnétisme	5
1.1. Électrodynamique	5
1.1.1. Champs électrique et magnétique	5
1.1.1.1. La description de Coulomb des phénomènes électrostatiques	6
1.1.1.2. Le concept de champ	8
1.1.1.3. La force de Lorentz	12
1.1.2. Mouvement d'une charge dans un champ uniforme	13
1.1.2.1. Mouvement d'une charge dans un champ électrique uniforme	13
1.1.2.2. Trajectoire d'une charge dans un champ magnétique	14
1.1.3. Travail et énergie potentielle de la force de Lorentz	16
1.1.3.1. Travail de la force de Lorentz	16
1.1.3.2. Énergie potentielle électrique	17
1.1.3.3. Potentiel créé par une charge ponctuelle	19
1.2. Électrostatique	20
1.2.1. Champ électrique créé par une distribution de charges	21
1.2.1.1. Principe de superposition	21
1.2.1.2. Symétrie de la distribution de charge	22
1.2.1.3. Champ et potentiel créés par un dipôle	23
1.2.1.4. Dynamique d'un dipôle dans un champ électrique	25
1.2.1.5. Distribution de charge continue	25
1.2.1.6. Champ électrique créé par un fil chargé	27
1.2.1.7. Champ électrique créé par un cylindre fini chargé en surface	29
1.2.1.8. Champ électrique au centre d'une demi-sphère	30
1.2.1.9. Champ électrique sur l'axe d'un disque chargé en surface	31
1.2.2. Théorème de Gauss	33
1.2.2.1. Énoncé du théorème de Gauss	33
1.2.2.2. Conditions de passage du champ électrique	35
1.2.2.3. Champ électrique créé par un plan chargé	36
1.2.2.4. Champ électrique créé par une sphère chargée en surface	38
1.2.2.5. Champ électrique créé par un cylindre infini chargé en volume	39
1.2.3. Phénomènes d'influence et condensateurs	40
1.2.3.1. Condensateur plan	41
1.2.3.2. Condensateur cylindrique	42
1.2.3.3. Circuit RC	44

1.2.3.4. Énergie stockée dans un condensateur	45
1.3. Magnétostatique	46
1.3.1. Champ magnétique créé par une distribution de courants	46
1.3.1.1. Courant et densité de courant	46
1.3.1.2. Loi de Biot-Savart	48
1.3.1.3. Champ magnétique créé par un fil rectiligne	50
1.3.1.4. Champ magnétique créé par une boucle de courant	51
1.3.1.5. Champ magnétique créé par un solénoïde cylindrique fini	53
1.3.2. Théorèmes de Gauss magnétique et d'Ampère	55
1.3.2.1. Théorème de Gauss magnétique	55
1.3.2.2. Théorème d'Ampère	56
1.3.2.3. Conditions de passage du champ magnétique	57
1.3.2.4. Champ magnétique créé par un câble coaxial	58
1.3.2.5. Champ magnétique créé par un solénoïde cylindrique infini	59
1.4. Rappels de géométrie	61
1.4.1. Rappels d'analyse vectorielle	61
1.4.1.1. Vecteurs formés comme des couples de points	61
1.4.1.2. Addition et multiplication par un scalaire	61
1.4.1.3. Produit scalaire	62
1.4.1.4. Théorèmes d'Al-Kashi et de Pythagore	62
1.4.1.5. Décomposition d'un vecteur sur une base	63
1.4.1.6. Vecteurs et champs de vecteurs en physique	63
1.4.2. Rappels sur les systèmes de coordonnées	64
1.4.2.1. Système de coordonnées cartésiennes	64
1.4.2.2. Système de coordonnées cylindriques	65
1.4.2.3. Système de coordonnées sphériques	66
1.5. Annexes	68

1. ÉLECTROMAGNÉTISME

1.1. Électrodynamique

Pré-requis : mécanique du point

Savoirs à assimiler : force de Coulomb, notion de champs électrique et magnétique, force de Lorentz, travail de la force de Lorentz, potentiel électrique, champ et potentiel électrique d'une charge ponctuelle.

Savoir-faire : Déterminer la configuration de charges électriques à l'équilibre mécanique, Calculer la trajectoire d'une charge dans un champ électrique et/ou magnétique donné en utilisant le principe fondamental de la dynamique ou la loi de conservation de l'énergie.

Outils mathématiques : Champ de vecteurs, décomposition d'un champ de vecteurs sur un repère local orthonormé, projection, produit vectoriel, équations différentielles du premier et du second ordre à coefficients constantes avec ou sans second membre.

Bibliographie : Beaucoup de livres de qualité à la BU (2ème étage). A vous de trouver celui qui vous convient le mieux (cela sous-entend qu'il faut commencer par en feuilleter un certain nombre) ! Citons :

R. Feynman, R.B. Leighton et M.L. Sands (1965)

Le cours de physique de Feynman, électromagnétisme, Dunod

J.P. Pérez, R. Carles, R. Fleckinger (2002) *Electromagnétisme*, Dunod

D. Cordier (2004) *Cours de physique : électromagnétisme 1*, Dunod

Pas grand chose sur Internet et beaucoup de sources très peu fiables ! Je vous le déconseille. Si vous y tenez vraiment, il y a sur YouTube

Walter Lewin (2015) 8.02x - *Physics II: Electricity and Magnetism*

1.1.1. Champs électrique et magnétique

Les expériences présentées par Walter Lewin lors de son premier cours (voir le lien ci-dessus) mettent très clairement en évidence les effets électrostatiques. Lors de la première d'entre elles (10') des charges électrostatiques sont créées à la surface d'un bâton de verre en le frottant sur un tissu de soie. Tissu et bâton se chargent avec des signes opposés afin de préserver la neutralité électrique globale. Lorsqu'on approche le bâton chargé d'un ballon gonflé à l'hélium, on voit ce dernier se diriger vers le bâton. Cette attraction électrostatique s'explique par le fait que les électrons libres de la couche métallique recouvrant le ballon se redistribuent à sa surface. La face la plus proche du bâton se charge négativement sous l'effet de l'attraction du bâton (en supposant que ce dernier est chargé positivement) alors que la face la plus éloignée se charge

1.1. Électrodynamique

positivement, toujours pour assurer la neutralité électrique du ballon qui n'a pu être brisée. Walter Lewin met ensuite en contact le bâton et le ballon. Des charges positives s'écoulent alors du bâton vers le ballon. Ce dernier, auparavant électriquement neutre, est maintenant chargé positivement et, par conséquent, est repoussé par le bâton. Ces deux expériences mettent en évidence le fait qu'il existe deux types de charges électriques, de signes opposés. Effectivement, Lewin montre qu'on peut charger un bâton d'ébonite négativement en le frottant avec une fourrure de chat. Dans l'expérience amusante à 22'30'', Walter Lewin charge électriquement un étudiant en le frappant avec la fourrure de chat. Puisqu'il a pris soin de s'isoler du sol par une plaque de plexiglas, Lewin se charge également mais avec un signe opposé. Lorsque l'étudiant et lui prennent en main chacun une extrémité d'un tube à néon, un éclair lumineux est clairement visible. Le néon a donc été parcouru par un courant électrique. Les charges électriques dont il est question depuis le début de ce paragraphe sont donc les constituants du courant électrique.

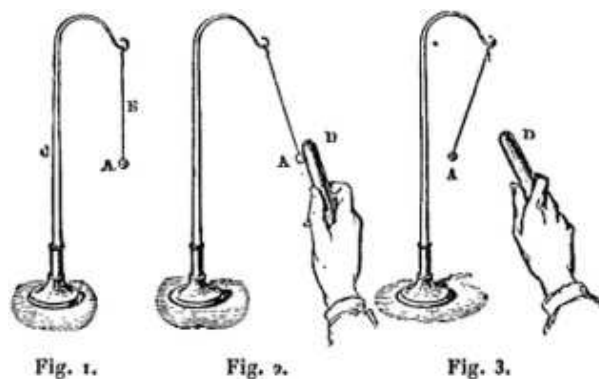


Figure 1 : Soit un pendule formé d'une balle de sureau soutenue par un fil isolant, un fil de soie par exemple (fig. 1). Approchons un corps électrisé, la balle est attirée (fig. 2) ; mais si on la laisse venir au contact du corps électrisé et partager son électricité, elle est ensuite vivement repoussée et fuit obstinément le corps électrisé (fig. 3) ⁽¹⁾.

1.1.1.1. La description de Coulomb des phénomènes électrostatiques

Charles-Augustin Coulomb (1736-1806) a mis en évidence le fait que deux charges électriques q_1 et q_2 , supposées ponctuelles et situées en deux points M_1 et M_2 de l'espace, agissent l'une sur l'autre au moyen d'une **force inversement proportionnelle au carré de leur distance** :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{||\overrightarrow{M_1 M_2}||^3}.$$

Il en découle qu'en doublant la distance entre les charges, la force est divisée par quatre. Remarquons que

$$\frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{||\overrightarrow{M_1 M_2}||^3}$$

⁽¹⁾ D'après J. Joubert (1899) *Cours élémentaire d'électricité*, Masson (Paris).

est un vecteur unitaire dirigé du point M_1 vers M_2 . En vertu du principe d'action-réaction, on a

$$\vec{F}_{2/1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_2 M_1}}{||\overrightarrow{M_2 M_1}||^3} = -\vec{F}_{1/2}.$$

Il est souvent plus pratique de repérer la position d'un point M_1 par les vecteurs $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$. Puisque

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{M_1 O} + \overrightarrow{OM_2} = -\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

on pourra écrire la force de Coulomb sous la forme

$$\boxed{\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{||\vec{r}_2 - \vec{r}_1||^3}}. \quad (1)$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes où

$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{u}_x + y_1 \vec{u}_y + z_1 \vec{u}_z = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = x_2 \vec{u}_x + y_2 \vec{u}_y + z_2 \vec{u}_z = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

la force s'écrit explicitement

$$\boxed{\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}}$$

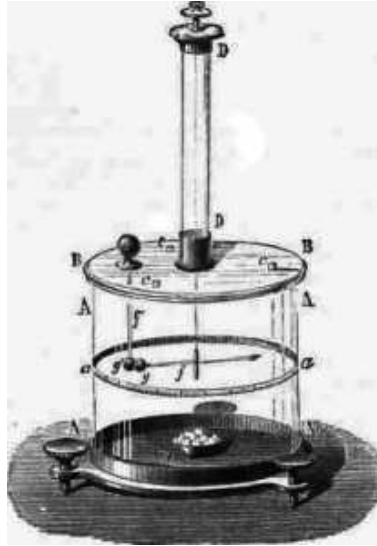


Figure 2 : Balance de torsion au moyen de laquelle Coulomb a montré que deux charges opposées se repoussaient de manière inversement proportionnelle au carré de leur distance ⁽²⁾. L'une des charges est fixe alors que la seconde est placée sur une bras mobile qui, en tournant, tord un fil d'argent. L'angle de torsion est mesuré au moyen d'un micromètre.

Remarquons que la force électrostatique est analogue à la force gravitationnelle

⁽²⁾ d'après *The American Cyclopaedia*, de George Ripley et Charles A. Dana)

1.1. Électrodynamique

entre deux masses m_1 et m_2 situées à des points $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$:

$$\vec{F}_{1/2} = -\mathcal{G}m_1m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3}.$$

Cette analogie entre les deux forces est à l'origine de la similitude entre le système solaire et l'atome. Notons toutefois deux différences importantes : la masse est toujours positive alors que la charge peut être tout aussi bien positive que négative et deux masses s'attirent alors que deux charges de même signe se repoussent. En outre, la force électrique est une force beaucoup plus forte que la force de gravitation : deux sphères de cuivre de masse 63.57 g, totalement ionisées et distantes de 1 m se repousseraient avec une force équivalente à un poids de $7,2 \cdot 10^{18}$ t.

1.1.1.2. Le concept de champ

Dans les années 1840, Micaël Faraday observe que la limaille de fer tend à tourner et s'orienter le long de lignes joignant les pôles opposés d'aimants permanents ou de bobines parcourues par un courant. Cette découverte conduira à l'introduction du concept de champ magnétique.

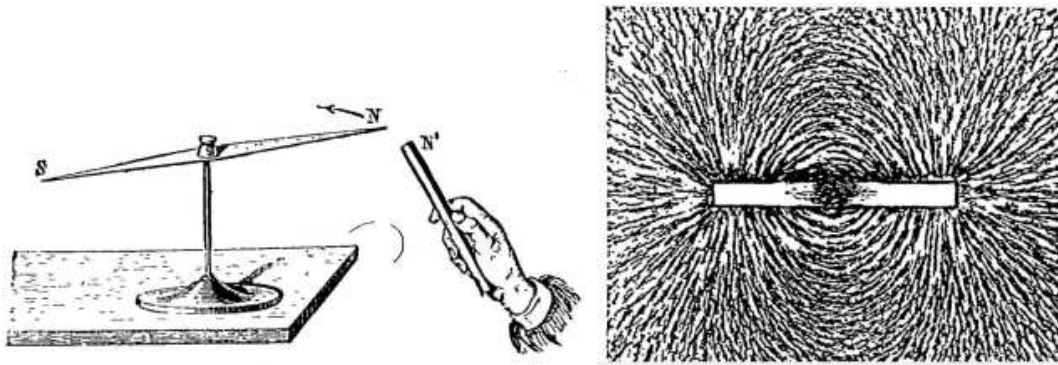


Figure 3 : A gauche, déviation d'une boussole par un aimant. A droite, on place au-dessus du barreau une lame mince de verre ou de carton et on y répand de la limaille de fer d'une manière uniforme. En donnant à la lame de petites secousses, on voit (fig. 64) les grains de limaille s'aligner en courbes régulières qui partent d'un point de la surface pour aboutir au point symétrique de l'autre extrémité ⁽³⁾ .

Dans le cas électrostatique qui nous intéresse, de telles lignes existent également et peuvent être mises en évidence avec des grains de semoule suffisamment fins. Avec des moyens modernes, on peut imaginer immerger deux charges électriques opposées dans un cristal liquide et observer au microscope l'alignement des longues molécules le long de lignes joignant les charges opposées.

⁽³⁾ D'après J. Joubert (1899) *Cours élémentaire d'électricité*, Masson (Paris).

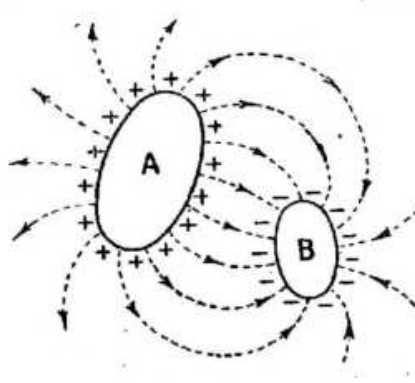


Figure 4 : Représentation schématique des lignes de champ électrique au voisinage de deux corps électrisés A et B ⁽⁴⁾.

Contrairement à Coulomb, le physicien écossais John Clerk Maxwell (1831-1879) suppose qu'il n'existe **pas de force électrostatique agissant à distance**. L'interaction entre les charges est transmise par une nouvelle entité physique, existant indépendamment des charges, le **champ électrique**. Ce champ électrique **emplit tout l'espace**. On le notera $\vec{E}(\vec{r})$. Mathématiquement, il s'agit d'un champ de vecteurs et non d'un simple vecteur. Dans le système de coordonnées cartésiennes, le champ électrique admet la décomposition unique :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x(x, y, z)\vec{u}_x + E_y(x, y, z)\vec{u}_y + E_z(x, y, z)\vec{u}_z = \begin{pmatrix} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

où $E_x(x, y, z)$ est la composante du champ électrique $\vec{E}$ suivant $\vec{u}_x$ au point de coordonnées $(x \ y \ z)$. Les trois composantes E_x, E_y et E_z sont des fonctions des trois coordonnées x, y et z . Une erreur classique en première année est de considérer que $E_x = E_x(x)$. Attention, pour alléger les notations, on écrira souvent

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x\vec{u}_x + E_y\vec{u}_y + E_z\vec{u}_z = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

où la dépendance avec x, y et z est implicite. Comme dans tout repère orthonormé, les composantes du champ électrique sont obtenues par **projection** :

$$\vec{E} \cdot \vec{u}_x = E_x \underbrace{\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x}_{=1} + E_y \underbrace{\vec{u}_y \cdot \vec{u}_x}_{=0} + E_z \underbrace{\vec{u}_z \cdot \vec{u}_x}_{=0} = E_x$$

ou, sous forme de vecteur colonne,

$$\vec{E} \cdot \vec{u}_x = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = E_x.$$

⁽⁴⁾ D'après Ganot-Maneuverier (1918) *Traité élémentaire de physique*, Hachette (Paris).

1.1. Électrodynamique

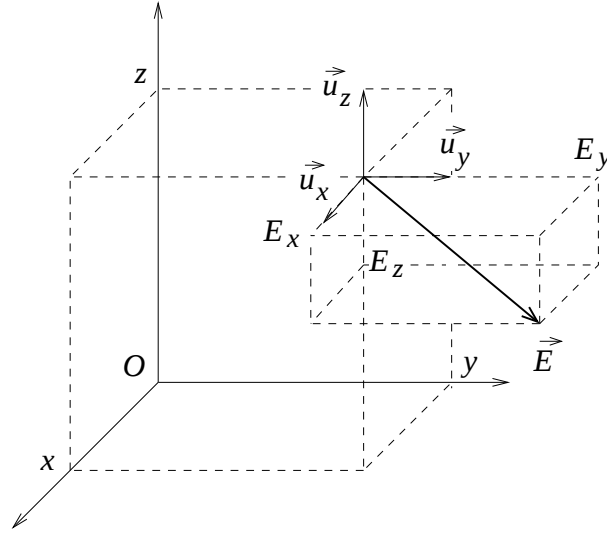


Figure 5 : Décomposition du champ de vecteurs $\vec{E}$ au point (x, y, z) .

Maxwell postule que le champ électrique est engendré par les charges électriques. Les charges n'interagissent pas entre elles mais seulement avec le champ électrique. La charge q_2 située au point $\vec{r}_2$ interagit avec le champ électrique **au même point** :

$$\boxed{\vec{F}_2 = q_2 \vec{E}(\vec{r}_2)} . \quad (2)$$

Pour que cette théorie soit équivalente à celle de Coulomb, il faut que le champ électrique créé en un point $\vec{r}$ quelconque par une charge q_1 située au point $\vec{r}_1$ soit

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{\|\vec{r} - \vec{r}_1\|^3}} . \quad (3)$$

Exercice : vérifier qu'en insérant l'expression du champ électrique au point $\vec{r}_2$ dans (2), on retrouve la force de Coulomb (1). A ce niveau, les deux théories sont équivalentes.

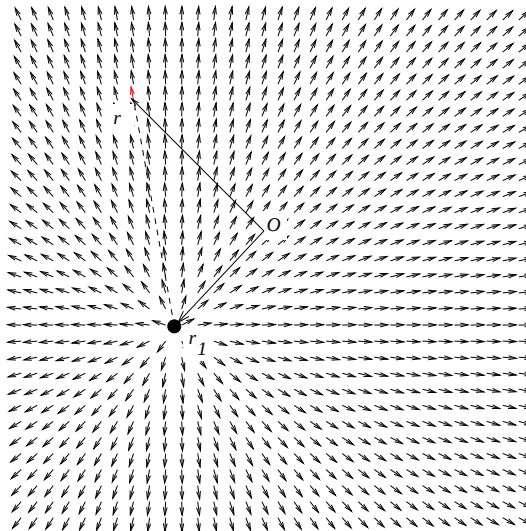


Figure 6 : Champ électrique créé en tout point par une charge q_1 . L'orientation des flèches indique la direction du champ électrique. Pour des raisons de

visibilité, on les a représenté avec une longueur constante, indépendante donc de $||\vec{E}||$. Remarquez que le champ électrique est dirigé suivant la droite joignant la charge et le point où est mesuré le champ électrique, i.e. $\vec{E}(\vec{r}) \sim \vec{r} - \vec{r}_1$.

