

TD D'ÉLECTROMAGNÉTISME

Licence Physique-Chimie S2

Université de Lorraine

2018

TD 1 : Statique et dynamique de charges ponctuelles

Exercice 1 : Point de Lagrange

- 1.1.** La Terre et le Soleil sont distants d'environ 150.10^6 km . La masse de la Terre étant $M_T = 6.10^{24} \text{ kg}$ et celle du Soleil $M_\odot = 2.10^{30} \text{ kg}$, en quel point de la droite les joignant une masse m ne ressentirait aucune force de gravité ? Ce point est appelé point de Lagrange L1. On rappelle que $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$.

Vous pourrez placer l'origine O sur la Terre, notez (Ox) la droite joignant la Terre et le Soleil. Quelle est la coordonnées x_S du soleil ? En notant x la coordonnée de la masse m , donnez l'expression de la distance entre cette masse et la Terre, puis entre cette masse et le Soleil. En déduire les deux forces de gravité.

- 1.2.** De manière analogue, on considère deux charges q_1 et q_2 . Discuter des positions où pourrait se trouver une charge q pour qu'elle ne ressente aucune force électrostatique ? On distinguera le cas où les charges q_1 et q_2 sont de mêmes signes de celui où ils sont différents.

Exercice 2 : Dipôle électrique

On considère deux points $N(0, -d)$ et $P(0, d)$ du plan portant respectivement une charge $-q_e$ et $+q_e$, où q_e est la charge élémentaire. Calculer la valeur du champ électrostatique au point $A(2d, 2d)$. Faire une représentation graphique. Application numérique : $d = 0,1 \text{ nm}$.

Exercice 3 : Trois charges

- 3.1.** On considère trois charges q situées sur les sommets d'un triangle équilatéral de côté a .
- 3.1.1.** Calculer le champ électrique créé par les trois charges au centre de gravité du triangle.
- 3.1.2.** Quelle est la direction du champ sur les médianes du triangle ?

Exercice 4 : Électroscope

Deux boules de sureau pesant chacune 2 mg sont suspendues à un même point par un fil de longueur $l = 5 \text{ cm}$. La première porte une charge q et la seconde $2q$. Sachant que l'angle 2θ entre les fils vaut 120° , calculer la valeur de q .

Exercice 5 : Mouvement d'une charge dans un champ

5.1. Montrez que la vitesse d'une charge électrique ponctuelle q soumise à l'interaction avec un champ électrique uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$ et à une force de frottement $-\frac{m}{\tau} \vec{v}$ est

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) e^{-t/\tau} + \frac{q\tau}{m} \vec{E} (1 - e^{-t/\tau})$$

5.2. Vérifiez que la vitesse d'une particule ponctuelle de charge q dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ et soumise à une force de frottement $-\frac{m}{\tau} \vec{v}$ est

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{\perp}(0) e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \phi) \\ v_y(t) = -v_{\perp}(0) e^{-t/\tau} \sin(\omega t + \phi) \\ v_z(t) = v_z(0) e^{-t/\tau} \end{cases}$$

TD 2 : Énergie potentielle électrostatique

Exercice 1 : Le modèle planétaire de l'atome

L'expression de la force de Coulomb est mathématiquement similaire à celle de la gravitation de Newton. Ce constat a conduit les physiciens du début du XX^{ème} siècle au modèle planétaire de l'atome. On considère un atome d'hydrogène.

- 1.1. On se placera dans le référentiel où le proton est immobile à l'origine. On supposera la trajectoire de l'électron circulaire de rayon R et on se placera dans le système de coordonnées polaires.
 - 1.1.1. Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ créé en tout point de l'espace par le noyau puis celle du potentiel $V(\vec{r})$ associé.
 - 1.1.2. En déduire la force ressentie par l'électron dans le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. Donner ensuite l'expression de l'énergie potentielle de l'électron.
 - 1.1.3. En utilisant l'égalité des forces centrifuge $F = \frac{mv^2}{r}$ et électrostatique, établir une relation entre la vitesse de l'électron et le rayon de son orbite.
 - 1.1.4. Montrer que l'énergie totale de l'électron se réduit à

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R} < 0$$

Ce modèle très simple d'atome se révèle en fait instable : à cause de son mouvement autour du proton, l'électron devrait émettre un rayonnement électromagnétique. Puisqu'une partie de son énergie est emportée par ce rayonnement, l'électron devrait spiraler avant de s'écraser sur le proton en un temps très court. La mécanique quantique apportera une solution à ce problème.

Exercice 2 : Fonctionnement d'un électroscope

- 2.1. Depuis le début du XVII^{ème} siècle, on a utilisé des électroscopes lorsqu'on souhaitait mettre en évidence la présence de charges électrostatiques. Considérons le dispositif de la figure. L'expérimentateur (la main sur la figure) veut tester la charge d'un bâton qu'il a électrisé. Pour cela, il le met en contact avec la boule métallique à l'extérieur de la bouteille. La charge électrique se répartit alors dans la boule puis dans les deux branches ON et OM et finalement dans les boules centrées aux points M et N. La branche OM, de longueur ℓ , est immobile. La branche ON, elle aussi de longueur ℓ , n'est fixée qu'au point O. Elle forme donc un pendule simple dans le plan (Oxy) . Les deux boules n'ayant pas le même rayon, on suppose que la boule en M porte une charge $2q$ et la boule en N une charge q . Dans la suite, ces deux boules seront assimilées à des charges ponctuelles.