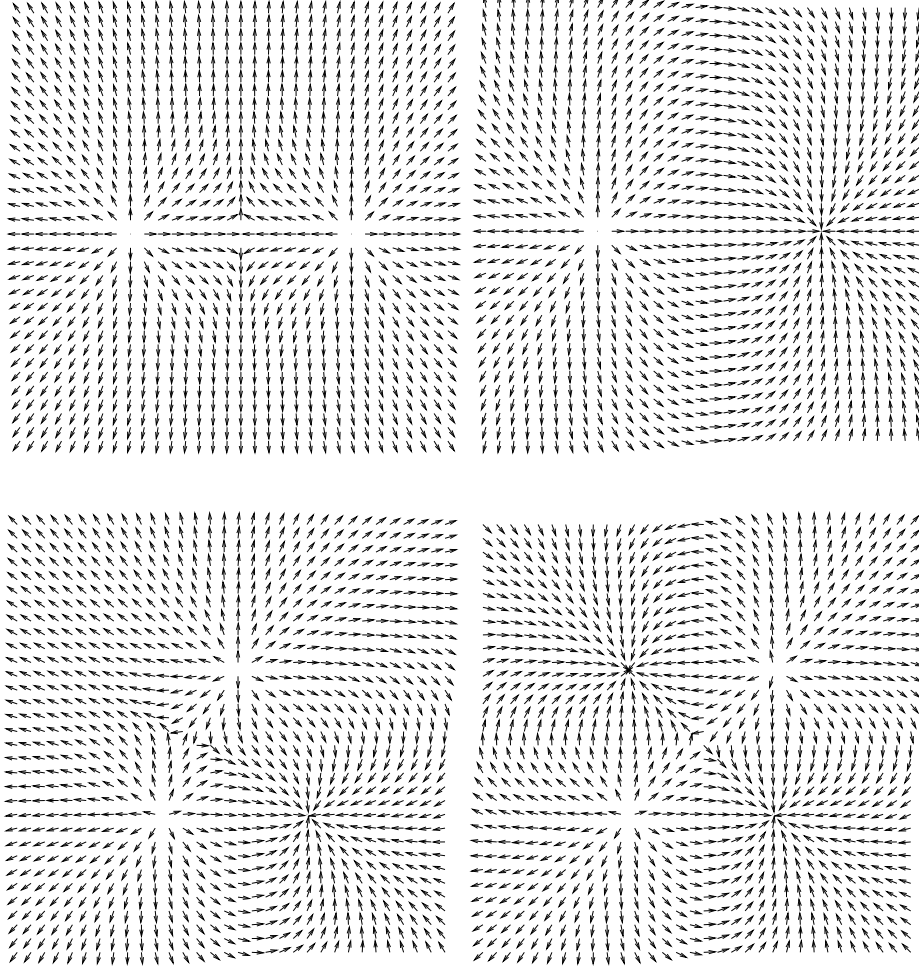


Figure 7 : Exemples de champs électriques créés par des charges ponctuelles.
Pouvez-vous déterminer où se trouvent ces charges et quel est leur signe ?

La direction du champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ en un point $\vec{r}$ donné correspond à la direction que prendrait une particule test de charge positive si on la plaçait au point $\vec{r}$. De manière plus générale, les lignes de champ correspondent aux trajectoires de particules test de charge positive à condition que leur vitesse reste petite, ce qu'on obtient en pratique avec une force de frottement importante. En effet, le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} = q \vec{E}(\vec{r}) - \frac{m}{\tau} \vec{v}.$$

Lorsque la force de frottement est grande devant le terme de gauche, on peut faire l'approximation

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \simeq 0 \Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{q\tau}{m} \vec{E}(\vec{r}(t)).$$

1.1. Électrodynamique

La vitesse $\vec{v}(t)$ de la charge est alors en tout point parallèle au champ électrique $\vec{E}(\vec{r}(t))$ au point où elle se trouve. Or la vitesse est tangente à la trajectoire donc cette dernière est en tout point tangente au champ électrique.

1.1.1.3. La force de Lorentz

On reviendra plus loin sur la manière dont une charge en mouvement crée un champ magnétique. Pour des raisons historiques, ce dernier sera noté $\vec{B}$ ⁽⁵⁾. Comme le champ électrique, il s'agit d'un champ de vecteurs et non d'un simple vecteur. Dans le système de coordonnées cartésiennes, le champ magnétique admet la décomposition unique :

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_x(x, y, z)\vec{u}_x + B_y(x, y, z)\vec{u}_y + B_z(x, y, z)\vec{u}_z = \begin{pmatrix} B_x(x, y, z) \\ B_y(x, y, z) \\ B_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

où $B_x(x, y, z)$ est la composante du champ magnétique $\vec{B}$ suivant $\vec{u}_x$ au point de coordonnées (x, y, z) . Comme dans tout repère orthonormé, les composantes sont obtenues par projection :

$$\vec{B} \cdot \vec{u}_x = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = B_x.$$

Les trois composantes B_x, B_y et B_z sont des fonctions des trois coordonnées x, y et z .

Alors qu'une charge électrique q_1 située au point $\vec{r}_1$ crée un champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ en tout point $\vec{r}$ de l'espace, elle ne crée un champ magnétique $\vec{B}(\vec{r})$ que si elle est en mouvement. Le champ magnétique est proportionnel à la vitesse v_1 de la charge q_1 . On discutera plus tard de la manière précise dont une charge crée un champ magnétique.

Considérons une seconde charge q_2 située au point $\vec{r}_2$ et animée d'une vitesse $\vec{v}_2$. La charge interagit **localement** avec les champs électrique et magnétique. Elle ressent une force

$$\boxed{\vec{F}_2 = q_2(\vec{E}(\vec{r}_2) + \vec{v}_2 \wedge \vec{B}(\vec{r}_2))}$$

appelée force de Lorentz. Remarquons que la charge ne ressent une force magnétique que si elle est en mouvement. Une charge au repos ne ressent que l'interaction avec le champ électrique. L'expression de la force fait intervenir le **produit vectoriel** défini pour deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ comme

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_y V_z - U_z V_y \\ U_z V_x - U_x V_z \\ U_x V_y - U_y V_x \end{pmatrix}.$$

Souvenez-vous que, contrairement au produit scalaire de deux vecteurs

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z$$

⁽⁵⁾ Maxwell a simplement utilisé les lettres de l'alphabet dans l'ordre alphabétique (A pour le potentiel vecteur, B pour le champ magnétique, C le courant, D le déplacement électrique, E le champ électrique, F la force, G la vitesse, H le champ d'excitation magnétique, I l'aimantation et J la densité de courant). Seules les notations A, B, D, E, F et H sont restées.

qui est un nombre, le produit vectoriel est un vecteur. Si les deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ne sont pas colinéaires, ils sous-tendent un plan. Le vecteur $\vec{U} \wedge \vec{V}$ est perpendiculaire à ce plan. En outre, il est facile de vérifier que

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}, \quad \vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$$

et que

$$\vec{U} \cdot \vec{U} = U_x^2 + U_y^2 + U_z^2 = \|\vec{U}\|^2, \quad \vec{U} \wedge \vec{U} = 0$$

On a également les relations

$$\|\vec{U} \cdot \vec{V}\| = \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \cos(\vec{U}, \vec{V}), \quad \|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \sin(\vec{U}, \vec{V}).$$

Exercice : vérifier les relations

$$\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z, \quad \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x, \quad \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y$$

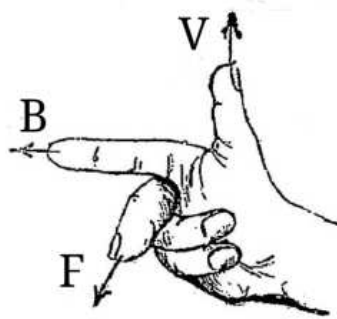


Figure 8 : Règle des trois doigts du Dr. Fleming appliquée à la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ dans le cas $q > 0$ ⁽⁶⁾.

1.1.2. Mouvement d'une charge dans un champ uniforme

Dans cette section, on ne s'intéresse pas à la manière dont sont produits les champs électrique et magnétique mais quelle est la trajectoire d'une charge q . On néglige les autres forces, notamment gravitationnelle.

1.1.2.1. Mouvement d'une charge dans un champ électrique uniforme

On suppose que le champ magnétique est partout nul et que le champ électrique est uniforme, par exemple

$$\vec{E}(x, y, z) = E_0 \vec{u}_x = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La force subie par la charge q est alors

$$\vec{F} = q\vec{E} = qE_0 \vec{u}_x.$$

⁽⁶⁾ D'après E. Desbeaux (1891) *Physique populaire*, E. Flammarion.

1.1. Électrodynamique

Par conséquent, le principe fondamental de la dynamique conduit aux trois équations différentielles du second ordre

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \vec{E} \Leftrightarrow \begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = q E_0 \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

qu'il suffit d'intégrer pour arriver à la solution

$$\begin{cases} x(t) = \frac{q E_0}{2m} t^2 + At + B \\ y(t) = Ct + D \\ z(t) = Ft + G \end{cases}$$

Pour fixer les six constantes d'intégration A, B, C, D, F et G , on fixe la position et la vitesse de la charge au temps $t = 0$. Il vient

$$\begin{cases} x(t) = \frac{q E_0}{2m} t^2 + v_x(0)t + x(0) \\ y(t) = v_y(0)t + y(0) \\ z(t) = v_z(0)t + z(0) \end{cases}$$

ce qu'on peut écrire vectoriellement

$$\vec{r}(t) = \frac{q}{2m} \vec{E} t^2 + \vec{v}(0)t + \vec{r}(0).$$

Remarquez l'analogie avec la trajectoire d'une masse m dans un champ gravitationnel uniforme. Comme dans le cas de la chute libre, le mouvement est **uniformément accéléré**. Dans les tubes cathodiques qui équipaient les téléviseurs, c'est par le biais d'un champ électrique qu'étaient accélérés les électrons émis thermiquement par une cathode. C'est également sur ce principe que fonctionne les accélérateurs linéaires de particules, par exemple celui du *Stanford Linear Accelerator Center*.

Exercice : montrez que la vitesse d'une charge électrique ponctuelle q soumise à l'interaction avec un champ électrique uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$ et à une force de frottement $-\frac{m}{\tau} \vec{v}$ est

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-t/\tau} + \frac{q\tau}{m} \vec{E} (1 - e^{-t/\tau})$$

Exercice : montrez que la trajectoire d'une charge électrique ponctuelle q , confinée sur l'axe (Ox) , soumise à l'interaction avec un champ électrique uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$, une force de frottement $-\frac{m}{\tau} \vec{v}$ et la force de rappel d'un ressort $-k(x - x_0)$ est

$$x(t) = x_0 + \frac{qE}{k} + A e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \phi), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{1}{4\tau^2}}.$$

où les constantes A et ϕ dépendent des conditions initiales.

1.1.2.2. Trajectoire d'une charge dans un champ magnétique

On considère une charge ponctuelle q , initialement animée d'une vitesse $\vec{v}_0$ et

plongée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$. Rappelons que si la charge était au repos, elle le resterait ! La charge subit une force

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = qB_0 \vec{v}(t) \wedge \vec{u}_z \Leftrightarrow \begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = qB_0 v_y \\ m \frac{dv_y}{dt} = -qB_0 v_x \\ m \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

La troisième équation différentielle conduit à $v_z(t) = \text{Cste} = v_z(0)$. Les deux premières équations sont couplées. On pourra vérifier que leur solution est ⁽⁷⁾

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{\perp} \cos(\omega t + \phi) \\ v_y(t) = -v_{\perp} \sin(\omega t + \phi) \end{cases} \quad (4)$$

où $v_{\perp} = \sqrt{v_x^2(0) + v_y^2(0)}$ est le module de la vitesse initiale dans le plan perpendiculaire au champ et ϕ un angle donné par les conditions initiales. Remarquons que le module de la vitesse reste constant durant le mouvement :

$$v^2 = v_{\perp}^2 + v_z^2.$$

Seule sa direction tourne avec une pulsation ω . En introduisant la solution (4) dans l'équation différentielle, on obtient la pulsation :

$$m\omega = qB_0 \Leftrightarrow \omega = \frac{qB_0}{m}$$

En intégrant, on obtient la trajectoire

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + \frac{v_{\perp}}{\omega} \sin(\omega t + \phi) \\ y(t) = y(0) + \frac{v_{\perp}}{\omega} \cos(\omega t + \phi) \\ z(t) = z(0) + v_z(0)t \end{cases}$$

On reconnaît l'équation paramétrique d'une hélice dont le rayon est

$$R = \frac{v_{\perp}}{\omega} = \frac{mv_{\perp}}{qB_0}.$$

(7) Pour arriver à la solution (4), le "truc" est de découpler les équations en posant

$$v = v_x + iv_y \Leftrightarrow v_x = \Re v, v_y = \Im v$$

de sorte que l'équation différentielle devient

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= m \frac{dv_x}{dt} + im \frac{dv_y}{dt} = qB_0 v_y - iqB_0 v_x = -iqB_0 (v_x + iv_y) = -iqB_0 v \\ \Leftrightarrow v(t) &= A e^{-i\left(\frac{qB_0}{m}t + \phi\right)} = A \cos\left(\frac{qB_0}{m}t + \phi\right) - iA \sin\left(\frac{qB_0}{m}t + \phi\right) \end{aligned}$$

Il reste à prendre les parties réelle et imaginaire pour retrouver la solution.

1.1. Électrodynamique

La trajectoire de la charge s'enroule autour du champ magnétique.

Dans un écran de télévision cathodique, les électrons étaient d'abord accélérés par un champ électrique puis leur trajectoire était incurvée par un champ magnétique créés par plusieurs bobines. En ajustant le courant circulant dans les bobines, l'électronique pouvaient faire balayer tous les points de l'écran par le faisceau électrique. Une autre application concerne les accélérateurs de particules. Au moyen d'un puissant champ magnétique, produit par des bobines supraconductrices, on impose une trajectoire circulaire des particules chargées et on les fait passer à chaque tour dans un accélérateur linéaire. Les grands accélérateurs, comme le CERN, fonctionnent sur ce principe.

Exercice : vérifiez que la vitesse d'une particule ponctuelle de charge q dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ et soumise à une force de frottement $-\frac{m}{\tau}v$ est

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{\perp}(0)e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \phi) \\ v_y(t) = -v_{\perp}(0)e^{-t/\tau} \sin(\omega t + \phi) \\ v_z(t) = v_z(0)e^{-t/\tau} \end{cases}$$

1.1.3. Travail et énergie potentielle de la force de Lorentz

1.1.3.1. Travail de la force de Lorentz

Considérons une charge q dont la trajectoire est $\vec{r}(t) = \vec{OM}(t)$. Intéressons-nous à cette trajectoire entre deux instants t et $t + \Delta t$ très proches. Entre ces deux instants, la charge passe du point $M(t)$ au point $M(t + \Delta t)$. L'accélération de la charge étant proportionnelle à la force qu'elle ressent, la trajectoire possède une courbure finie entre $M(t)$ et $M(t + \Delta t)$. Par conséquent, ce "morceau" de trajectoire apparaît comme un segment rectiligne dans la limite $\Delta t \rightarrow 0$. Introduisons l'élément de longueur infiniment petit

$$d\vec{\ell} = d\vec{OM} = \vec{OM}(t + dt) - \vec{OM}(t).$$

Puisque la vitesse est définie par

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{OM}(t + \Delta t) - \vec{OM}(t)}{\Delta t} \\ \Leftrightarrow \vec{OM}(t + \Delta t) &= \vec{OM}(t) + \vec{v}(t)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned}$$

on peut également écrire pour un élément de longueur le long de la trajectoire

$$d\vec{\ell} = \frac{d\vec{OM}}{dt} dt = \vec{v}(t) dt.$$

Le travail de la force $\vec{F}$ entre $M(t)$ et $M(t + \Delta t)$ est défini comme

$$\delta W = \vec{F}(t) \cdot d\vec{\ell}.$$

Le travail est infiniment petit mais on utilisera la notation δW plutôt que dW pour rappeler que le travail dépend du chemin suivi et non simplement des points final et initial. Entre deux points A et B , le travail est obtenu par intégration :

$$W = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F}(t) \cdot d\vec{\ell}$$

Pour calculer ce genre d'intégrale, il est nécessaire d'introduire tout d'abord une paramétrisation de la trajectoire. En mécanique, le temps joue naturellement ce rôle (mais on peut utiliser d'autres paramétrisations). Le travail peut alors s'écrire comme une intégrale

$$W = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) dt$$

Le travail de la force de Lorentz est

$$\delta W = q[\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{r})] \cdot d\vec{\ell}.$$

Notons que $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est un vecteur à la fois perpendiculaire à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$. En utilisant le fait que pour un élément de longueur le long de la trajectoire $d\vec{\ell} = \vec{v}(t)dt$, on aura donc

$$(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \delta W_B = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

Le travail de la force magnétique est **toujours** nul ! Seule la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$ contribue au travail. Ce résultat est conforme à l'observation que la vitesse d'une charge restait constante dans un champ magnétique uniforme. D'après le théorème de l'énergie cinétique, le travail est égal à la variation d'énergie cinétique. Cette dernière est donc inchangée pour une charge soumise seulement à la force magnétique ⁽⁸⁾.

1.1.3.2. Énergie potentielle électrique

D'après le théorème de l'énergie potentielle, le travail entre deux points A et B de la trajectoire correspond à la variation d'énergie potentielle entre ces deux points. En effet, en posant ⁽⁹⁾

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial E_p}{\partial x} \\ \frac{\partial E_p}{\partial y} \\ \frac{\partial E_p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

il vient ⁽¹⁰⁾

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \cdot d\vec{\ell} = -dE_p$$

et donc

$$W = \int_A^B \vec{F}(t) \cdot d\vec{\ell} = E_p(A) - E_p(B).$$

Rappelons que si toutes les forces sont conservatives, l'énergie totale $E = E_c + E_p$ est

⁽⁸⁾ La démonstration découle du Principe Fondamental de la Dynamique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m ||\vec{v}||^2 \right) = 0$$

⁽⁹⁾ Rappelons que l'énergie potentielle associée à la force de pesanteur $\vec{F} = -mg\vec{u}_z$ est $E_p(z) = mgz + \text{Cste}$. Pour un ressort de force de rappel $\vec{F} = -kx\vec{u}_x$, l'énergie potentielle est $E_p(x) = \frac{1}{2} kx^2 + \text{Cste}$.

⁽¹⁰⁾ Cette relation est probablement plus claire en une dimension :

$$\delta W = F dx = -\frac{dE_p}{dx} dx = -dE_p.$$

1.1. Électrodynamique

une constante du mouvement.

Dans le cas de la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$, il est **pratique** d'introduire le **potentiel électrique** $V(r)$ par la relation

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(\vec{r})} \quad (5)$$

Mathématiquement, $V(r)$ est un champ scalaire, i.e. une fonction $V(x, y, z)$ des trois coordonnées x, y et z définie en tout point de l'espace. La relation (5) ne définit le potentiel qu'à **une constante près**. On pourra choisir cette constante comme on le souhaite. Souvent, on impose l'annulation du potentiel à l'infini. L'intérêt du potentiel est que la relation entre la force et l'énergie potentielle conduit à

$$\vec{F} = q\vec{E} = -q\overrightarrow{\text{grad}} V = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

de sorte que l'énergie potentielle associée à la force électrostatique s'exerçant sur une charge q située au point $\vec{r}$ est

$$\boxed{E_p = qV(\vec{r}).}$$

Considérons de nouveau l'exemple d'une charge q dans un champ uniforme $\vec{E} = E_0\vec{u}_x$. Le potentiel $V(\vec{r})$ associé à ce champ satisfait par définition la relation

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Leftrightarrow \begin{cases} E_x = E_0 = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = 0 = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = 0 = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

Des deux dernières équations on tire le fait que V ne dépend ni de y ni de z . C'est donc une fonction uniquement de x . En intégrant la première relation, il vient

$$E_0 = -\frac{dV}{dx} \Leftrightarrow V(x) = -\int E_0 dx = -E_0x + \text{Cste.}$$

L'énergie potentielle de la charge q est donc

$$E_p(x, y, z) = qV(x, y, z) = -qE_0x + \text{Cste}'.$$

La force étant conservative, l'énergie totale est une constante du mouvement. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2(0) - qE_0x(0) + \text{Cste}' &= \frac{1}{2}mv^2(t) - qE_0x(t) + \text{Cste}' \\ \Leftrightarrow v^2(t) &= v^2(0) + \frac{2qE_0}{m}[x(t) - x(0)] \end{aligned}$$

Imaginons qu'on place deux électrodes planes en vis-à-vis perpendiculairement à l'axe (Ox) . Cette formule permet de calculer la vitesse d'un électron lorsqu'il atteint la seconde électrode après avoir été arraché de la première. Si L est la distance entre les deux électrodes, cette vitesse sera $v = \sqrt{\frac{2qE_0L}{m}}$ s'il a été arraché sans vitesse. Notons que la variation d'énergie cinétique est proportionnelle à la différence de potentiel électrique :

$$\Delta E_c = -\Delta E_p = qE_0L = q\Delta V.$$

La différence de potentiel est aussi appelée **tension électrique** .

1.1.3.3. Potentiel créé par une charge ponctuelle

On vu que le champ électrique créé au point $\vec{r}$ de l'espace par une charge q_1 **statique** située au point $\vec{r}_1$ est (3)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{\|\vec{r} - \vec{r}_1\|^3} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{x-x_1}{[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]^{3/2}} \\ \frac{y-y_1}{[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]^{3/2}} \\ \frac{z-z_1}{[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]^{3/2}} \end{pmatrix}.$$

Il en découle que le potentiel est ⁽¹¹⁾

$$V(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_1\|} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}. \quad (6)$$

En effet, on a par exemple pour la coordonnées x

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}} \right] \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \times -\frac{1}{2} \times \frac{2(x-x_1)}{[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2]^{3/2}} \\ &= -E_x \end{aligned}$$

En procédant de même avec les coordonnées y et z , on retrouve bien la relation

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$$

On remarquera que les courbes équipotentielles $V = \text{Cste}$ forment des cercles concentriques autour de la charge q_1 :

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_1\|} = \text{Cste} &\Leftrightarrow \|\vec{r} - \vec{r}_1\| = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \text{Cste}} \\ &\Leftrightarrow (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \text{Cste}} \right)^2 \end{aligned}$$

Puisque le champ électrique est radial, il est en tout point perpendiculaire à ces courbes équipotentielles. Ce résultat est général ⁽¹²⁾ . Si M se déplace le long d'une courbe équipotentielle, on doit avoir $dV = 0$, ce qui n'est possible que si $\vec{E}$ est perpendiculaire au vecteur déplacement $d\vec{\ell}$. On en conclue que les courbes équipotentielles sont en tout point perpendiculaires au champ électrique.