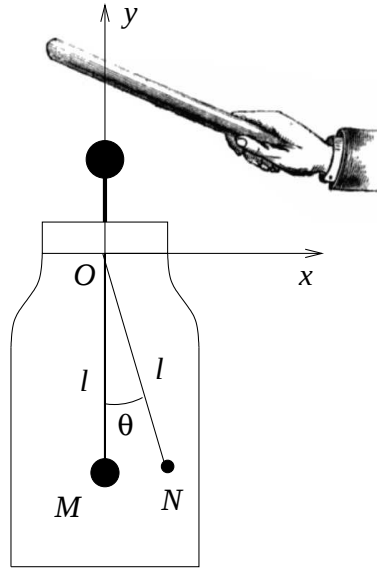


Figure 2.1 : Schéma de l'électroscope considéré dans l'exercice.

2.1.1. D'après la figure, quelles sont les coordonnées cartésiennes du point M ? Quelle est par conséquent l'expression du champ électrique et du potentiel électrique $V(x, y)$ créé au point (x, y) par la boule chargée en M.

2.1.2. Toujours d'après la figure, quelles sont les coordonnées cartésiennes du point N en fonction de ℓ et θ ? Montrer que le potentiel $V(N)$ créé au point N par la boule chargée en M est

$$V(N) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0\ell\sqrt{2(1 - \cos\theta)}}$$

En déduire l'énergie potentielle électrostatique de la boule N.

2.1.3. Écrire l'expression de la force de pesanteur agissant sur la boule N, de masse m , dans le système de coordonnées cartésiennes (O, x, y) . En déduire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur en fonction des coordonnées cartésiennes de N puis en fonction de ℓ et θ .

2.1.4. On suppose que l'angle θ reste petit. Par un développement de Taylor, on peut alors montrer que

$$\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad \sqrt{2(1 - \cos\theta)} \simeq \theta \quad (\theta > 0)$$

Donner l'expression approchée de l'énergie potentielle totale de la boule N. Pour quelle valeur de l'angle θ , la boule en N atteint-elle l'équilibre mécanique ?

TD 3 : Energie potentielle électrostatique (2)

Exercice 1 : Cristal ionique

- 1.1.** Un cristal ionique est formé d'un empilement périodique d'ions de charges opposées. La stabilité du cristal est assurée par l'équilibre entre la force électrostatique entre ions et une force répulsive à courte portée (répulsion des nuages électroniques des ions). On se limitera dans un premier temps à un modèle simplifié de cristal ionique formé d'une chaîne unidimensionnelle infinie d'ions alternativement chargés $+|e|$ et $-|e|$ et séparés d'une distance constante a . On suppose que la force répulsive s'exerçant entre deux ions séparés d'une distance r est de la forme :

$$F_r = \frac{C_0}{r^3}$$

- 1.1.1.** Rappeler l'expression générale $V(\vec{r})$ du potentiel électrostatique créé en tout point $\vec{r}$ de l'espace par une charge q située au point $\vec{r}$, puis de la force coulombienne entre deux charges q_1 et q_2 aux points $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ et enfin, de l'énergie potentielle électrostatique E_p de ces deux charges.
- 1.1.2.** En déduire la force puis l'énergie potentielle électrostatique créée par le reste du cristal sur un ion donné.
- 1.1.3.** Déterminer l'énergie potentielle associée à la répulsion entre deux ions.
- 1.1.4.** Écrire l'énergie potentielle d'un ion puis son énergie totale.
- 1.1.5.** On se place à température nulle et on suppose que les ions sont alors immobiles. On peut montrer que le système adopte la valeur du paramètre de maille a qui rend l'énergie minimale. Représenter graphiquement l'allure de l'énergie en fonction de a et calculer la position de son minimum. Interpréter l'effet de la température et discuter de la fusion du cristal. On donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln 2 \\ \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \end{array} \right.$$

- 1.2.** On considère maintenant le cristal ionique Na^+Cl^- dont la structure est de type cubique simple, i.e. les ions sont alternativement répartis aux noeuds d'un réseau cubique (voir figure). On établit expérimentalement que la force de répulsion entre ions est de la forme

$$F_r = \frac{C_0}{r^{10}}. \quad (C_0 = 10^{-105} \text{ J.m}^9)$$

La décroissance en $1/r^{10}$ est suffisamment rapide pour que cette force soit non négligeable uniquement entre ions premiers voisins.

1.2.1. Montrer que le potentiel électrostatique est de la forme (on justifiera simplement les valeurs prises par les premiers termes)

$$V(a) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \left[6 - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{6}{2} + \dots \right] = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \times \gamma,$$

puis écrire l'énergie totale d'un ion (la constante de Madelung γ vaut approximativement 1,747).