⁽¹¹⁾ Comme tout ce qu'on vous enseigne en première année, cette relation n'est bien évidemment pas exacte mais approchée. En tenant compte de corrections quantiques, le potentiel est

$$V(\vec{r}) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 + \frac{\alpha^{5/2}}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{a_0}{r} \right)^{3/2} e^{-\frac{2r}{\alpha a_0}} + \dots \right]$$

où $\alpha \simeq 1/137$ est la constante de structure fine et a_0 le rayon de l'atome de Bohr. Pour des distances supérieures à $a_0/137 \simeq 10^{-12} \text{ m}$, le potentiel coulombien reste une très bonne approximation.

⁽¹²⁾ Pour le démontrer, considérons un déplacement infinitésimal du point M :

$$d\vec{\ell} = d\vec{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

1.2. Électrostatique

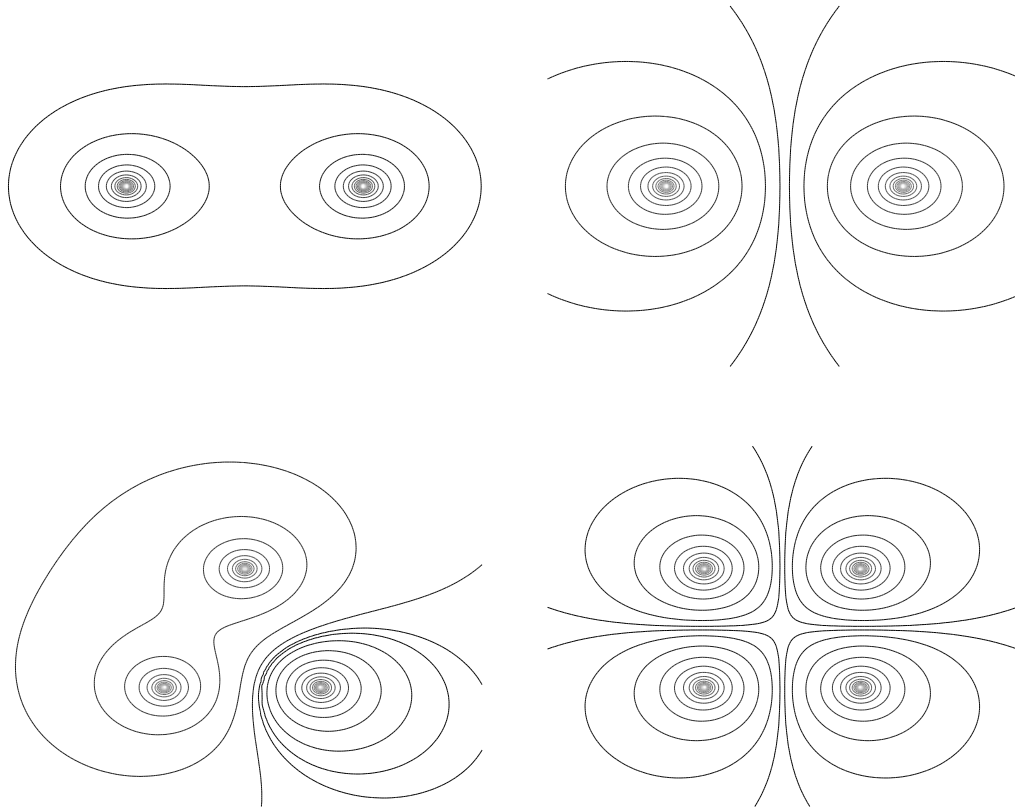


Figure 9 : Exemples de potentiels créés par des charges ponctuelles. Pouvez-vous déterminer où se trouvent ces charges et quel est leur signe ?

1.2. Électrostatique

L'électrostatique correspond à l'étude des champs électriques créés par une assemblée de charges immobiles.

Pré-requis : le chapitre précédent !

Savoirs à assimiler : champ et potentiel électriques d'une assemblée de charges ponctuelles, potentiel créé par un dipôle, énergie potentielle d'un dipôle dans un champ, notion de distribution de charge continue, champ et potentiel électriques d'une distribution continue de charge, théorème de Gauss, champ créé par un plan chargé, conditions de passage du champ électrique.

Au cours de ce déplacement, la variation du potentiel est

$$\begin{aligned}dV &= V(x + dx, y + dy, z + dz) - V(x, y, z) \\&= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\&= \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} \\&= -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}\end{aligned}$$

Savoir-faire : déterminer la direction du champ électrique en exploitant les plans de symétrie de la distribution de charge, déterminer la dépendance du champ et du potentiel en exploitant les transformations laissant la distribution de charge invariante, calculer le champ électrique et/ou le potentiel en intégrant une distribution de charge, calculer le champ électrique en appliquant le théorème de Gauss sur une surface judicieusement choisie.

Outils mathématiques : développement de Taylor, systèmes de coordonnées, équations paramétriques d'un cercle, d'une sphère ou d'un cylindre, intégration sur un volume, une surface ou une courbe de $\mathbb{R}^3$, calcul du flux d'un champ de vecteur à travers une surface fermée.

Bibliographie : Comme pour les chapitres précédents : beaucoup de livres de qualité à la BU (2ème étage). A vous de trouver celui qui vous convient le mieux (cela sous-entend qu'il faut commencer par en feuilleter un certain nombre) ! Citons :

R. Feynman, R.B. Leighton et M.L. Sands (1965)

Le cours de physique de Feynman, électromagnétisme, Dunod

J.P. Pérez, R. Carles, R. Fleckinger (2002) *Electromagnétisme*, Dunod

D. Cordier (2004) *Cours de physique : électromagnétisme 1*, Dunod

Pas grand chose sur Internet et beaucoup de sources très peu fiables ! Je vous le déconseille. Si vous y tenez vraiment, il y a sur YouTube

Walter Lewin (2015) 8.02x - *Physics II: Electricity and Magnetism*

1.2.1. Champ électrique créé par une distribution de charges

1.2.1.1. Principe de superposition

On vu que le champ électrique créé au point $\vec{r}$ de l'espace par une charge q_1 située au point $\vec{r}_1$ est (3)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{\|\vec{r} - \vec{r}_1\|^3}$$

et que le potentiel associé est (6)

$$V(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_1\|}.$$

Une charge test q située au point $\vec{r}$ et plongée dans ce champ électrique ressent une force $\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r})$. Vous avez vu au premier semestre que la force gravitationnelle était additive ⁽¹³⁾, i.e. la force totale créée par deux masses est la somme des forces créées par chacune des deux masses. On fera la même hypothèse en électrostatique ⁽¹⁴⁾. C'est ce qu'on appelle le **principe de superposition** : le champ électrique créé par une assemblée de charges ponctuelles q_i ($i = 1, \dots, N$) situées en des points $\vec{r}_i$ de l'espace est égal à la somme des champs électriques créés par chacune des charges :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3}}$$

⁽¹³⁾ là encore, c'est une approximation !

⁽¹⁴⁾ et cette fois, il semble que ce ne soit pas une approximation !

1.2. Électrostatique

Puisque le gradient est linéaire, le potentiel total est également la somme des potentiels :

$$V(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 ||\vec{r} - \vec{r}_i||}. \quad (7)$$

1.2.1.2. Symétrie de la distribution de charge

Supposons que l'assemblée de charges soit symétrique par rapport au plan (Oxy) , i.e. pour toute charge q_i située au dessus du plan $\vec{r}_i = (x_i \ y_i \ z_i)$, il existe une autre charge $q_j = q_i$ située en dessous du plan, i.e. $\vec{r}_j = (x_i \ y_i \ -z_i)$. On va montrer qu'en tout point $\vec{r} = (x \ y \ 0)$ dans le plan (Oxy) , le champ électrique appartient également au plan. Séparons la somme en deux, tout d'abord les charges au-dessus du plan puis celles en dessous :

$$\begin{aligned} E_z(x, y, 0) &= \vec{E}(x, y, 0) \cdot \vec{u}_z \\ &= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{-z_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z_i^2]^{3/2}} \\ &= \sum_{i / z_i > 0} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{-z_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z_i^2]^{3/2}} \\ &\quad + \sum_{i / z_i < 0} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{-z_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z_i^2]^{3/2}} \\ &= - \sum_{i / z_i > 0} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{|z_i|}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z_i^2]^{3/2}} \\ &\quad + \sum_{i / z_i < 0} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{|z_i|}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z_i^2]^{3/2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il reste donc un champ électrique dans le plan :

$$\vec{E}(x, y, 0) = E_x(x, y, 0)\vec{u}_x + E_y(x, y, 0)\vec{u}_y$$

La démonstration s'étend à tout plan de symétrie de l'assemblée de charges. De manière générale, on a donc l'énoncé suivant :

P est un plan de symétrie de la distribution de charge si pour toute charge q_i située au point $\vec{r}_i$, on peut trouver une seconde charge identique q_i située au point symétrique de $\vec{r}_i$ par rapport au plan P . Lorsqu'existe un tel plan de symétrie, le champ électrique appartient au plan pour tout point M du plan, i.e. sa composante perpendiculaire au plan s'annule.

En dehors du plan de symétrie, on ne peut pas prédire *a-priori* la direction du champ électrique.

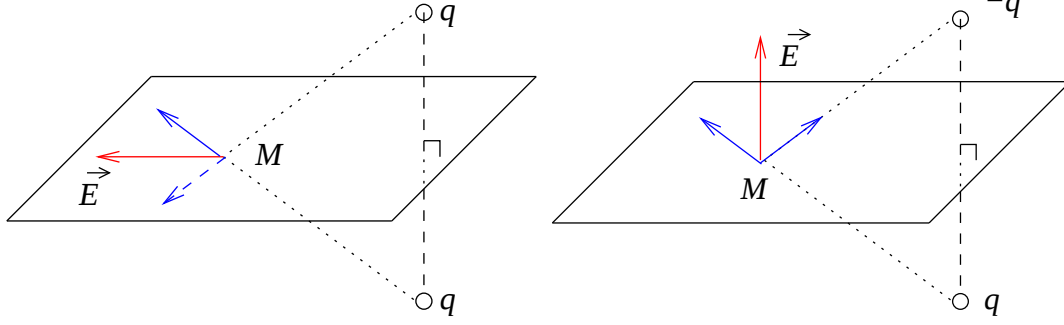


Figure 10 : Le champ électrique appartient aux plans de symétrie de la distribution de charges et est perpendiculaire à ses plans d'anti-symétrie. La figure en présente une démonstration graphique.

De la même manière, P est un plan d'anti-symétrie de la distribution de charge si pour toute charge q_i située au point $\vec{r}_i$, on peut trouver une seconde charge opposée $-q_i$ située au point symétrique de $\vec{r}_i$ par rapport au plan P . Lorsqu'existe un tel plan d'anti-symétrie, le champ électrique est perpendiculaire au plan pour tout point M du plan, i.e. ses deux composantes dans le plan s'annulent.

1.2.1.3. Champ et potentiel créés par un dipôle

On considère le dipôle électrique de la figure 11 formé de deux charges $+q$ et $-q$ séparées d'une distance d . Tous les plans contenant l'axe (Oz) sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Pour tout point M , le plan sous-tendu par les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ du repère local dans le système de coordonnées sphériques (§ 1.4.2.3.) est un plan de symétrie de la distribution de la charge de sorte que le champ électrique n'a pas de composante suivant $\vec{u}_\phi$. Par ailleurs, la distribution de charge est invariante sous la rotation d'axe (Oz) , i.e. d'angle ϕ , donc le champ électrique et le potentiel sont indépendants de la coordonnée ϕ . On peut se limiter au calcul dans un plan $\phi = \text{Cste}$.

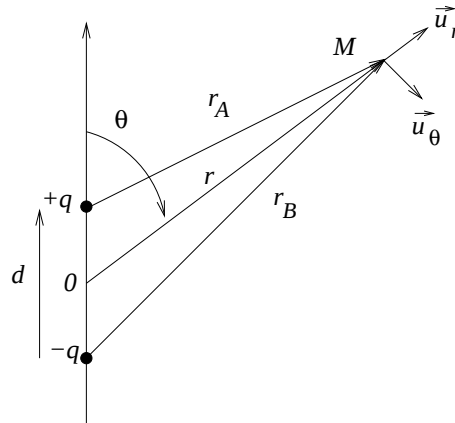


Figure 11 : Dipôle électrique.

D'après (7), le potentiel électrique créé au point $\vec{r}$ par le dipôle électrique est en utilisant les notations de la figure 11 :

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

1.2. Électrostatique

d'où à l'ordre le plus bas

$$\begin{aligned}
 V(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{r} - d/2\vec{u}_z\|} - \frac{1}{\|\vec{r} + d/2\vec{u}_z\|} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{d^2/4 + r^2 - dr \cos \theta}} - \frac{1}{\sqrt{d^2/4 + r^2 + dr \cos \theta}} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{r^2} - \frac{d}{r} \cos \theta \right) \right] - \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{r^2} + \frac{d}{r} \cos \theta \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{1}{r^2} \right) \right] \\
 &= \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{r^3} \right)
 \end{aligned} \tag{8}$$

Le potentiel s'écrit alors à grande distance du dipôle

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}} \tag{9}$$

où on a introduit le **moment dipolaire**

$$\vec{p} = q\vec{d}.$$

Notons que l'expression (9) est invariante sous les rotations d'angle θ et ϕ car le rayon r et le produit scalaire $\vec{p} \cdot \vec{r}$ ne sont pas affectés par la transformation à condition d'opérer également la rotation sur $\vec{p}$. Par conséquent, dans le cas d'un moment dipolaire $\vec{p}$ quelconque, l'expression (9) du potentiel reste valable puisqu'on pourra toujours opérer une rotation pour le ramener sur l'axe (Oz).

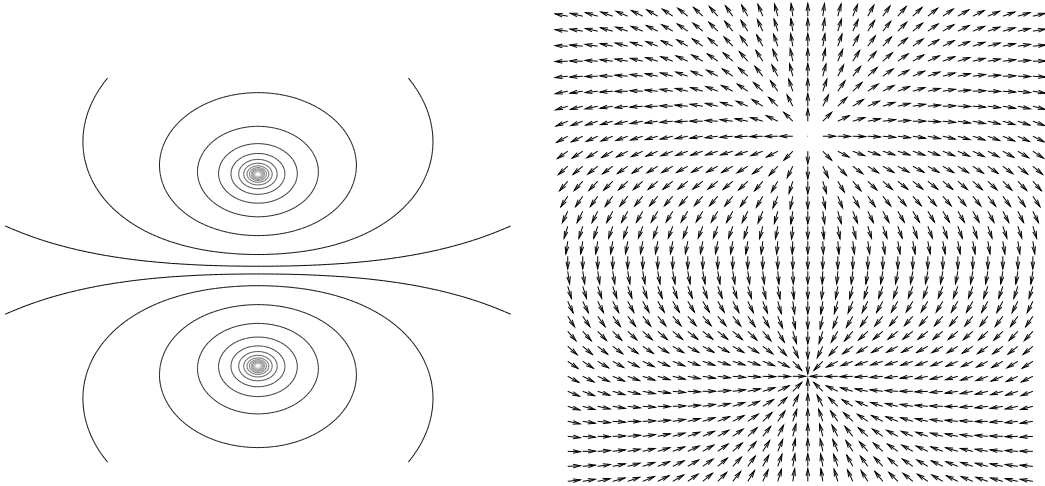


Figure 12 : A gauche, courbes équipotentiels créées par un dipôle formé de deux charges situées en $(0 \ 1)$ et $(0 \ -1)$. A droite, direction du champ électrique.

Le champ électrique dérive de l'expression (8) :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} \left(\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \end{pmatrix} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

où on a utilisé l'expression (21) du gradient en coordonnées sphériques. La chose **importante** dont il faut se souvenir est que pour une charge ponctuelle à l'origine

$$V(r) \sim \frac{1}{r}, \quad E(r) \sim \frac{1}{r^2}$$

alors que pour un dipôle, globalement électriquement neutre,

$$V(r) \sim \frac{1}{r^2}, \quad E(r) \sim \frac{1}{r^3}.$$

Le champ électrique (ou le potentiel) d'un objet électriquement neutre n'est pas nul mais décroît plus rapidement que celui d'une charge.

1.2.1.4. Dynamique d'un dipôle dans un champ électrique

La résultante des forces électrostatiques agissant sur un dipôle placé dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$ est nulle. Alors qu'un champ électrique accélère une particule chargée, le dipôle n'est sensible qu'au gradient du champ électrique. En revanche, un champ électrique uniforme induit un **couple** :

$$\vec{\Gamma}_0 = \frac{\vec{d}}{2} \wedge \vec{F}_{+q} - \frac{\vec{d}}{2} \wedge \vec{F}_{-q} = q\vec{d} \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

Lors d'une rotation du dipôle d'un angle infinitésimal $d\theta$, le travail du couple est

$$\delta W = ||\vec{\Gamma}_0|| d\theta = pE \sin(\vec{p}, \vec{E}) d\theta = pE \sin \theta d\theta$$

La force de Coulomb étant conservative, le travail est égal et opposé à la variation d'énergie potentielle. L'énergie potentielle du dipôle est donc, à une constante près,

$$E_p = -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

On retrouve également cette relation en utilisant le potentiel V dont le champ électrique dérive :

$$\begin{aligned} E_p &= qV(\vec{d}/2) - qV(-\vec{d}/2) \\ &= qV(0) + q\vec{\nabla}V \cdot \frac{\vec{d}}{2} - qV(0) + q\vec{\nabla}V \cdot \frac{\vec{d}}{2} \\ &= q\vec{\nabla}V \cdot \vec{d} \\ &= -q\vec{d} \cdot \vec{E}(0) \\ &= -\vec{p} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

1.2.1.5. Distribution de charge continue

A l'échelle macroscopique, les distributions de charge apparaissent continues. Elles peuvent être distribuées dans des volumes, sur des surfaces ou le long de courbes. Dans le premier cas, la distribution de charge est caractérisée par une densité volumique de charge $\rho(\vec{r})$ (mesurée en C/m^3). Pour calculer le champ électrique créé en un point $\vec{r}$

1.2. Électrostatique

par ce volume, on commencera par le découper en volumes élémentaires

$$d^3\vec{r} = dx dy dz$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes, chacun de ces volumes élémentaires est un cube dont les côtés sont dirigés suivant les trois vecteurs $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ du repère local. L'élément de volume $d^3\vec{r}'$ situé au point $\vec{r}'$ porte une charge (infinitement faible)

$$dq = \rho(\vec{r}')d^3\vec{r}'$$

Puisque l'élément de volume $d^3\vec{r}'$ est infinitement petit, on peut l'assimiler à un point. Il crée par conséquent un champ électrique, lui aussi infinitement petit,

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3} = \frac{\rho(\vec{r}')d^3\vec{r}'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3}.$$

D'après le principe de superposition, le champ électrique total est obtenu en ajoutant les champs créés par chacun des volumes élémentaires. Ces derniers n'étant pas dénombrables, la somme prend la forme d'une intégrale :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \int_V d\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3} d^3\vec{r}'}$$

Vous vous étonnerez peut-être du fait que l'intégrand est un champ de vecteur et non une fonction. Il faut comprendre cette expression comme trois relations pour les trois composantes du champ, par exemple

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3} d^3\vec{r}' \\ &= \int_V \frac{\rho(x', y', z')}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dx' dy' dz' \end{aligned}$$

On peut écrire une expression analogue pour le potentiel créé par la distribution de charge continue :

$$\boxed{V(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 ||\vec{r} - \vec{r}'||} d^3\vec{r}'}$$

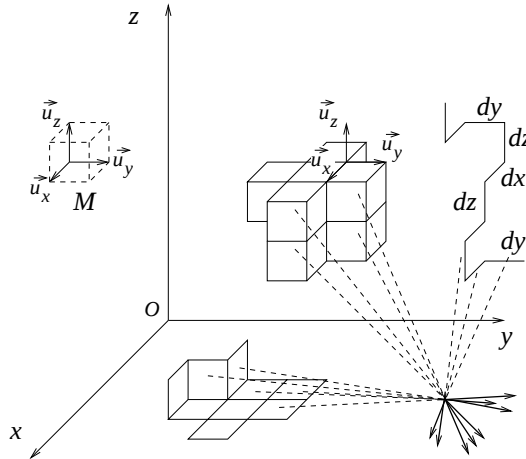


Figure 13 : Construction d'un volume, d'une surface ou d'une courbe par

empilement de volumes élémentaires, de surfaces élémentaires ou d'éléments de longueur. Chacun crée un champ électrique infiniment petit.

Dans le cas d'une charge distribuée sur une surface, la distribution est caractérisée par une densité surfacique de charge $\sigma(\vec{r})$ (mesurée en C/m^2). Pour calculer le champ électrique créé en un point $\vec{r}$, on commencera par découper la surface en surfaces élémentaires dS

$$dx dy \text{ ou } dy dz \text{ ou } dx dz$$

Chaque élément de surface dS' centré au point $\vec{r}'$ porte une charge infinitésimale

$$dq = \sigma(\vec{r}')dS'$$

Le champ électrique créé au point $\vec{r}$ est donc

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r}')dS'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3}$$

Le champ électrique total est obtenu par intégration sur la surface :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3} dS'.$$

De manière analogue, le potentiel électrique s'écrit

$$V(\vec{r}) = \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 ||\vec{r} - \vec{r}'||} dS'.$$

Finalement, dans le cas d'une charge distribuée le long d'une courbe, la distribution est caractérisée par une densité linéique de charge $\lambda(\vec{r})$ (mesurée en C/m). On découpe la courbe en éléments de longueur $d\ell$

$$dx \text{ ou } dy \text{ ou } dz$$

Chaque élément de longueur $d\ell'$ centré au point $\vec{r}'$ porte une charge infinitésimale

$$dq = \lambda(\vec{r}')d\ell'$$

Le champ électrique créé au point $\vec{r}$ est donc

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda(\vec{r}')d\ell'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3}$$

Le champ électrique total est obtenu par intégration sur la surface :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_C \frac{\lambda(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3} d\ell'$$

De manière analogue, le potentiel électrique s'écrit

$$V(\vec{r}) = \int_C \frac{\lambda(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 ||\vec{r} - \vec{r}'||} d\ell'.$$

1.2.1.6. Champ électrique créé par un fil chargé

On considère un fil infini portant une densité linéique de charge λ uniforme. Pour simplifier les calculs, on choisit l'axe (Oz) le long du fil. La distribution de charge est

1.2. Électrostatique

invariante sous la translation dans la direction de (Oz) et sous la rotation d'axe (Oz) . Dans le système de coordonnées cylindriques, le champ électrique est donc indépendant de la coordonnée z et de l'angle θ , i.e. $\vec{E} = \vec{E}(r)$. Tous les plans perpendiculaires à l'axe (Oz) ainsi que tous les plans contenant l'axe (Oz) sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Pour un point M quelconque, M appartient à deux plans de symétrie : le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ d'équation $z = \text{Cste}$ ainsi que le plan contenant à la fois l'axe (Oz) et le point M , i.e. $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$. Le champ électrique $\vec{E}(M)$ au point M doit appartenir à ces deux plans donc à leur intersection, i.e. être dirigé suivant $\vec{u}_r$. On a donc finalement

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$$

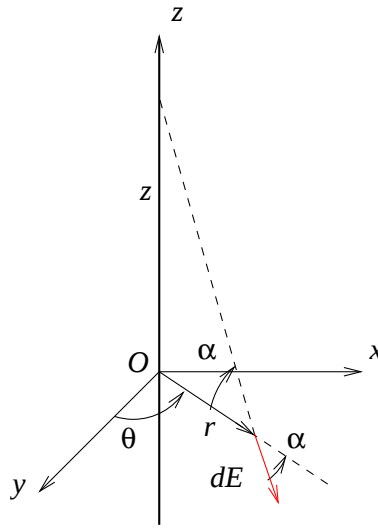


Figure 14 : Notations utilisées pour le calcul du champ électrique créé par un fil infini.

L'élément infinitésimal de champ électrique créé par un élément de longueur $d\ell = dz$ sur le fil a pour composante suivant $\vec{u}_r$

$$dE_r = d\vec{E} \cdot \vec{u}_r = dE \cos \alpha = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)} \frac{r}{\sqrt{z^2 + r^2}}.$$

Le champ électrique total est obtenu par intégration :

$$E_r = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (10)$$

Pour calculer cette intégrale, on procède à un changement de variable. La position de $d\ell$ peut tout aussi bien être repéré par sa coordonnée z que pour l'angle α . En utilisant

le fait que $z = r \tan \alpha$ et donc $dz = r d\alpha / \cos^2 \alpha$ ainsi que $\cos \alpha = r / \sqrt{z^2 + r^2}$, il vient

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left(\frac{\cos \alpha}{r} \right)^3 \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha d\alpha \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\sin \alpha]_{-\pi/2}^{+\pi/2} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

Le potentiel est obtenu par intégration

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \Leftrightarrow V = -\int E_r dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \text{Cste}$$

où on a utilisé le fait que V ne dépend que de r du fait des symétries de la distribution de charge.

Dans le cas d'un fil fini, on perd l'invariance par translation dans la direction (Oz) et le plan médiateur du fil est le seul plan de symétrie perpendiculaire au fil. La direction du champ électrique ne peut donc être déterminée qu'aux points appartenant à ce plan. En plaçant l'origine au centre du fil,

$$\vec{E}(r, \theta, z = 0) = E(r) \vec{u}_r$$

puisque deux plans de symétrie (les plans (MOz) et (Oxy)) passent par le point M . Pour un fil de longueur $2L$, la relation (10) devient

$$E_r = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^{+L} \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

de sorte que le changement de variable $z = r \tan \alpha$ conduit à

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\text{Arcsin } L/\sqrt{r^2+L^2}}^{+\text{Arcsin } L/\sqrt{r^2+L^2}} \cos \alpha d\alpha \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\sin \alpha]_{-\text{Arcsin } L/\sqrt{r^2+L^2}}^{+\text{Arcsin } L/\sqrt{r^2+L^2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{2L}{\sqrt{r^2 + L^2}} \end{aligned}$$

1.2.1.7. Champ électrique créé par un cylindre fini chargé en surface

On considère un cylindre fini dont l'axe de révolution est dirigé suivant (Oz). On note σ la densité surfacique de charge, R le rayon du cylindre et $2L$ sa hauteur. Tous les plans passant par l'axe (Oz) sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Pour un point M quelconque, M n'appartient qu'au plan de symétrie contenant également (Oz). Dans le système de coordonnées cylindriques, ce plan contient $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$ et donc $E_\theta = 0$. Pour tout point M de l'axe, M appartient à tous les plans de symétrie contenant (Oz) et donc est dirigé suivant leur intersection, i.e. suivant $\vec{u}_z$. Par ailleurs, la distribution de charge est invariante sous la rotation d'axe (Oz) donc en coordonnées

1.2. Électrostatique

cyllindriques, le champ électrique ne dépend que de z :

$$\vec{E}(r=0) = E_z(z)\vec{u}_z$$

Chaque élément de surface $dS = R d\theta dz'$, centré sur un point N de coordonnées cylindriques $(R \ \theta \ z')$, porte une charge $dq = \sigma dS$. Le champ électrique créé au point M sur l'axe et donc de coordonnées cylindriques $(0 \ 0 \ z)$ est

$$dE(z) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0[(z' - z)^2 + R^2]}$$

de sorte que sa composante suivant (Oz) est

$$dE_z(z) = dE \cos \alpha = \frac{\sigma R d\theta dz'}{4\pi\epsilon_0[(z' - z)^2 + R^2]} \times \frac{z - z'}{\sqrt{(z' - z)^2 + R^2}}$$

où α est l'angle entre $\vec{NM}$ et $\vec{u}_z$. Notons qu'on peut également écrire

$$dE_z = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{NM} \cdot \vec{u}_z}{||\vec{NM}||^3}$$

où $\vec{NM} \cdot \vec{u}_z = \vec{OM} \cdot \vec{u}_z - \vec{ON} \cdot \vec{u}_z = z - z'$. En intégrant, il vient

$$\begin{aligned} E_z(z) &= -\frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-L}^L \frac{z' - z}{((z' - z)^2 + R^2)^{3/2}} dz' \\ &= -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_{(-L-z)^2+R^2}^{(L-z)^2+R^2} \frac{du}{2u^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{u^{1/2}} \right]_{(-L-z)^2+R^2}^{(L-z)^2+R^2} \\ &= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(z-L)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z+L)^2 + R^2}} \right] \end{aligned}$$

où on a posé $u = (z' - z)^2 + R^2$ de sorte que $du = 2(z' - z)dz'$. Dans la limite d'un cylindre infini, le champ électrique s'annule.

1.2.1.8. Champ électrique au centre d'une demi-sphère

On considère une demi-sphère de centre O , de rayon R et entièrement située dans le demi-espace $z \geq 0$ (hémisphère nord). La surface porte une densité surfacique de charge $+\sigma$. On se placera dans le système de coordonnées sphériques. La distribution de charge est invariante par rotation d'angle ϕ . Par ailleurs, tous les plans contenant l'axe (Oz) sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Par conséquent, le champ au centre est de la forme $\vec{E}(O) = E\vec{u}_z$. Tout élément de surface $dS = R d\theta \times R \sin \theta d\phi$ sur la demi-sphère porte une charge $dq = \sigma dS$ et crée un champ dont la composante suivant $\vec{u}_z$ est

$$dE_z = dE \cos \theta = -\frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta = -\frac{\sigma \sin \theta d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0} \cos \theta$$

En intégrant sur la demi-sphère, il vient le champ total

$$\begin{aligned} E_z &= \int dE_z = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \times \left[-\frac{\cos^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \times 2\pi \\ &= -\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \end{aligned}$$

De la même manière, le potentiel créé par l'élément de surface à l'origine est

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R \sin\theta d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0}$$

de sorte que le potentiel total est

$$\begin{aligned} \varphi(O) &= \int d\varphi = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0} [-\cos\theta]_0^{\pi/2} \times 2\pi \\ &= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

1.2.1.9. Champ électrique sur l'axe d'un disque chargé en surface

On considère un disque de rayon R portant une densité surfacique de charge σ uniforme. Pour simplifier les calculs, on choisit l'origine au centre du disque et l'axe (Oz) perpendiculaire au plan du disque.

La distribution de charge est invariante sous la rotation d'axe (Oz) donc en coordonnées cylindriques, le champ électrique est indépendant de l'angle θ , i.e. $\vec{E} = \vec{E}(r, z)$. Tous les plans contenant l'axe (Oz) ainsi que le plan $z = 0$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Pour un point M quelconque, M n'appartient qu'à un seul plan de symétrie. Dans le système de coordonnées cylindriques, ce plan contient les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$ du repère local. Par conséquent, $E_\theta = 0$. Pour un point M dans le plan $z = 0$, M appartient à deux plans de symétrie : le plan $z = 0$ et le plan contenant M et l'axe (Oz). Au point M , le champ électrique appartient à l'intersection de ces deux plans et est donc dirigé suivant $\vec{u}_r$. Enfin, pour tout point M de l'axe, M appartient à une infinité de plans de symétrie dont l'intersection est l'axe (Oz). Le champ électrique y est donc dirigé suivant $\vec{u}_z$.

1.2. Électrostatique

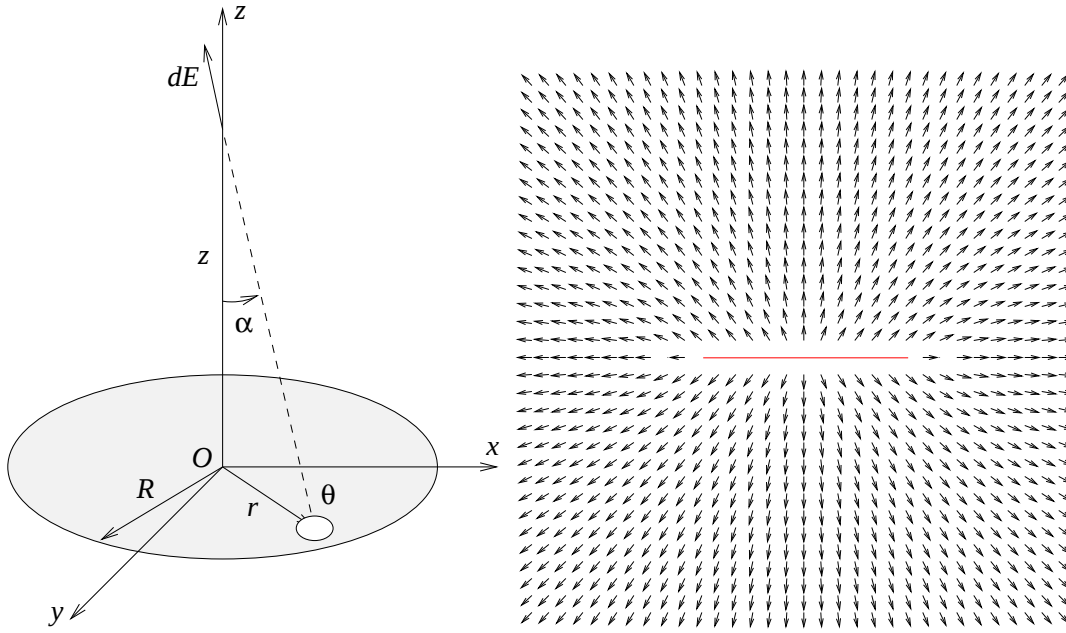


Figure 15 : Notations utilisées pour le calcul du champ électrique créé par le disque sur l'axe (à gauche) et champ électrique créé en tout point de l'espace (à droite).

Dans la suite, on se limite au calcul du champ sur l'axe. D'après ce qui précède

$$\vec{E} = E_z(z)\vec{u}_z.$$

L'élément infinitésimal de champ électrique créé par un élément de surface du disque a pour composante sur $\vec{u}_z$

$$dE_z = dE \cos \alpha = \frac{\sigma r d\theta dr}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)} \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

et donc en intégrant sur le disque, il vient

$$E_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr \frac{zr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[-\frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right]_0^R.$$

Pour $z > 0$, on a donc

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

alors que pour $z < 0$, on a

$$E_z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right].$$

Dans la limite $R \rightarrow +\infty$, on obtient le champ électrique créé par un plan infini chargé :

$$\vec{E} = \begin{cases} +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z, & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z, & z < 0 \end{cases}$$

1.2.2. Théorème de Gauss

1.2.2.1. Énoncé du théorème de Gauss

Considérons une distribution de charge. Pour toute surface **fermée** S enfermant un volume V , le flux du champ électrique à travers la surface S est égal, à une constante ε_0 près, à la somme des charges se trouvant à l'intérieur du volume V . Mathématiquement

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\varepsilon_0} \quad (11)$$

où $\partial V = S$ est le bord du volume V et $d\vec{S} = dS \vec{n}$ est un élément infinitésimal de la surface S dirigé normalement à la surface et orienté vers l'extérieur.

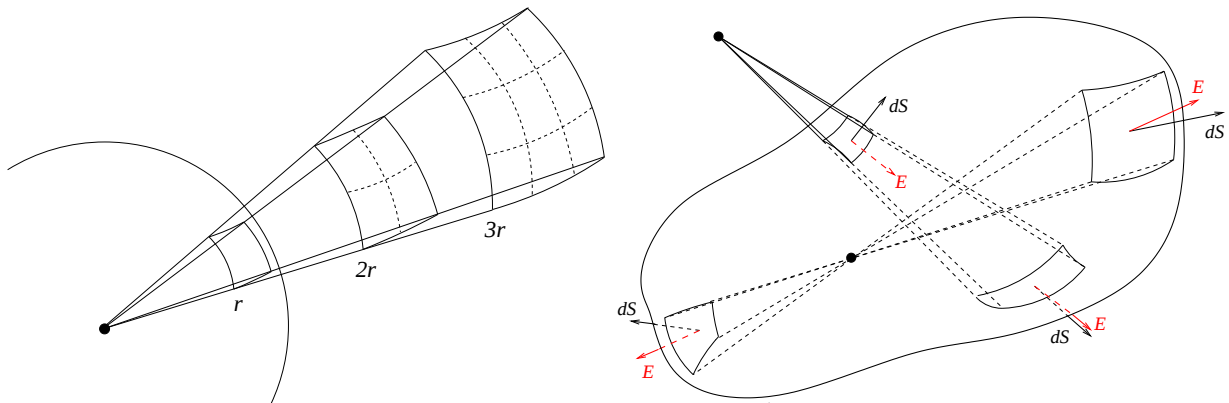


Figure 16 : “Démonstration” graphique du théorème de Gauss : à gauche, le flux du champ électrique à travers un élément de surface de la sphère de rayon r est proportionnel au nombre de lignes de champ que l’on fait s’échapper de la charge ponctuelle représentée par le disque noir. Si on double le rayon de la sphère, on quadruple la surface de l’élément de surface interceptant un même nombre de lignes de champ. Puisque le champ électrique décroît comme la distance au carré, il est divisé par quatre. Le flux $\int \vec{E} \cdot d\vec{S}$ reste donc quant à lui identique. Il ne dépend que du nombre de lignes de champ, i.e. de la quantité de la charge à l’intérieur de la surface. A droite, on a représenté deux charges, l’une à l’intérieur d’une surface fermée et l’autre à l’extérieur. Dans le premier cas, en prolongeant les lignes de champ, on intercepte la surface pour deux éléments de surface tous les deux vus depuis l’intérieur de la surface. Le flux $\int \vec{E} \cdot d\vec{S}$ sera de même signe pour ces deux surfaces. En revanche, dans le second cas, l’une des surfaces (celle du haut) seulement est vue depuis l’extérieur. Les flux seront de signes opposés. On peut montrer qu’en considérant les lignes de champs dans toutes les directions de l’espace, les flux se compensent exactement.

On utilisera ce théorème pour calculer le champ électrique créé par une assemblée de charges ou une distribution continue de charge. Le calcul de l’intégrale de gauche n’est possible que si on connaît *a-priori* la direction du champ électrique $\vec{E}$ en tout point de la surface afin de simplifier le produit scalaire $\vec{E} \cdot d\vec{S}$. Or la direction de $\vec{E}$ est facilement déterminée en tout point M appartenant à au moins deux plans de symétrie de la distribution de charge ou à un plan d’anti-symétrie. Dans la pratique, on se limitera à appliquer le théorème à des surfaces fermées dont chaque point appartient à au moins deux plans de symétrie de la distribution de charge. Voyons un exemple.

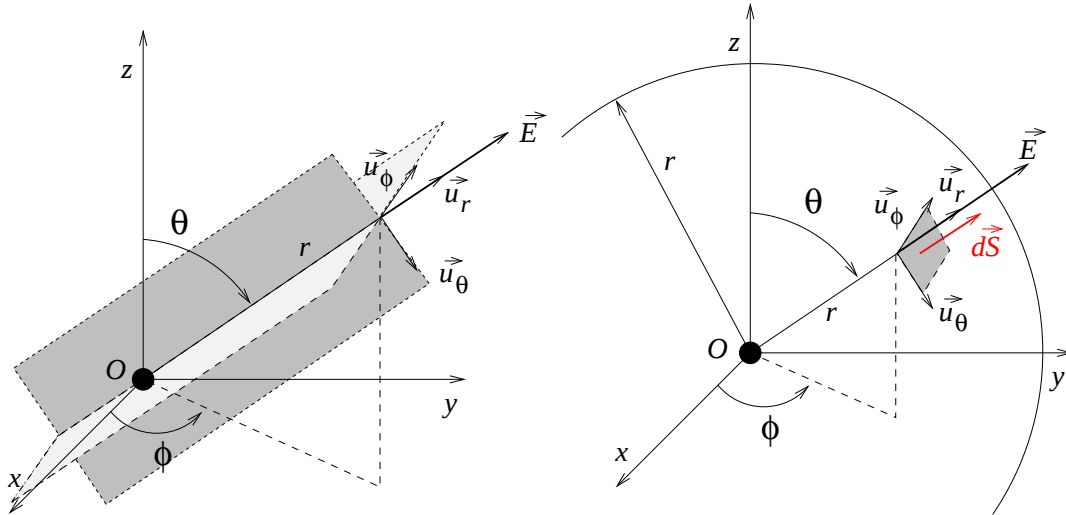


Figure 17 : La charge q est représentée par une sphère noire à l'origine. En un point M donné, on a tracé le repère local $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\phi$. Sur la figure de gauche, on a représenté deux des plans de symétrie de la distribution de charge, les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$. Le champ électrique $\vec{E}(M)$ appartient à leur intersection, i.e. $\vec{E} = E_r \vec{u}_r$. A droite, on a tracé la sphère de Gauss pour laquelle on va appliquer le théorème de Gauss. En gris apparaît l'élément de surface $d\vec{S}$. Le vecteur $d\vec{S}$ est normal à la surface.

Considérons l'exemple d'une charge ponctuelle q située à l'origine.

1. Détermination des plans de symétrie de la distribution de charge

Tous les plans passant par le point O sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Par conséquent, une infinité de plans de symétrie passent par un point M quelconque, tous les plans contenant la droite (OM) . Puisque le champ électrique $\vec{E}(M)$ doit appartenir à tous ces plans de symétrie, il est nécessairement dirigé suivant leur intersection, i.e. le long de (OM) . Dans le système de coordonnées sphériques, on aura donc

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = E_r(r, \theta, \phi) \vec{u}_r$$

i.e. $E_\theta = E_\phi = 0$. Attention, on n'a rien démontré sur la dépendance de la composante E_r avec les trois coordonnées r, θ, ϕ .

2. Transformations laissant la distribution de charge invariante

Toutes les rotations dont l'axe passe par le point O , notamment les rotations d'angles θ et ϕ , laissent la distribution de charge invariante. Puisque le champ électrique est créé par cette distribution de charge, il doit être le même avant et après rotation :

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = \vec{E}(r, \theta + \Delta\theta, \phi), \quad \vec{E}(r, \theta, \phi) = \vec{E}(r, \theta, \phi + \Delta\phi).$$

Ces deux égalités ne sont vraies pour tout $\Delta\theta$ et $\Delta\phi$ que si $\vec{E}$ ne dépend ni de θ , ni de ϕ . Par conséquent, le champ électrique ne dépend que de la coordonnée r :

$$\vec{E} = \vec{E}(r).$$

Attention, on n'a rien démontré dans le point 2 sur la direction du champ $\vec{E}$. Ce n'est qu'en combinant les informations données par les plans de symétrie de la distribution

de charge et par les transformations laissant la distribution de charge invariante qu'on conclue que

$$\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r.$$

3. Choix d'une surface de Gauss

Le théorème de Gauss est vrai pour toute surface fermée mais pour simplifier les calculs, on recherchera la surface pour laquelle le champ électrique est en tout point perpendiculaire à la surface. Puisque $\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r$, on choisit la surface telle que $d\vec{S} \sim \vec{u}_r$. La surface correspondante est une sphère de centre O . Pour calculer le champ électrique au point M , choisissons la sphère de centre O passant par le point M , i.e. de rayon r . L'équation de la sphère est $r = \text{Cste}$. Lorsqu'on déplace le point M sur la surface, on fait varier ses coordonnées θ et ϕ en maintenant r constant. Par conséquent, on construit l'élément de surface dS en s'appuyant sur les vecteurs $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\phi$ tous deux tangents à la surface. Les côtés du carré sont $r d\theta$ et $r \sin \theta d\phi$ de sorte que $dS = r d\theta \times r \sin \theta d\phi$. Finalement, $\vec{u}_r$ étant normal à la surface, on pose

$$d\vec{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{u}_r.$$

4. Calcul du flux du champ électrique

Grâce au choix judicieux de surface de Gauss fait au-dessus, on a la simplification

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= (r^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{u}_r) \cdot (E_r(r) \vec{u}_r) \\ &= r^2 \sin \theta E_r(r) d\theta d\phi \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r \\ &= r^2 \sin \theta E_r(r) d\theta d\phi \\ &= E dS. \end{aligned}$$

L'intégrale se réduit à

$$\begin{aligned} \int \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int r^2 \sin \theta E_r(r) d\theta d\phi \\ &= r^2 E_r(r) \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= r^2 E_r(r) \times [-\cos \theta]_0^\pi \times 2\pi \\ &= 4\pi r^2 E_r(r) \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que le champ électrique ne dépend ni de θ , ni de ϕ .

5. Application du théorème de Gauss

Il reste à déterminer la quantité de charge à l'intérieur de la surface de Gauss. Dans notre exemple, $Q_{\text{int}} = q$. Le théorème de Gauss se réduit à

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E_r(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}.$$

Le théorème de Gauss redonne bien l'expression du champ électrique créé par une charge ponctuelle à l'origine.

1.2.2.2. Conditions de passage du champ électrique

On considère une surface portant une densité surfacique de charge σ . Le flux du champ électrique à travers le parallélépipède de surface S et d'épaisseur $\epsilon \rightarrow 0$ de la

1.2. Électrostatique

figure 18 est d'après le théorème de Gauss (11)

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{n} S - \vec{E}_2 \cdot \vec{n} S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à la surface, $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ sont les champs électriques respectivement au dessus et en dessous de la surface. On a donc

$$E_1^n - E_2^n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

i.e. la composante normale à la surface du champ électrique est discontinue et présente un saut proportionnel à la densité de charge sur cette surface.

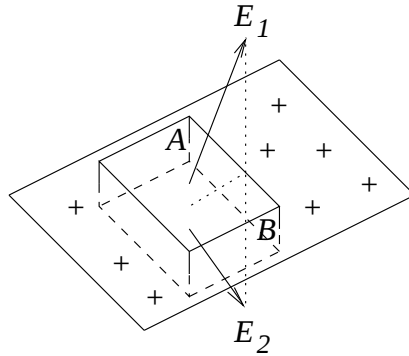


Figure 18 : Le champ électrique n'est pas conservée lors du passage d'une surface chargée.

En intégrant le champ électrique sur un contour traversant la surface et dont l'épaisseur tend vers zéro, il vient

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \oint \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{AB}$$

où on a utilisé la définition du potentiel. On a donc continuité des composantes tangentielles du champ électrique à travers la surface. On a finalement

$$\boxed{\vec{E}_2 = \vec{E}_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}}$$

1.2.2.3. Champ électrique créé par un plan chargé

On considère un plan d'équation $z = 0$ portant une densité surfacique de charge uniforme σ . Le plan $z = 0$, ainsi que tous les plans perpendiculaires au plan chargé sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Tout point M appartient donc à une infinité de plan de symétrie dont l'intersection est une droite (HM) parallèle à l'axe (Oz). Par conséquent, le champ électrique est dirigé suivant $\vec{u}_z$. Par ailleurs, la distribution de charge est invariante sous les translations d'axe (Ox) et (Oy) de sorte que le champ électrique et le potentiel sont indépendants des coordonnées x et y .

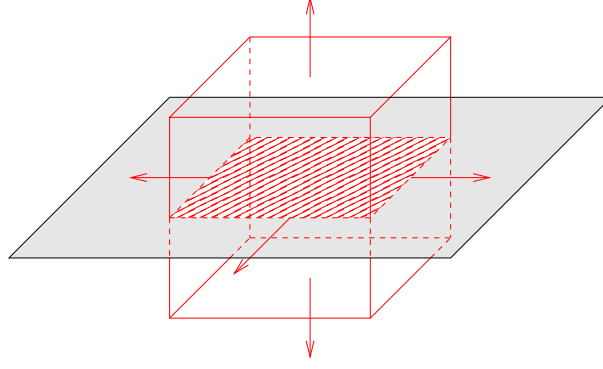


Figure 19 : Surface de Gauss pour le calcul du champ électrique créé par un plan chargé. La charge enfermée par la surface se trouve sur le rectangle hachuré.

On considère une surface de Gauss de forme parallélépipédique, possédant donc six faces qu'on choisies parallèles aux plans (Oxy) , (Oxz) et (Oyz) . Le flux du champ électrique à travers le parallélépipède s'écrit comme la somme des flux à travers les six faces :

$$\begin{aligned} \int_{\text{Parallél.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_{\text{Face avant}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Face droite}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Face haut}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &\quad + \int_{\text{Face arrière}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Face gauche}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Face bas}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

En explicitant les éléments de surface, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\text{Parallél.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_{\text{Face avant}} E(z) \vec{u}_z \cdot dydz \vec{u}_x + \int_{\text{Face droite}} E(z) \vec{u}_z \cdot dx dz \vec{u}_y + \int_{\text{Face haut}} E(z) \vec{u}_z \cdot dx dy \vec{u}_z \\ &\quad + \int_{\text{Face arrière}} E(z) \vec{u}_z \cdot (-dydz \vec{u}_x) + \int_{\text{Face gauche}} E(z) \vec{u}_z \cdot (-dx dz \vec{u}_y) + \int_{\text{Face bas}} E(z) \vec{u}_z \cdot (-dx dy \vec{u}_z) \end{aligned}$$

En utilisant les relations d'orthogonalité $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_z = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_z = 0$ et $\vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = 1$, il reste

$$\int_{\text{Parallél.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Face haut}} E(z) dx dy - \int_{\text{Face bas}} E(z) dx dy = [E(z_2) - E(z_1)] S$$

où S est la surface des faces haut et bas et z_1 et z_2 la coordonnée z des points formant ces points. Si le parallélépipède est entièrement au dessus (ou en dessous) du plan chargé, il ne renferme aucune charge et donc, d'après le théorème de Gauss, le flux du champ électrique est nul :

$$[E(z_2) - E(z_1)] S = 0 \Leftrightarrow E(z_2) = E(z_1) \quad \forall z_1, z_2 > 0 \text{ ou } z_1, z_2 < 0$$

i.e. le champ électrique est le même en tout point au-dessus (ou en dessous) du plan. S'il est à cheval sur le plan chargé, i.e. si $z_2 > 0$ et $z_1 < 0$, le parallélépipède enferme une charge σS . Le théorème de Gauss conduit alors à

$$[E(z_2) - E(z_1)] S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E(z_2) - E(z_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

1.2. Électrostatique

La symétrie haut-bas de la distribution de charge conduit finalement à la conclusion

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z, & (z > 0) \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z, & (z < 0) \end{cases} \quad (12)$$

1.2.2.4. Champ électrique créé par une sphère chargée en surface

On considère une sphère de rayon R et de centre O portant une densité surfacique de charge σ uniforme. Tous les plans passant par le centre O de la sphère sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Par conséquent, tout point M appartient à une infinité de plans de symétrie, i.e. tous les plans contenant la droite (OM) . Le champ électrique appartient à tous ces plans, i.e. à leur intersection, et donc il est radial. Par ailleurs, la distribution de charge est invariante sous toute rotation de centre O donc dans le système de coordonnées sphériques (§ 1.4.2.3.), le champ électrique ne dépend que de la distance r au centre de la sphère :

$$\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r.$$

On considère une surface de Gauss Σ définie comme la sphère de centre O et de rayon r ⁽¹⁵⁾. Tout élément $d\vec{S}$ de cette surface est donc radial, i.e.

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{u}_r.$$

Le flux du champ électrique est

$$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\Sigma} E_r(r) dS (\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r) = E_r(r) \int_{\Sigma} dS = 4\pi r^2 E_r(r).$$

La charge totale distribuée sur la surface de la sphère de rayon R est

$$Q = \int \sigma dS = \int \sigma R^2 \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi R^2 \sigma.$$

Le théorème de Gauss (§ 1.2.2.) s'écrit alors pour la surface Σ

$$4\pi r^2 E_r(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R \\ \frac{4\pi R^2 \sigma}{\varepsilon_0} & \text{si } r > R \end{cases} \Leftrightarrow E_r(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R \\ \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} & \text{si } r > R \end{cases}$$

On note que le champ électrique à l'extérieur de la sphère est égale à celui d'une charge ponctuelle $Q = 4\pi R^2 \sigma$ placée à l'origine. Le potentiel électrique ne dépend que de r pour les mêmes raisons de symétrie que $\vec{E}$ de sorte que

$$E_r(r) = -\frac{dV}{dr} \Leftrightarrow V(r) = -\int E_r(r) dr = \begin{cases} C_1 & \text{si } r < R \\ \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} + C_2 & \text{si } r > R \end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration. Par convention, on choisit $\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) =$

⁽¹⁵⁾ et non R comme on le voit trop souvent dans les copies d'examen ! Vous devez **absolument** comprendre pourquoi.

$C_2 = 0$. De plus, la continuité du potentiel s'écrit pour $r = R$

$$C_1 = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

On a donc finalement

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} & \text{si } r < R, \\ \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} & \text{si } r > R. \end{cases}$$

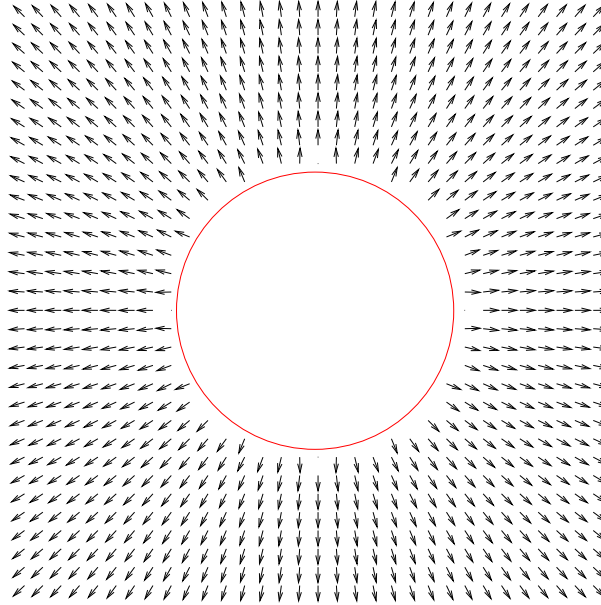


Figure 20 : Champ électrique créé en tout point de l'espace par une sphère chargée en surface. Remarquez que le champ électrique est parfaitement nul en tout point à l'intérieur de la sphère. De manière plus générale, si vous vous trouvez à l'intérieur d'une sphère chargée, vous ne risquez absolument rien quelque soit la quantité de charge que l'on dépose à la surface de la sphère. On parle de cage de Faraday.

1.2.2.5. Champ électrique créé par un cylindre infini chargé en volume

On considère un cylindre infini dont l'axe de révolution est dirigé suivant (Oz) . On note ρ la densité volumique de charge, R le rayon du cylindre. Tous les plans passant par l'axe (Oz) ainsi que tous les plans perpendiculaires à (Oz) sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Tout point M appartient de ce fait à deux plans de symétrie, qu'on pourra noter $(M, \vec{u}_z, \vec{u}_r)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ dans le système de coordonnées cylindriques. Le champ électrique $\vec{E}(M)$ appartient à ces deux plans, donc à leur intersection, i.e. le champ électrique est radial $\vec{E} = E\vec{u}_r$. De plus, la distribution de charge est invariante sous la rotation d'axe (Oz) et invariante sous la translation suivant (Oz) donc en coordonnées cylindriques, le champ électrique ne dépend que de la distance r à l'axe (Oz) :

$$\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r$$

1.2. Électrostatique

On considère une surface Σ définie comme le cylindre d'axe de révolution (Oz), de rayon r et de hauteur h . Le flux du champ électrique est la somme des flux du champ électrique à travers la base ($d\vec{S} = -rd\theta dr\vec{u}_z$) et le haut du cylindre ($d\vec{S} = rd\theta dr\vec{u}_z$) et à travers le côté ($d\vec{S} = rd\theta dz\vec{u}_r$). Le champ électrique étant radial, les flux à travers les deux premières surfaces sont nuls. Il reste

$$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Cote}} E_r(r) dS(\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r) = E_r(r) \int_{\text{Cote}} dS = 2\pi r h E_r(r)$$

Le théorème de Gauss (§ 1.2.2.) s'écrit alors pour la surface Σ

$$2\pi r h E_r(r) = \begin{cases} \pi r^2 h \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{si } r < R \\ \pi R^2 h \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{si } r > R \end{cases} \Leftrightarrow E_r(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r & \text{si } r < R \\ \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{R^2}{r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

La longueur infinie du cylindre conduit à un champ électrique en $1/r$. Le potentiel électrique est donc pathologique (comme un fil infini ...) puisqu'il diverge en $\ln r$. Le cas d'un fil de charge linéique $\lambda = \pi R^2 \rho$ correspond à l'abstraction $R \rightarrow 0$. Le potentiel et champ électrique se réduisent alors en effet à

$$E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \Leftrightarrow V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r + \text{Cste}$$

1.2.3. Phénomènes d'influence et condensateurs

Dans un conducteur, certains électrons sont libres de se déplacer dans tout le volume. Sous l'effet du champ électrique total $\vec{E}(\vec{r})$, ils se redistribuent dans le conducteur. L'équilibre mécanique est atteint lorsque le champ électrique est nul en tout point du volume V du conducteur :

$$\vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad \forall \vec{r} \in V.$$

Un conducteur parfait correspond au cas idéal où la résistance est nulle ⁽¹⁶⁾. Par conséquent, les électrons s'y redistribuent immédiatement à toute variation du champ électrique. On pourra donc conclure que le champ électrique y est toujours nul en tout point et à tout instant. Puisque $\vec{E}(\vec{r}) = 0$ en tout point du conducteur, le potentiel y est partout constant. La surface du conducteur étant une équipotentielle, le champ électrique à l'extérieur du conducteur est normal à la surface ⁽¹⁷⁾. Il est donc discontinu à la traversée de la surface du conducteur, ce qui signifie que la surface doit porter une densité surfacique de charge σ telle que

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$$

Lorsqu'on approche une charge q d'un conducteur isolé globalement neutre, les électrons libres se redistribuent sous l'effet du champ électrique créé par la charge extérieure. La

⁽¹⁶⁾ Contrairement au gaz parfait, le conducteur parfait existe. Même si tous les métaux présentent une résistance finie, ce n'est pas le cas des supraconducteurs. En dessous d'une température dite critique, la résistance électrique de ces derniers devient strictement égale à zéro ! Ce ne sont plus des électrons qui sont libres mais des paires d'électrons.

⁽¹⁷⁾ Rappelons que la relation $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ implique que lignes de champ et équipotentielles sont en tout point perpendiculaires.

face du conducteur la plus proche de la charge acquière une densité surfacique de signe opposé à q . On parle d'influence électrostatique.

Considérons une assemblée de charges Q_i de charge totale Q . On place ces charges à l'intérieur d'une enceinte fermée constituée d'un conducteur parfait. Le champ électrique est donc nul en tout point de l'enceinte. Le flux du champ électrique à travers toute surface contenue dans le conducteur (figure 21) est nul ce qui, d'après le théorème de Gauss (11), implique que la somme des charges à l'intérieur est nulle. La face interne du conducteur porte donc une charge totale $-Q$ distribuée de manière à totalement écranter la charge à l'intérieur de l'enceinte. Le conducteur étant initialement neutre, la charge sur la surface extérieure est $+Q$. Dans cette situation, on parle d'influence totale.

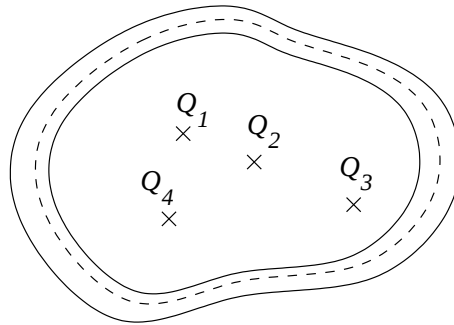


Figure 21 : Influence totale des charges sur la face intérieure du conducteur.
En pointillés, surface de Gauss considérée dans le texte.

Un condensateur est un composant électrique constitué de deux armatures. Dans les conditions normales d'utilisation, ces deux armatures sont en influence totale et portent donc des charges électriques égales en valeur absolue mais de signes opposés. Lorsqu'il est alimenté en courant électrique, le condensateur stocke de la charge électrique qu'il pourra ainsi restituer si le courant venait à être coupé. On verra que la charge électrique Q stockée par l'armature chargée positivement est proportionnelle à la différence de potentiel U entre les deux armatures :

$$Q = CU.$$

Le coefficient de proportionnalité C est appelée la **capacité** du condensateur et se mesure en farad (F).

1.2.3.1. Condensateur plan

On considère un condensateur plan constitué de deux plans conducteurs parallèles et séparés d'une distance a . On pourra choisir les deux plans d'équation $z = a/2$ et $z = -a/2$. Ces plans portent une densité surfacique de charge respectivement $+\sigma$ et $-\sigma$.

Tous les plans perpendiculaires aux plans chargés sont des plans de symétrie de la distribution de charge. On en déduit que le champ électrique est dirigé suivant $\vec{u}_z$. La distribution de charge est invariante sous les translations suivant $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ mais aussi sous dilatation. Comme on l'a montré (12), le champ électrique créé par le premier plan

1.2. Électrostatique

est

$$\vec{E}^{(1)}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z, & z > a/2 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z, & z < a/2 \end{cases}$$

et celui créé par le second

$$\vec{E}^{(2)}(z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z, & z > -a/2 \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z, & z < -a/2 \end{cases}$$

Il résulte du principe de superposition que le champ électrique total s'annule à l'extérieur du condensateur alors qu'à l'intérieur, la contribution de chacun des deux plans est de même signe et conduit à

$$\vec{E}(z) = \vec{E}^{(1)}(z) + \vec{E}^{(2)}(z) = \begin{cases} 0, & z > a/2 \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z, & -a/2 < z < a/2 \\ 0, & z < -a/2 \end{cases}$$

Entre les deux armatures, on a donc

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z$$

de sorte que le potentiel est

$$E_z = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{dV}{dz} \Leftrightarrow V = -\int E_z dz = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} z + \text{Cste}$$

Les lignes de champs sont dirigées suivant $\vec{u}_z$ et partent de l'armature positive pour rejoindre celle qui est négative. Les surfaces équipotentiels sont tous les plans parallèles à (Oxy) , i.e. d'équation $z = \text{Cste}$.

La différence de potentiel entre les deux armatures est finalement

$$U = V(a/2) - V(-a/2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} a$$

La charge totale portée par ce condensateur est infinie. Il en découle que sa capacité est également infinie. Considérons par conséquent un condensateur fini. En notant S la surface des armatures, la charge totale est maintenant finie et $Q = \sigma S$. Toutefois, les lignes de champ ne sont plus verticales mais déformées au voisinage du bord du condensateur. En négligeant cet effet de bord, on aura

$$U \underset{S \gg 1}{\simeq} \frac{Qa}{\varepsilon_0 S}$$

de sorte que la capacité de ce condensateur est

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{a}.$$

Pour augmenter la capacité, on peut considérer des armatures plus grandes mais aussi diminuer la distance a les séparant.

1.2.3.2. Condensateur cylindrique

On considère deux armatures cylindriques infinies d'axe (Oz) et de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. Chaque cylindre porte une densité surfacique respectivement $+\sigma$ et $-\sigma \frac{R_2}{R_1}$ afin que la charge totale soit nulle. En effet, sur une hauteur h , la charge sera $Q_2 = \sigma \times 2\pi R_2 h$ sur l'armature extérieure et $Q_1 = -\sigma \frac{R_2}{R_1} \times 2\pi R_1 h$ sur l'armature intérieure. On a bien $Q_2 = -Q_1$ comme attendu.

Les plans de symétrie de la distribution de charge sont tous les plans contenant (Oz) ainsi que tous les plans perpendiculaires à (Oz) . Dans le système de coordonnées cylindriques, deux plans de symétrie, $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ passent par un point M quelconque. On en conclue que

$$\vec{E}(M) = E_r \vec{u}_r$$

En outre, la distribution de charge est invariante sous la rotation d'angle θ et la translation suivant $\vec{u}_z$. Le champ électrique ne dépend donc que de r . Le flux du champ électrique à travers une surface de Gauss cylindrique de rayon r et de hauteur h est donc

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r(r) \int_0^{2\pi} \int_0^h r d\theta dz = 2\pi r h E_r(r)$$

Rappelons que les deux disques refermant la surface de Gauss ne contribuent pas au flux car le champ électrique y est perpendiculaire à $d\vec{S}$. La charge totale enfermée par cette surface de Gauss étant

$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} 0, & r < R_1 \\ -\sigma \frac{R_2}{R_1} \times 2\pi R_1 h, & R_1 < r < R_2 \\ 0, & r > R_2 \end{cases}$$

le théorème de Gauss conduit au champ électrique

$$E_r = \begin{cases} 0, & r < R_1 \text{ et } r > R_2 \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R_2}{r}, & R_2 > r > R_1 \end{cases}$$

Il en découle le potentiel entre les deux armatures

$$-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R_2}{r} = -\frac{dV}{dr} \Leftrightarrow V = \sigma R_2 \varepsilon_0 \ln r + \text{Cste}$$

Les lignes de champ sont radiales de sorte que les surfaces équipotentiels sont cylindriques.

La différence de potentiel entre les deux armatures est

$$U = V(R_2) - V(R_1) = \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (13)$$

Comme dans le cas du condensateur plan, la charge totale de chaque armature est infinie de sorte que la capacité du condensateur est également infinie. Si on considère un condensateur fini de hauteur h , la charge de l'armature extérieure devient $Q = \sigma \times 2\pi R_2 h$. En négligeant les effets, i.e. en supposant que la relation (13) reste une

1.2. Électrostatique

bonne approximation, il vient

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi h \varepsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

1.2.3.3. Circuit RC

1.2.3.3.1. Charge d'un condensateur

Considérons un circuit électrique constitué d'un générateur de tension continue U , d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C montés en série. Autour du circuit, la tension électrique s'annule (**loi des mailles**) :

$$\sum_i U_i = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \oint dV = 0.$$

Dans le cas du circuit décrit ci-dessus, il vient

$$U = Ri + \frac{Q}{C}.$$

Or l'intensité électrique est définie comme la charge électrique traversant une section d'un des fils du circuit par unité de temps. Mathématiquement,

$$i = \frac{dQ}{dt}.$$

La loi des mailles prend la forme d'une équation différentielle du premier ordre :

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = U.$$

La solution générale de l'équation sans second membre est

$$\begin{aligned} R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} \\ &\Leftrightarrow \frac{d \ln Q}{dt} = -\frac{1}{RC} \\ &\Leftrightarrow Q(t) = Ae^{-t/RC} \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est

$$Q = CU$$

de sorte que la solution générale est

$$Q(t) = CU + Ae^{-t/RC}.$$

En supposant le condensateur initialement vide, i.e. $Q(0) = 0$, on pourra déterminer la constante A . Il reste finalement

$$Q(t) = CU(1 - e^{-t/RC}).$$

On voit que le condensateur se charge exponentiellement vite avec un temps caractéristique de charge $\tau = RC$. A mesure que le condensateur se remplit, l'intensité électrique décroît :

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{U}{R} e^{-t/RC}.$$

1.2.3.3.2. Décharge d'un condensateur

Si, une fois le condensateur chargé, on débranche le générateur, la loi des mailles se réduit à

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow Q(t) = Q(0)e^{-t/RC}.$$

Le condensateur se décharge exponentiellement vite avec le même temps caractéristique que lors de la charge. La décharge s'accompagne d'un courant d'intensité

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q(0)}{RC}e^{-t/RC}. \quad (14)$$

1.2.3.4. Énergie stockée dans un condensateur

Considérons de nouveau le circuit formé d'un condensateur de capacité C et d'une résistance et supposons qu'au temps $t = 0$, l'armature positive du condensateur porte une charge Q_0 . On a vu que le courant circulant dans le circuit est donnée par (14)

$$i(t) = -\frac{Q(0)}{RC}e^{-t/RC}.$$

Or la résistance chauffe au passage du courant. L'énergie électrique est transformée en chaleur, c'est l'**effet Joule**. La puissance dissipée au temps t par la résistance est

$$P(t) = U(t)i(t) = Ri^2(t) = \frac{Q^2(0)}{RC^2}e^{-2t/RC}.$$

où $U = Ri$ est la différence de potentiel aux bornes de la résistance. Par conséquent, l'énergie totale dissipée est

$$\mathcal{E} = \int_0^{+\infty} P(t)dt = \frac{Q^2(0)}{RC^2} \int_0^{+\infty} e^{-2t/RC} dt = \frac{Q^2(0)}{RC^2} \left[-\frac{RC}{2} e^{-2t/RC} \right]_0^{+\infty} = \frac{Q^2(0)}{2C}$$

Or la charge $Q(0)$ est reliée à différence de potentiel initiale U_0 entre les deux armatures du condensateur par

$$Q(0) = CU(0)$$

de sorte que

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}C[U(0)]^2.$$

Dans le cas d'un condensateur plan de surface S et dont les armatures sont séparées d'une distance d , on a ⁽¹⁸⁾

$$Q = \sigma S, \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{U(0)}{d}.$$

Par conséquent, il vient

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}Q(0)U(0) = \frac{1}{2}\sigma S \times Ed = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 \times V.$$

où $V = dS$ est le volume entre les deux armatures. On arrive finalement à la conclusion qu'une région de l'espace baignée par un champ électrique $\vec{E}(r)$ possède une densité

⁽¹⁸⁾ On utilise les formules du condensateur plan infini. Il doit y avoir des déviations d'autant plus grande que le condensateur est petit.

1.3. Magnétostatique

d'énergie électrostatique

$$\frac{\varepsilon_0}{2} E^2(\vec{r}) .$$

1.3. Magnétostatique

La magnétostatique correspond à l'étude des champs magnétiques créés par une distribution de courants continus et immobiles.

Pré-requis : les deux chapitres précédents !

Savoirs à assimiler : intensité électrique, densité de courant pour un courant de volume et de surface, loi de Biot-Savart : champ créé par un élément de courant, théorème d'Ampère, conditions de passage du champ magnétique.

Savoir-faire : déterminer la direction du champ magnétique en exploitant les plans d'anti-symétrie de la distribution de courant, déterminer la dépendance du champ en exploitant les transformations laissant la distribution de courant invariante, calculer le champ magnétique une distribution de courant, calculer le champ magnétique en appliquant le théorème d'Ampère sur un contour judicieusement choisi.

Outils mathématiques : Comme au chapitre précédent : systèmes de coordonnées, équations paramétriques d'un cercle, d'une sphère ou d'un cylindre, intégration sur un volume, une surface ou une courbe de $\mathbb{R}^3$, calcul de la circulation d'un champ de vecteur le long d'un contour.

Bibliographie : Comme pour les chapitres précédents : beaucoup de livres de qualité à la BU (2ème étage). A vous de trouver celui qui vous convient le mieux (cela sous-entend qu'il faut commencer par en feuilleter un certain nombre) ! Citons :

R. Feynman, R.B. Leighton et M.L. Sands (1965)

Le cours de physique de Feynman, électromagnétisme, Dunod

J.P. Pérez, R. Carles, R. Fleckinger (2002) *Electromagnétisme*, Dunod

D. Cordier (2004) *Cours de physique : électromagnétisme 1*, Dunod

Pas grand chose sur Internet et beaucoup de sources très peu fiables ! Je vous le déconseille. Si vous y tenez vraiment, il y a sur YouTube

Walter Lewin (2015) 8.02x - *Physics II: Electricity and Magnetism*

1.3.1. Champ magnétique créé par une distribution de courants

1.3.1.1. Courant et densité de courant

Considérons un fil conducteur soumis à une différence de potentiel et, de ce fait, parcouru par un courant électrique. Dans le cas d'un métal, le courant est constitué d'électrons libres en mouvement. L'**intensité** électrique à travers une section S du fil est définie comme la quantité de charge traversant cette section par unité de temps. Mathématiquement, on notera

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

si $Q(t)$ est la quantité de charge ayant traversé la section au bout d'un temps t . L'intensité se mesure en ampère (A), équivalent au C/s.

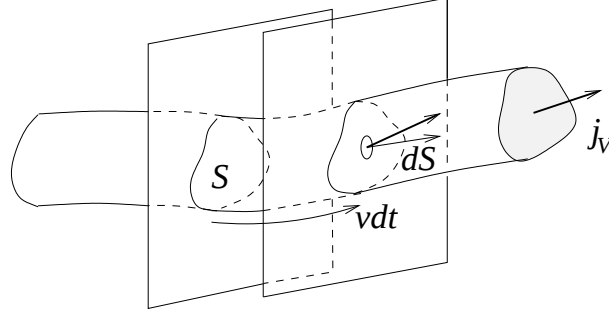


Figure 22 : Sections pratiquées sur un conducteur parcouru par un courant.

Le courant n'est pas nécessairement uniforme sur la section d'un conducteur. On peut imaginer par exemple qu'il soit plus fort au centre du fil que sur ses bords. Plutôt que de considérer l'intensité I , on préférera alors utiliser la densité de courant $\vec{j}_V(\vec{r})$ dont le module correspond à l'intensité à travers une section élémentaire dS :

$$I = \int_S \vec{j}_V \cdot d\vec{S}$$

où S est la section du conducteur et $d\vec{S}$ un élément de surface perpendiculaire à cette section. Si, dans le conducteur, les charges se déplacent toutes à la manière d'un fluide avec une vitesse $\vec{v}(\vec{r})$ alors celles traversant l'élément de surface dS entre les temps t et $t + dt$ sont celles se trouvant à une distance inférieure à vdt au temps t , i.e. celles se trouvant dans le cylindre de section dS et de hauteur vdt . La quantité de charge contenue dans ce cylindre est donc $dQ = \rho dS \times vdt$. Il en découle la densité de courant

$$\vec{j}_V = \rho \vec{v}.$$

Cette relation permet de mieux comprendre la nature vectorielle de la densité de courant $\vec{j}_V$: les électrons se déplaçant parallèlement à la section du fil ne la traverseront pas et donc ne contribuent pas à l'intensité.

Le transport de l'électricité est parfois assuré par des feuilles conductrices si fines qu'elles peuvent être considérées comme bidimensionnelles. On ne parle plus dans ce cas de courant de volume mais de courant en surface. Une section du conducteur n'est plus bidimensionnelle mais unidimensionnelle. L'intensité restant définie comme la quantité de charge traversant une section par unité de temps, on introduira une densité de courant $\vec{j}_S(\vec{r})$ telle que

$$I = \int_\ell \vec{j}_S \cdot \vec{n} d\ell$$

où $\vec{n}$ est un vecteur sur la surface du conducteur mais perpendiculaire à la section. On peut montrer que si σ est la densité surfacique de charge sur le conducteur alors

$$\vec{j}_S = \sigma \vec{v}.$$

Dans le domaine de l'électricité et de l'électronique, on considère les fils comme unidimensionnels. Toute section se réduit donc à un point et le concept de densité de courant devient inutile.

Exercice : Considérez une sphère de rayon R portant une densité surfacique de charge

1.3. Magnétostatique

σ et tournant sur elle-même autour de l'axe (Oz) avec une pulsation ω . Montrez que la densité de courant surfacique est $j_S(\theta) = \sigma R \sin \theta \omega$. L'intensité à travers un demi-cercle joignant les deux pôles de la sphère est alors $I = 2\sigma R^2 \omega$. Par ailleurs, montrez que la charge totale portée par la sphère est $4\pi R^2 \sigma$ et que cette charge traverse le demi-cercle durant le temps $T = 2\pi/\omega$, ce qui soit vous redonnez l'intensité.

Mêmes questions avec un cylindre de hauteur h , de rayon R , portant une densité volumique de charge ρ et tournant sur lui-même autour de l'axe (Oz) avec une pulsation ω . La densité de courant volumique est $J_V(r) = \rho r \omega$ de sorte que l'intensité à travers un demi-plan dont (Oz) est le bord est $I = \frac{1}{2} \rho \omega R^2 h$. On retrouve facilement ce résultat en calculant la charge totale $Q = \rho \pi R^2 h$ et en considérant que cette charge traverse le demi-plan durant le temps $T = 2\pi/\omega$.

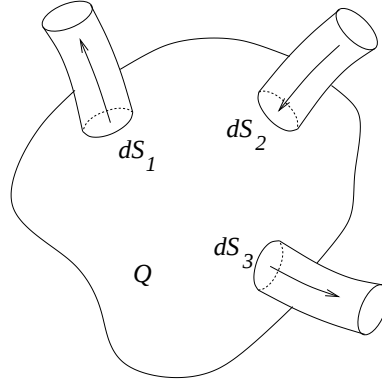


Figure 23 : Corps chargé alimenté par trois courants électriques.

Considérons un corps de volume V portant une densité de charge $\rho(\vec{r})$. Des fils connectés à sa surface permettent l'échange de charge avec l'extérieur. Par unité de temps, la variation totale de sa charge est égale à la somme des intensités des différents fils. Dans le cas du corps représenté sur la figure 23, on aura

$$\frac{dQ}{dt} = -I_1 + I_2 - I_3.$$

En introduisant des densités, on écrira la loi de conservation de la charge totale sous la forme

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = - \int_{\partial V} \vec{j}_V \cdot d\vec{S}$$

où ∂V est le bord du volume V . En électricité, lorsque plusieurs conducteurs se rejoignent en un point, appelé dans ce contexte nœud du circuit électrique, il n'y a pas d'accumulation de charge. La loi de conservation de la charge se réduit à la **loi de Kirchhoff** :

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \Leftrightarrow \sum_i I_i = 0$$

i.e. la somme (algébrique) des intensités des conducteurs se rejoignant au nœud est nulle.

1.3.1.2. Loi de Biot-Savart

Considérons un fil conducteur unidimensionnel parcouru par un courant électrique d'intensité I . Comme dans le cas du calcul du champ électrique créé par une distribution

de charge, le calcul repose sur un découpage des sources en éléments infiniment petits. Un élément de longueur $d\vec{\ell}'$, situé au point $\vec{r}'$ de ce fil crée un champ magnétique $d\vec{B}(\vec{r})$ en tout point $\vec{r}$ de l'espace :

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{\ell}' \wedge \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3}.$$

Pour obtenir le champ magnétique créé par un fil $\mathcal{C}$, il suffira d'intégrer :

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} I d\vec{\ell}' \wedge \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3}}. \quad (15)$$

On peut suivre le même raisonnement dans le cas d'un conducteur parcouru par un courant en volume. Le champ magnétique infinitésimal $d\vec{B}(\vec{r})$ créé par un élément de volume $d^3\vec{r}'$ centré sur le point $\vec{r}'$ et parcouru par une densité de courant $\vec{j}_V$ est

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}_V(\vec{r}') \wedge \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3} d^3\vec{r}'.$$

Le champ magnétique total est donc

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}_V(\vec{r}') \wedge \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3} d^3\vec{r}'}.$$

Pour un conducteur bidimensionnel S portant une densité de courant surfacique j_S , on aura de la même manière

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \vec{j}_S(\vec{r}') \wedge \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3} d^2\vec{r}'$$

où l'intégrale s'étend à tous les points $\vec{r}'$ sur la surface S .

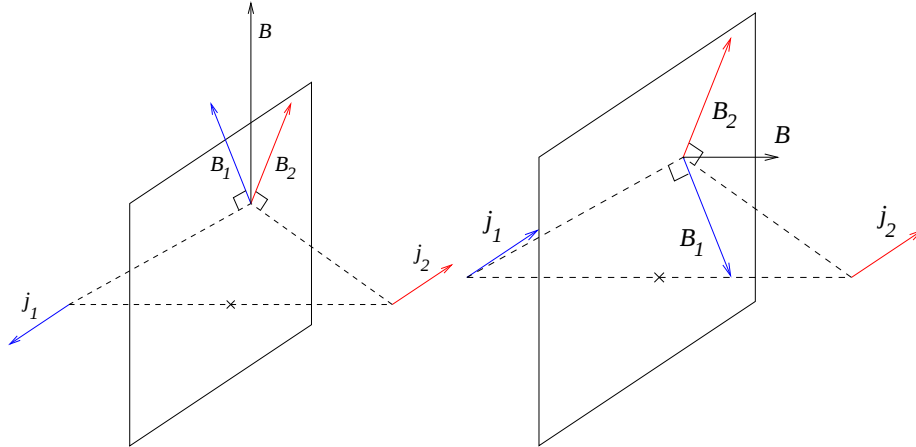


Figure 24 : “Démonstrations graphiques” que le champ magnétique appartient aux plans d’anti-symétrie de la distribution de courant (à gauche) et qu’il est perpendiculaire aux plans de symétrie (à droite) en tout point de ces plans.

On dira que le plan P est un plan d’anti-symétrie de la distribution de courant si pour tout élément $d^3\vec{r}$ centré au point $\vec{r}$, son symétrique $\vec{r}'$ par rapport à P est parcouru par une densité de courant $\vec{j}_V(\vec{r}') = -\vec{j}_V(\vec{r})$. De manière analogue, P est un plan de symétrie si $\vec{j}_V(\vec{r}') = \vec{j}_V(\vec{r})$. Si le point M appartient à un plan d’anti-symétrie

1.3. Magnétostatique

P de la distribution de courant alors le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est dans le plan. A l'inverse, si M appartient à un plan de symétrie de la distribution de courant, $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire au plan.

1.3.1.3. Champ magnétique créé par un fil rectiligne

On considère le fil rectiligne de la figure (25). On choisit l'axe (Oz) dans la direction du fil. On suppose que le fil est parcouru par un courant uniforme d'intensité I . Si le fil est infini, tous les plans perpendiculaires au fil, i.e. $z = \text{Cste}$, sont des plans d'anti-symétrie de la distribution de courant donc le champ magnétique n'a pas de composante suivant (Oz) , i.e. $\vec{B} \cdot \vec{u}_z = B_z = 0$. De plus, tous les plans contenant le fil sont des plans de symétrie de la distribution de courant. En tout point de l'espace M , il existe un plan de symétrie passant par M . Puisque ce plan contient $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$, le champ $\vec{B}$, perpendiculaire aux plans de symétrie, est dirigé suivant $\vec{B} = B_\theta \vec{u}_\theta$ dans le système de coordonnées cylindriques. Enfin, la distribution de courant est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe (Oz) si le fil est infini donc le champ magnétique ne dépend que de la distance r au fil :

$$\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$$

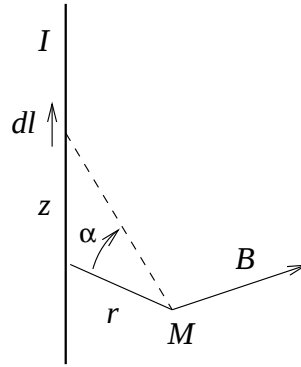


Figure 25 : Notations pour le calcul du champ magnétique créé par un fil.

Tout élément de longueur $d\vec{\ell} = dz \vec{u}_z$ du fil contribue au champ magnétique. D'après les notations de la figure, la distance séparant $d\vec{\ell}$ du point M où on mesure le champ magnétique est $\sqrt{z^2 + r^2}$. En outre, l'élément de fil $d\vec{\ell}$ et le vecteur joignant $d\vec{\ell}$ et le point M forment un angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Le produit vectoriel de la loi de Biot-Savart (15) fait par conséquent apparaître un terme en $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$. Puisque

$$\cos \alpha = \frac{r}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

le champ magnétique s'écrit ⁽¹⁹⁾

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{r}{(z^2 + r^2)^{3/2}} dz \vec{u}_\theta$$

(19) Puisque le vecteur joignant l'élément du courant du point M est $-z\vec{u}_z + r\vec{u}_r$, on peut aussi calculer le produit vectoriel :

$$d\vec{\ell} \vec{u}_z \wedge (-z\vec{u}_z + r\vec{u}_r) = r d\ell \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = r d\ell \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta$$

Pour calculer cette intégrale, il est nécessaire d'opérer un changement de variables. Notons que la position de l'élément $d\vec{\ell}$ peut être repérée par z mais aussi par α . On fait le changement de variable $z = r \tan \alpha$ et $dz = \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha$. Puisque la distance entre $d\vec{\ell}$ et le point M est

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{\cos \alpha}{r}$$

le champ magnétique s'écrit

$$\begin{aligned} B_\theta &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\cos^2 \alpha}{r^2} \times \cos \alpha \times \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} [\sin \alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 + r^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + r^2}} \right] \end{aligned}$$

Dans le cas d'un fil infini, i.e. $\alpha_2 = \pi/2$ et $\alpha_1 = -\pi/2$, il reste

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (16)$$

1.3.1.4. Champ magnétique créé par une boucle de courant

On considère une boucle de courant circulaire de rayon R , de centre O et dans le plan $z = 0$ parcouru par un courant d'intensité I . Tous les plans contenant (Oz) sont des plans d'anti-symétrie pour la distribution de courant. Pour un point M quelconque, seul un de ces plans d'anti-symétrie contient à la fois M et (Oz) . Puisque ce plan contient $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$, il en découle que $B_\theta = 0$, i.e. $\vec{B} = B_r \vec{u}_r + B_z \vec{u}_z$ dans le système de coordonnées cylindriques. Sur l'axe, M appartient à une infinité de ces plans d'anti-symétrie de sorte que $\vec{B}$ est dirigé suivant leur intersection, i.e. suivant $\vec{u}_z$. Par ailleurs, l'invariance par rotation d'axe (Oz) de la distribution de courant impose l'absence de dépendance du champ magnétique avec θ . On a donc finalement

$$\vec{B}(r = 0, \theta, z) = B_z(z) \vec{u}_z$$

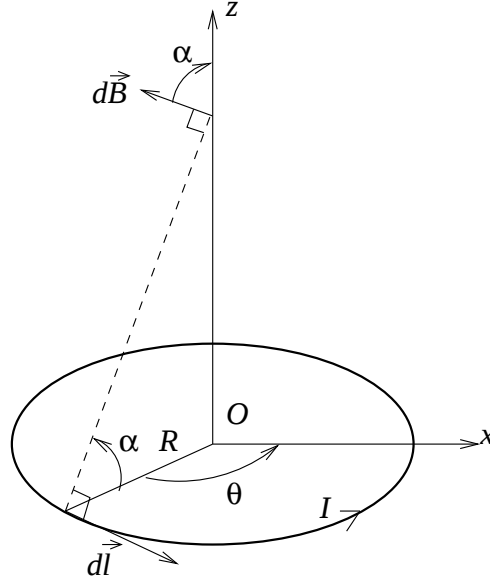


Figure 26 : Champ magnétique $d\vec{B}$ créé par un élément de courant d'une spire.

L'élément infinitésimal de champ magnétique $d\vec{B}$ créé par un élément de courant $d\ell = R d\theta$ est d'après la loi de Biot-Savart (15)

$$dB_z = dB \cos \alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell}{R^2 + z^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\theta}{R^2 + z^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

où on a utilisé le fait que $d\vec{\ell}$ et $\vec{r}$ sont perpendiculaires. L'intégration sur la boucle de courant conduit à

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (17)$$

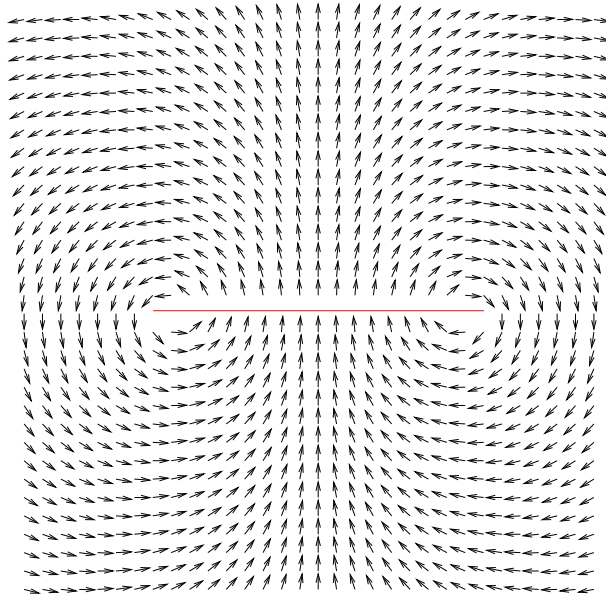


Figure 27 : Champ magnétique créé par une boucle de courant dans le plan perpendiculaire à la figure.

Une bobine de Helmholtz est composée de deux boucles circulaires de courant identiques dans des plans parallèles $z = -a$ et $z = a$. Le courant circule dans le même sens dans les deux spires. Le champ magnétique total est la somme des champs magnétiques créés par chacune des deux spires. D'après (17), on a

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \left[\frac{R^2}{(R^2 + (z - a)^2)^{3/2}} + \frac{R^2}{(R^2 + (z + a)^2)^{3/2}} \right]$$

Au centre du dispositif, le champ magnétique est non nul

$$B(0) = \mu_0 I \frac{R^2}{(R^2 + a^2)^{3/2}}$$

alors que sa dérivée s'annule

$$\left(\frac{dB_z}{dz} \right)_{z=0} = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 I}{2} \left[\frac{2(z - a)R^2}{(R^2 + (z - a)^2)^{5/2}} + \frac{2(z + a)R^2}{(R^2 + (z + a)^2)^{5/2}} \right]_{z=0} = 0$$

et que sa dérivée seconde est nulle lorsque $R = 2l$. Ce dispositif permet donc d'obtenir un champ magnétique à peu près constant entre les deux bobines.

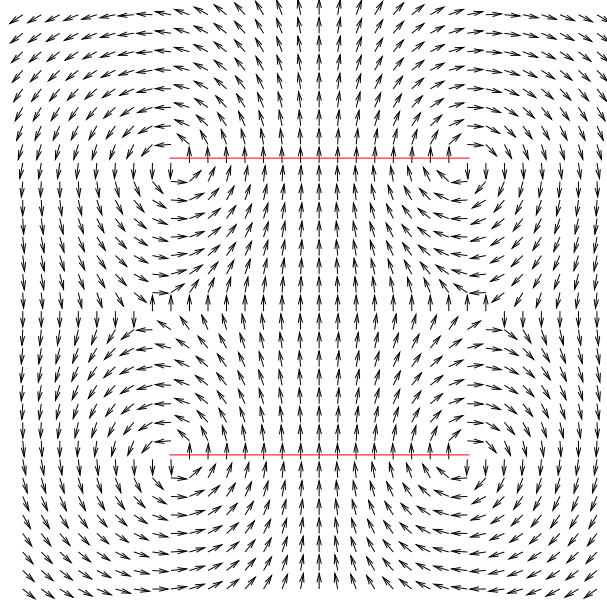


Figure 28 : Champ magnétique créé par des bobines de Helmholtz dans le plan perpendiculaire à la figure.

1.3.1.5. Champ magnétique créé par un solénoïde cylindrique fini

On considère un cylindre de rayon R , d'axe de révolution (Oz) , de hauteur $2L$ et à la surface duquel circule un courant I le long des cercles formés de la section du cylindre et de plans perpendiculaires à son axe. On note n la densité de boucle de courant par unité de longueur. Ce système modélise un solénoïde dont les spires sont très serrées. Tous les plans contenant l'axe (Oz) sont des plans d'anti-symétrie pour la distribution de courant. Pour un point M quelconque, seul un de ces plans d'anti-symétrie contient à la fois M et (Oz) . Puisque ce plan contient $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$, il en découle que $B_\theta = 0$, i.e. $\vec{B} = B_r \vec{u}_r + B_z \vec{u}_z$ dans le système de coordonnées cylindriques. Sur l'axe, M appartient à une infinité de ces plans d'anti-symétrie de sorte que $\vec{B}$ est dirigé suivant

1.3. Magnétostatique

leur intersection, i.e. suivant $\vec{u}_z$. Par ailleurs, l'invariance de la distribution de courant sous la rotation d'axe (Oz) impose l'absence de dépendance du champ magnétique avec θ . On a donc finalement

$$\vec{B}(r = 0, \theta, z) = B_z(z)\vec{u}_z$$

Par conséquent, chaque tranche d'épaisseur dz du cylindre contient ndz boucles de courant et crée un champ magnétique donné par (17). En intégrant sur la hauteur du cylindre, il vient

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{z-L}^{z+L} dz' \frac{R^2}{(R^2 + (z')^2)^{3/2}}$$

L'intégrale n'étant pas de la forme $du/u^{3/2}$, on l'évaluera en faisant le changement de variable $z = R \tan \alpha$ de sorte que $dz = \frac{R}{\cos^2 \alpha} d\alpha$. L'angle α est défini sur la figure 26. Les bornes d'intégration satisfont notamment la relation

$$\sin \alpha_{\min.} = \frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2 + R^2}}, \quad \sin \alpha_{\max.} = \frac{z+L}{\sqrt{(z+L)^2 + R^2}}$$

et donc

$$\begin{aligned} B_z(z) &= \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\alpha_{\min.}}^{\alpha_{\max.}} \frac{R d\alpha}{\cos^2 \alpha} \frac{R^2}{R^3 (1 + \tan^2 \alpha)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\alpha_{\min.}}^{\alpha_{\max.}} \cos \alpha d\alpha \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2} [\sin \alpha]_{\alpha_{\min.}}^{\alpha_{\max.}} \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\frac{z+L}{\sqrt{R^2 + (z+L)^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{R^2 + (z-L)^2}} \right] \end{aligned}$$

Dans le cas d'un cylindre infini, le champ créé à l'intérieur du cylindre est

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} B_z = \mu_0 n I \sin \frac{\pi}{2} = \mu_0 n I$$

conformément au calcul (19).

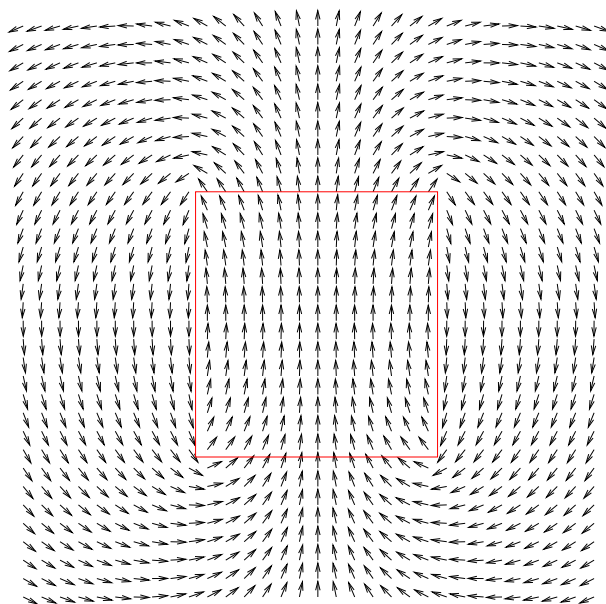


Figure 29 : Champ magnétique créé par un solénoïde cylindrique fini.

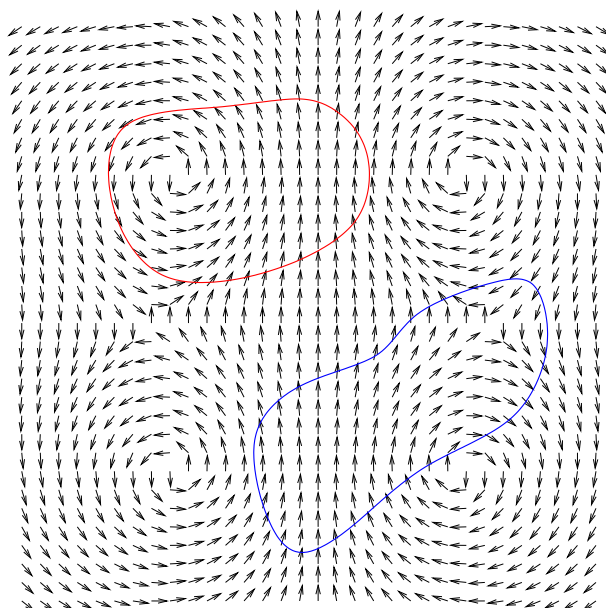
1.3.2. Théorèmes de Gauss magnétique et d'Ampère

1.3.2.1. Théorème de Gauss magnétique

Le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée S est nul :

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Alors que les lignes de champ électrique prennent naissance ou fin sur les charges électriques, les lignes de champ magnétique sont toujours refermées.



1.3. Magnétostatique

Figure 30 : Champ magnétique produit par une bobine de Helmholtz. Le flux du champ magnétique à travers les deux surfaces colorées sur la figure est nul, conformément au théorème de Gauss magnétique.

1.3.2.2. Théorème d'Ampère

Considérons une surface ouverte S dont le bord est noté $\mathcal{C} = \partial S$. Le théorème d'Ampère stipule que la circulation du champ magnétique le long du contour $\mathcal{C}$ est égal à la somme (algébrique) des intensités des courants électriques traversant la surface S . Mathématiquement, on a

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{j}_V \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{int.}}} \quad (18)$$

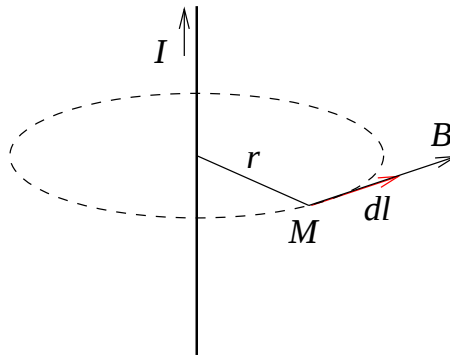


Figure 31 : Contour d'intégration pour le calcul du champ créé par un fil infini.

Considérons l'exemple du fil rectiligne infini et parcouru par un courant uniforme d'intensité I de la figure (31). Pour simplifier les calculs, on choisit l'axe (Oz) dans la direction du fil.

1. Détermination des plans d'anti-symétrie de la distribution de courant

Le fil étant infini, tous les plans perpendiculaires au fil, i.e. $z = \text{Cste}$, sont des plans d'anti-symétrie de la distribution de courant. Pour tout point M , on a un plan d'anti-symétrie passant par M . Par conséquent, $\vec{B}(M)$ appartient au plan et ne possède donc pas de composante suivant (Oz) , i.e.

$$\vec{B} \cdot \vec{u}_z = B_z = 0$$

De plus, tous les plans contenant le fil sont des plans de symétrie de la distribution de courant. Pour tout point M de l'espace, il existe un plan de symétrie passant par M . Dans le système de coordonnées cylindriques, ce plan contient les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$ du repère local. Le champ $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan de symétrie et donc

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r, \theta, z) \vec{u}_\theta.$$

2. Transformations laissant la distribution de courant invariante

La distribution de courant est invariante sous la rotation d'axe (Oz) , i.e. d'angle θ . Puisque le champ magnétique est créé par cette distribution de courant, il doit être le même avant et après rotation :

$$\vec{B}(r, \theta, z) = \vec{B}(r, \theta + \Delta\theta, z).$$

Cette égalité n'est vraie pour tout $\Delta\theta$ que si $\vec{B}$ ne dépend pas de θ . Par conséquent, on a

$$\vec{B} = \vec{B}(r, z)$$

Par ailleurs, la distribution de courant est invariante sous la translation d'axe (Oz) si le fil est infini donc $\vec{B}$ ne dépend pas de la coordonnée z . Il reste finalement

$$\vec{B} = \vec{B}(r).$$

Attention, on n'a rien démontré dans le point **2.** sur la direction du champ $\vec{B}$. Ce n'est qu'en combinant les informations données par les plans d'anti-symétrie et de symétrie de la distribution de courant qu'on conclue que

$$\vec{B} = B_\theta(r)\vec{u}_\theta.$$

3. Choix d'un contour d'intégration

Le théorème d'Ampère est vrai pour tout contour fermé $\mathcal{C}$ mais pour simplifier les calculs, on recherchera le contour pour lequel le champ magnétique est en tout point tangent au contour. Puisque $\vec{B} = B_\theta(r)\vec{u}_\theta$, on choisit le contour tel que $d\vec{\ell} \sim \vec{u}_\theta$, i.e. un cercle de centre sur l'axe (Oz) et inscrit dans un plan $z = \text{Cste}$. Pour calculer le champ magnétique au point M de coordonnées $(r \ \theta \ z)$, on choisit le cercle de rayon r . Lorsqu'on déplace le point M le long du contour, on fait varier sa coordonnée θ sans toucher à r et z . Par conséquent, un élément de longueur le long de $\mathcal{C}$ est

$$d\vec{\ell} = r d\theta \vec{u}_\theta.$$

4. Calcul de la circulation du champ magnétique

Grâce au choix judicieux de contour, la circulation du champ magnétique se réduit à

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} B_\theta(r) r d\theta \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_\theta = r B_\theta(r) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r B_\theta(r)$$

où on utilise le fait que B ne dépend pas de θ .

5. Application du théorème d'Ampère

Il reste à déterminer l'intensité du courant traversant une surface dont $\mathcal{C}$ est le bord. Cette surface est par exemple le disque de rayon r . Seul le fil traverse cette surface de sorte que $I_{\text{int}} = I$. Le théorème d'Ampère (18) conduit finalement à

$$2\pi r B_\theta(r) = \mu_0 I \Leftrightarrow B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

ce qui correspond bien au résultat obtenu précédemment (16).

1.3.2.3. Conditions de passage du champ magnétique

On considère la surface de la figure 32 parcouru par un courant de surface de densité $\vec{j}_S$. Le théorème de Gauss magnétique impose la continuité de la composante normale du champ magnétique. En effet, le flux du champ magnétique à travers la boîte fermée d'épaisseur infinitésimale de la figure 32 est

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 dS + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 dS = 0$$

où $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont des vecteurs unitaires normaux à la surface orientés respectivement vers le haut et le bas et $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ les champs respectivement au dessus et en dessous de

1.3. Magnétostatique

la surface. Puisque $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$, il reste comme attendu

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n}_1 = 0$$

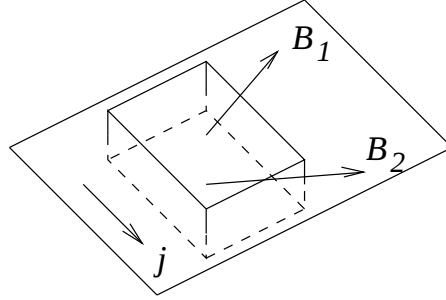


Figure 32 : Configuration utilisée pour établir les conditions de passage du champ magnétique.

La circulation du champ magnétique le long d'un contour $\mathcal{C}$ fermé inscrit dans un plan perpendiculaire à la surface S s'écrit d'après le théorème d'Ampère

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S'} \vec{j}_S \cdot d\vec{S}$$

où S' est la surface délimitée par le contour $\mathcal{C}$. Notons que l'intersection de S' et S est unidimensionnelle par définition de S' . Dans la limite d'un contour d'extension infinitésimale dans la direction perpendiculaire à la surface S , il reste

$$\vec{B}_1^t - \vec{B}_2^t = \mu_0 \vec{j}_S \cdot \vec{n}'$$

où $\vec{n}'$ est un vecteur normal à la surface S' délimitée par le contour $\mathcal{C}$ et $\vec{B}_1^t$ et $\vec{B}_2^t$ les composantes tangentielles du champ magnétique respectivement au dessus et en dessous de la surface. On pourra également écrire cette condition de passage sous la forme

$$\vec{n} \wedge (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \mu_0 \vec{j}_S$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface S et donc appartenant à la surface S' . Les composantes tangentielles du champ magnétique $\vec{B}$ présentent donc une discontinuité à la traversée de la surface dans la direction perpendiculaire au courant et proportionnelle à la densité de courant.

1.3.2.4. Champ magnétique créé par un câble coaxial

Les câbles électriques sont souvent des câbles coaxiaux, formés d'un coeur cylindrique portant un courant I et d'une gaine également cylindrique portant un courant $-I$. Considérons le câble coaxial rectiligne et infini supposé constitué d'un cylindre de rayon R_1 parcouru par une densité de courant uniforme j_v , d'une couche d'isolant puis d'une couche conductrice de rayon R_2 , infiniment fine et parcourue par une densité de courant surfacique uniforme j_s . Le courant transite par le coeur cylindrique vers le dispositif récepteur puis revient par la couche extérieure. L'intensité totale à travers une section du câble coaxial est donc nulle :

$$I = j_v \times \pi R_1^2 + j_s \times 2\pi R_2 = 0 \Leftrightarrow j_s = -j_v \frac{R_1^2}{2R_2}$$

On se place dans le système de coordonnées cylindriques avec l'axe (Oz) le long de l'axe de révolution du câble. Tous les plans perpendiculaires à (Oz), i.e. $z = \text{Cste}$, sont des plans d'anti-symétrie de la distribution de courant donc le champ magnétique n'a pas de composante suivant (Oz), i.e. $\vec{B} \cdot \vec{u}_z = B_z = 0$. Pour tout point M quelconque, les plans ($M, \vec{u}_r, \vec{u}_z$) sont des plans de symétrie de la distribution de courant donc le champ magnétique leur est en tout point perpendiculaire et est dirigé suivant $\vec{u}_\theta$. De plus, la distribution de courant est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe (Oz) donc le champ magnétique ne dépend que de la distance r à l'axe (Oz) :

$$\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$$

On applique le théorème d'Ampère (18) sur le cercle de rayon r , de centre sur l'axe (Oz) et dans le plan $z = \text{Cste}$. Tout élément de longueur de ce cercle est de la forme $d\vec{\ell} = r d\theta \vec{u}_\theta$. La circulation du champ magnétique sur ce contour se réduit alors à

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} B_\theta(r) r d\theta (\vec{u}_\theta)^2 = r B_\theta(r) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r B_\theta(r)$$

Le courant traversant le disque délimité par ce contour

$$I_{\text{int}} = \begin{cases} j_V \pi r^2, & (r < R_1) \\ j_V \pi R_1^2 = I, & (R_1 < r < R_2) \\ j_V \pi R_1^2 + j_s \times 2\pi r R_2 = 0, & (r > R_2) \end{cases}$$

de sorte que le théorème d'Ampère (18) conduit à

$$B_\theta(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 j_V r, & (r < R_1) \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & (R_1 < r < R_2) \\ 0, & (r > R_2) \end{cases}$$

Contrairement à un fil, ce type de câble ne crée pas de champ magnétique à l'extérieur qui pourraient causer des phénomènes d'interférences avec d'autres appareils électriques.

1.3.2.5. Champ magnétique créé par un solénoïde cylindrique infini

On considère un cylindre infini creux à la surface duquel circule un courant I le long des cercles formés de l'intersection du cylindre avec les plans perpendiculaires à son axe. On note n la densité de boucle de courant par unité de longueur. Ce système modélise un solénoïde dont les spires sont très serrées. Tous les plans perpendiculaires au cylindre, i.e. $z = \text{Cste}$, sont des plans de symétrie de la distribution de courant donc le champ magnétique est dirigé suivant $\vec{u}_z$. Les plans contenant $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$ en coordonnées cylindriques sont des plans d'anti-symétrie de la distribution de courant donc le champ magnétique ne possède pas de composante suivant $\vec{u}_\theta$. De plus, la distribution de courant est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe (Oz) donc le champ magnétique ne dépend que de la distance r à l'axe (Oz) :

$$\vec{B} = B_z(r) \vec{u}_z$$

On applique le théorème d'Ampère (18) sur le rectangle $ABCD$ dans un plan $\theta = \text{Cste}$ et dont deux sommets ont pour coordonnées $(r_1 \ \theta \ z_1)$ et $(r_2 \ \theta \ z_2)$. Deux des côtés sont donc dirigés suivant $\vec{u}_r$ et les deux autres suivant $\vec{u}_z$. Seuls ces derniers contribuent

1.3. Magnétostatique

à la circulation du champ magnétique

$$\begin{aligned}\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \int_A^B B_z(r) dr \underbrace{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z}_{=0} + \int_B^C B_z(r_1) dz (\vec{u}_z)^2 + \int_C^D B_z(r) dr \underbrace{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z}_{=0} + \int_D^A B_z(r_2) dz (\vec{u}_z)^2 \\ &= B_z(r_1)(z_2 - z_1) + B_z(r_2)(z_1 - z_2)\end{aligned}$$

et le théorème d'Ampère (18) conduit à

$$\left[B_z(r_1) - B_z(r_2) \right] (z_2 - z_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } r_1, r_2 < R \\ \mu_0 n I (z_2 - z_1) & \text{si } r_1 < R, r_2 > R \\ 0 & \text{si } r_1, r_2 > R \end{cases}$$

Le champ magnétique est donc constant à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde et présente un saut à sa surface. En supposant que le solénoïde ne peut pas créer de champ magnétique non nul à l'infini, on a donc un champ nul en tout point extérieur au solénoïde et il reste

$$B_z(r) = \begin{cases} \mu_0 n I & \text{si } r < R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases} \quad (19)$$

1.4. Rappels de géométrie

1.4.1. Rappels d'analyse vectorielle

1.4.1.1. Vecteurs formés comme des couples de points

Deux points, par exemple A et B, permettent de définir un vecteur $\overrightarrow{AB}$. Un tel vecteur est caractérisé par sa direction, son sens et sa norme, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$. Notons que la norme du vecteur est une longueur, la distance entre les points A et B. Le vecteur ne dépend pas de son point d'application. Si on déplace les deux points sans changer leur position relative, on retrouve le même vecteur.

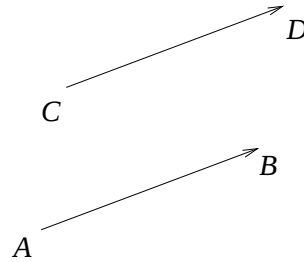


Figure 33 : En déplaçant le vecteur $\overrightarrow{CD}$, il est facile de voir que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Bien qu'ils n'aient pas le même point d'application, ces deux vecteurs possèdent la même direction, le même sens et la même norme.

1.4.1.2. Addition et multiplication par un scalaire

La relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

permet de définir l'addition de deux vecteurs. Pour ajouter deux vecteurs, il suffit de translater l'un des vecteurs pour l'amener à l'extrémité de l'autre. En mesurant les vecteurs sur la figure, il est facile de voir que

$$\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| \geq \|\overrightarrow{AC}\|$$

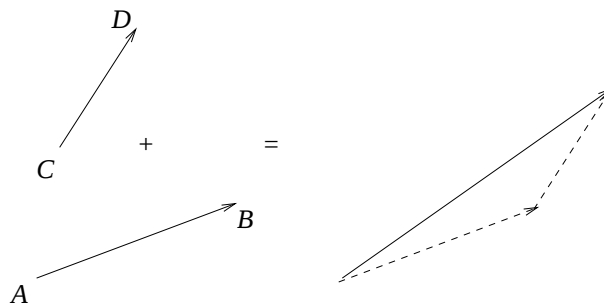


Figure 34 : Addition des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Le produit d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est un vecteur $\lambda\overrightarrow{AB}$ de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AB}$ mais de norme

$$\|\lambda\overrightarrow{AB}\| = \lambda\|\overrightarrow{AB}\|$$

1.4. Rappels de géométrie

1.4.1.3. Produit scalaire

Pour construire le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, on translate l'un des vecteurs, par exemple $\overrightarrow{AB}$, pour l'amener au même point d'application que le second vecteur. Ensuite, on construit la projection orthogonale H de D sur la droite (AB). Le produit scalaire est le produit des longueurs (algébriques)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times AH$$

Dans le triangle rectangle AHD, l'angle au sommet A, qu'on notera $\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}$, admet

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \frac{AH}{AD} \Leftrightarrow AH = AD \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$$

Il en découle l'expression du produit scalaire

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= AB \cdot AD \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) \\ &= \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{CD}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) \end{aligned}$$

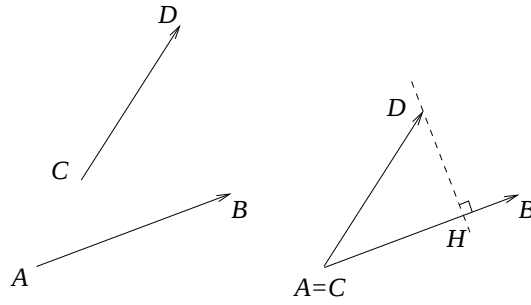


Figure 35 : Construction du produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Notons que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Puisque $\overrightarrow{AB}$ est évidemment colinéaire à lui-même, on a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2$$

Si deux vecteurs sont orthogonaux, i.e. $\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}} = \pi/2$,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

1.4.1.4. Théorèmes d'Al-Kashi et de Pythagore

D'après la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

il en découle le théorème d'Al-Kashi pour le triangle ABC :

$$\begin{aligned}
 \|\vec{AC}\|^2 &= \|\vec{AB} + \vec{BC}\|^2 \\
 &= (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BC}) \\
 &= \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{BC} \cdot \vec{BC} + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} \\
 &= \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2 + 2\|\vec{AB}\| \|\vec{BC}\| \cos(\widehat{\vec{AB}, \vec{BC}})
 \end{aligned}$$

Lorsque les deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$, le triangle ABC est rectangle au sommet B. On retrouve alors le théorème de Pythagore sous la forme

$$\|\vec{AC}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2$$

1.4.1.5. Décomposition d'un vecteur sur une base

On appelle base tout ensemble de vecteurs $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ pour lesquels tout vecteur $\vec{u}$ du plan peut se décomposer de manière unique sous la forme

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}$$

Toutes les bases comportent le même nombre de vecteurs, égal à la dimension de l'espace. u_1 et u_2 sont les composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. On pourra noter

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Une base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est orthonormée si

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

L'avantage de ce genre de base est que les composantes d'un vecteur $\vec{u}$ peuvent être obtenues par projection de $\vec{u}$ sur chacun des vecteurs de base, par exemple

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}) \cdot \vec{i} = u_1 \vec{i} \cdot \vec{i} + u_2 \vec{j} \cdot \vec{i} = u_1$$

et de la même manière

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = u_2$$

Le produit scalaire de deux vecteurs s'écrit

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \cdot \vec{v} &= (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}) \cdot (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}) \\
 &= u_1 v_1 \vec{i} \cdot \vec{i} + (u_1 v_2 + u_2 v_1) \vec{i} \cdot \vec{j} + u_2 v_2 \vec{j} \cdot \vec{j} \\
 &= u_1 v_1 + u_2 v_2
 \end{aligned}$$

1.4.1.6. Vecteurs et champs de vecteurs en physique

En physique, on manipule plusieurs types de vecteurs. Comme précédemment, certains vecteurs sont construits à partir de couple de points, par exemple

$$\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

où $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ est une base orthonormée. x, y et z sont les composantes du vecteur $\vec{OM}$ dans la base $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$. Par extension, on dira que x, y et z sont les coordonnées du point M dans le repère $(O, \{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\})$. Contrairement aux composantes, les

1.4. Rappels de géométrie

coordonnées dépendent de la position du point origine O . Rappelons que $||\overrightarrow{OM}||$ est une longueur.

En physique, d'autres vecteurs ne correspondent pas à un couple de points, notamment les forces, le champ électrique, le champ magnétique Comme tout vecteur, ils se décomposent de manière unique sur la base :

$$\vec{F} = F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y + F_z \vec{u}_z$$

Toutefois, leur composantes n'ont pas la dimension d'une longueur. Néanmoins, on les représente graphiquement comme le vecteur $\overrightarrow{OM}$, ce qui implique qu'on a défini une échelle, par exemple $1 \text{ cm} = 1 \text{ N}$ pour une force.

Un vecteur ne dépend pas de son point d'application. Toutefois, les forces, par exemple, dépendent souvent du point où elles s'exercent. Ainsi, la force de rappel du ressort dépend de l'élongation du ressort, i.e. de la position de son extrémité. Cette force n'est pas un vecteur mais un champ de vecteurs, i.e. une application $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, qui à un point de l'espace ($\mathbb{R}^3$) associe un vecteur tridimensionnel.

1.4.2. Rappels sur les systèmes de coordonnées

1.4.2.1. Système de coordonnées cartésiennes

La position du point M est donnée par trois coordonnées x , y et z . Le repère local au point M est défini en augmentant tour à tour chaque coordonnée x , y puis z de M d'une quantité infinitésimale et en construisant un vecteur unitaire $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ dans la direction du déplacement du point M . Mathématiquement

$$\vec{u}_x = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x}, \quad \vec{u}_y = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y}, \quad \vec{u}_z = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}.$$

Notons que dans le cas du système de coordonnées cartésiennes, le repère local est le même en tout point M de l'espace. Tout vecteur $\vec{E}$ se décompose de manière unique :

$$\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

Ainsi, un déplacement infinitésimal du point M s'écrit

$$d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OM} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de Pythagore,

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

L'élément de volume $d^3\vec{r}$ au point M est le cube infiniment petit dont les côtés sont dirigés suivant $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ et dont les longueurs sont dx , dy et dz . On a donc

$$d^3\vec{r} = dx dy dz$$

Le gradient d'une fonction $V(x, y, z)$ est défini comme

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

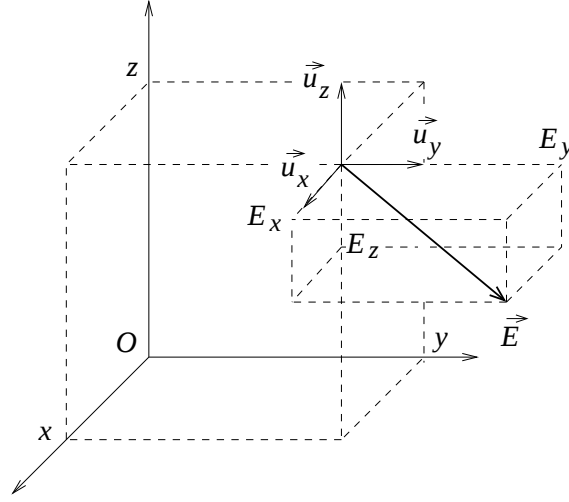


Figure 36 : Décomposition d'un vecteur $\vec{E}$ dans le repère local au point M .

La distance entre les deux points $A = (x_A \ y_A \ z_A)$ et $B = (x_B \ y_B \ z_B)$ est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\| = \left\| \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \right\|^2 = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad (20)$$

1.4.2.2. Système de coordonnées cylindriques

Le système de coordonnées cylindriques de $\mathbb{R}^3$ est défini par le changement de variables

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Les surfaces $r = R = \text{Cste}$ sont les cylindres infinis de rayon R et d'axe de révolution suivant (Oz) . La position du point M est maintenant donnée par trois coordonnées r , θ et z . Le repère local au point M est défini en augmentant tour à tour chaque coordonnée r , θ puis z de M d'une quantité infinitésimale et en construisant un vecteur unitaire $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$ dans la direction du déplacement du point M . Mathématiquement

$$\vec{u}_r = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}, \quad \vec{u}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}, \quad \vec{u}_z = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}.$$

Tout vecteur $\vec{E}$ se décompose de manière unique :

$$\vec{E} = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta + E_z \vec{u}_z = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{pmatrix}.$$

1.4. Rappels de géométrie

Ainsi, un déplacement infinitésimal du point M s'écrira

$$d\vec{\ell} = d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de Pythagore,

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2.$$

L'élément de volume $d^3\vec{r}$ au point M est le cube infiniment petit dont les côtés sont dirigés suivant $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$ et dont les longueurs sont dr , $r d\theta$ et dz . On a donc

$$d^3\vec{r} = r dr d\theta dz$$

Le gradient d'une fonction $V(x, y, z)$ est défini comme

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \vec{\text{grad}} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

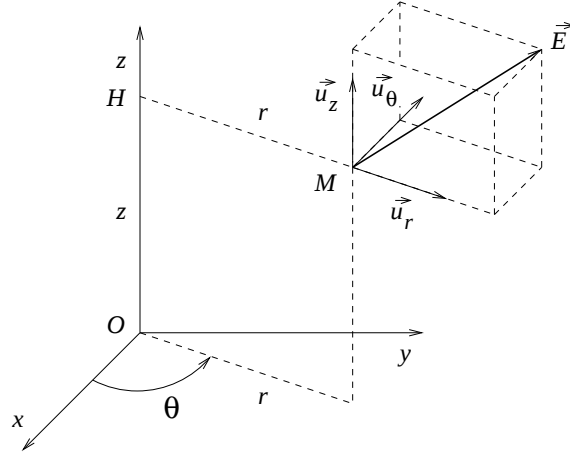


Figure 37 : Décomposition d'un vecteur $\vec{E}$ dans le repère local au point M .

Notons H la projection orthogonale du point M sur l'axe (Oz) . On définit $r = \|\vec{HM}\|$ (et **non** $r = \|\vec{OM}\|$ comme dans le système de coordonnées sphériques). La droite (HM) , après projection sur le plan (Oxy) forme un angle θ avec l'axe (Ox) .

Attention, pour calculer la distance entre deux points, il faudra repasser aux coordonnées cartésiennes. La formule (20) ne se généralise pas simplement aux coordonnées cylindriques.

1.4.2.3. Système de coordonnées sphériques

Le système de coordonnées sphériques est défini par le changement de variables

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \sin \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad r \in [0; +\infty[, \theta \in [0; \pi], \phi \in [0; 2\pi]$$

Les surfaces $r = R = \text{Cste}$ sont les sphères de centre O et de rayon r . La position du point M est maintenant donnée par trois coordonnées r , θ et ϕ . Le repère local au point M est défini en augmentant tour à tour chaque coordonnée r , θ puis ϕ de M d'une quantité infinitésimale et en construisant un vecteur unitaire $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\phi$ dans la direction du déplacement du point M . Mathématiquement

$$\vec{u}_r = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r}, \quad \vec{u}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta}, \quad \vec{u}_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \phi}.$$

Ainsi,

$$\vec{u}_r = \cos \phi \sin \theta \vec{u}_x + \sin \phi \sin \theta \vec{u}_y + \cos \theta \vec{u}_z$$

Tout vecteur $\vec{E}$ se décompose de manière unique sur le repère local :

$$\vec{E} = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta + E_\phi \vec{u}_\phi = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_\phi \end{pmatrix}.$$

Ainsi, un déplacement infinitésimal du point M s'écrira

$$d\vec{\ell} = d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{u}_\phi = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin \theta d\phi \end{pmatrix}.$$

car, sous le changement $\theta \rightarrow \theta + d\theta$, le point M décrit un arc de cercle de rayon r et d'angle $d\theta$, et donc de longueur $r d\theta$. De la même manière, sous le changement $\phi \rightarrow \phi + d\phi$, le point M décrit un arc de cercle de rayon $r \sin \theta$ et d'angle $d\phi$, et donc de longueur $r \sin \theta d\phi$. D'après le théorème de Pythagore,

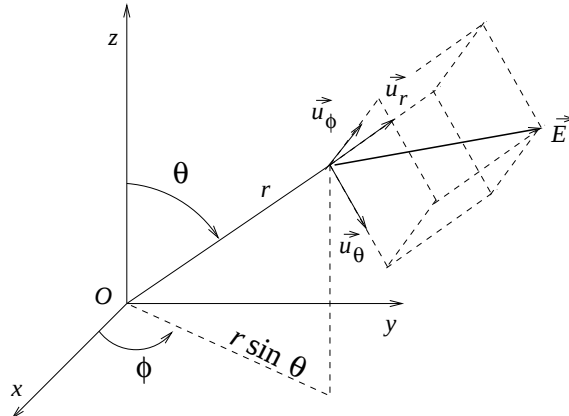
$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

L'élément de volume $d^3\vec{r}$ au point M est le cube infiniment petit dont les côtés sont dirigés suivant $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\phi$ et dont les longueurs sont dr , $r d\theta$ et $r \sin \theta d\phi$. On a donc

$$d^3\vec{r} = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

Le gradient d'une fonction $V(x, y, z)$ est défini comme

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi = \vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \vec{\text{grad}} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \end{pmatrix} \quad (21)$$



1.5. Annexes

Figure 38 : Décomposition d'un vecteur $\vec{E}$ dans le repère local au point M .

Remarquez que $r = ||\vec{OM}||$. La droite (OM) forme un angle θ avec l'axe (Oz) .

La projection de (OM) sur le plan (Oxy) forme un angle ϕ avec l'axe (Ox) .

Attention, pour calculer la distance entre deux points, il faudra repasser aux coordonnées cartésiennes. La formule (20) ne se généralise pas simplement aux coordonnées sphériques.

1.5. Annexes

Constante gravitationnelle $\mathcal{G}$	$6,674215(92).10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Perméabilité magnétique du vide μ_0	$4\pi.10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$
Permittivité électrique du vide $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$	$8,854187817 \dots 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$
Vitesse de la lumière $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$	$2,99792458.10^8 \text{ ms}^{-1}$
Charge élémentaire e	$1,602176565(35).10^{-19} \text{ C}$

Tableau 1 : Constantes physiques.

	Électrostatique	Magnétostatique
Sources	Charge Q	Intensité I
Densité	volumique $Q = \int \rho d^3\vec{r}$ surfactive $Q = \int \sigma dS$ linéique $Q = \int \lambda d\ell$	volumique $I = \int \vec{j}_V \cdot d\vec{S}$, $\vec{j}_V = \rho \vec{v}$ surfactive $I = \int \vec{j}_S \cdot d\vec{\ell}$, $\vec{j}_S = \sigma \vec{v}$
Champ	$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{ \vec{r}-\vec{r}' ^3}$	$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{ \vec{r}-\vec{r}' ^3}$
Potentiel	$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$	$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ (2ème année)
Force	$\vec{F} = q\vec{E}$	$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$
Théorèmes	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{int}}$

Tableau 2 : Analogie électro-magnétostatique