1.2.2. Calculer le paramètre de maille a à température nulle et donner sa valeur numérique.

1.2.3. Calculer l'énergie de liaison, i.e. l'énergie à apporter pour briser la liaison ionique.

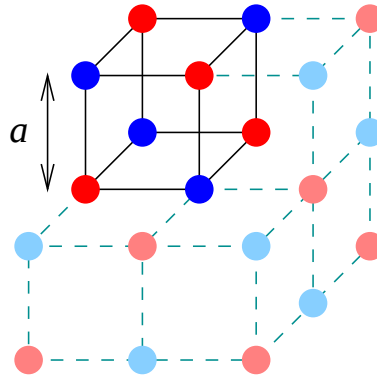


Figure 1.1 : *Structure du chlorure de sodium.*

TD 4 : Potentiel créé par des charges ponctuelles

Exercice 1 : Charge ponctuelle

- 1.1.** On considère dans un premier temps une charge ponctuelle q située à l'origine.
- 1.1.1.** Rappeler l'expression $V(x, y, z)$ du potentiel créé par la charge dans le système de coordonnées cartésiennes.
- 1.1.2.** Déterminer les surfaces équipotentielles $V(x, y, z) = \text{Cste}$.
- 1.1.3.** Calculer le champ électrique en tout point $M \neq O$ et représenter sa direction dans les deux plans $x = 0$ et $y = 0$. On pourra choisir $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} = 1$ pour simplifier la représentation.

Exercice 2 : Fil chargé

- 2.1.** Le potentiel électrique créé par un fil chargé est de la forme

$$V(x, y, z) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

- 2.1.1.** Déterminer les surfaces équipotentielles $V(x, y, z) = \text{Cste}$.
- 2.1.2.** A votre avis, où se trouve le fil chargé ?
- 2.1.3.** Calculer le champ électrique en tout point de l'espace (x, y, z) avec $x^2 + y^2 \neq 0$ et représenter sa direction dans les deux plans $x = 0$ et $z = 0$. On pourra choisir $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} = 1$ pour simplifier la représentation.

Exercice 3 : Charge dans un condensateur

- 3.1.** On considère un condensateur plan suffisamment grand pour qu'on puisse supposer qu'entre ses armatures, situées dans les plans $y = -d$ et $y = +d$, le champ électrique est uniforme :

$$\vec{E}(x, y, z) = E_0 \vec{u}_y.$$

On place à l'origine une charge ponctuelle q .

- 3.1.1.** Quel est le champ électrique total entre les deux armatures ? Le représenter en plusieurs points du plan (Oxy) si $\frac{q}{4\epsilon_0} = 2$ et $E_0 = 1$.
- 3.1.2.** A quoi doivent ressembler les lignes de champ en présence seulement du condensateur (i.e. en l'absence de la charge) ? A quoi ressemblent les lignes de champ de la charge seule ? Essayer de deviner à quoi peuvent ressembler les lignes de champ d'une charge dans un condensateur.

Exercice 4 : Dipôle électrique

- 4.1. On considère deux charges q_1 et $-q_2$, de signes opposées, situées aux points $M_1 = (-1 \ 0 \ 0)$ et $M_2 = (1 \ 0 \ 0)$ du système de coordonnées cartésiennes.
- 4.1.1. Donner l'expression $V(x, y, z)$ du potentiel total créé par les deux charges dans le système de coordonnées cartésiennes.
- 4.1.2. Déterminer le champ électrique total créé par les deux charges dans le plan $z = 0$. Représenter ce champ électrique en différents points du plan si $\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} = 1$ et $\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} = 2$.
- 4.1.3. Déterminer la courbe équipotentielle $V(x, y, 0) = \text{Cste}$ où le potentiel s'annule. Montrer qu'il s'agit d'un cercle (Indice : commencer par écrire l'équation algébrique d'un cercle pour savoir sous quelle forme se présente l'expression recherchée).
- 4.1.4. Que devient la surface $V = 0$ lorsque $q_1 = -q_2$.

Exercice 5 : Relation entre champ et potentiel

- 5.1. Dans les exemples qui suivent, on donnera soit le potentiel, soit le champ électrique et on demande d'en déduire inversement le champ ou le potentiel.
- 5.1.1. On considère un cercle de rayon r_0 portant une charge totale Q répartie uniformément sur le périmètre de l'anneau. Le potentiel en un point de l'axe distant de $z > 0$ du centre du cercle vaut

$$V_{\text{cercle}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z} (1 + r_0^2/z^2)^{-1/2}.$$

Quel est son comportement à grande distance ? Déterminer le champ électrique associé en tout point de l'axe.

- 5.1.2. On considère une sphère de rayon r_0 portant une charge totale Q uniformément répartie dans le volume de la sphère. On choisit les coordonnées sphériques. Utiliser des arguments de symétrie pour donner la forme attendue du potentiel et du champ en tout point. Que doit-on obtenir à grande distance ? On montre que le champ est de la forme

$$E_{<}(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}, \text{ si } r < r_0,$$
$$E_{>}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ si } r > r_0.$$

Tracer $E(r)$ et déterminer le potentiel à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère, puis tracer $V(r)$.

- 5.1.3. On considère un fil rectiligne infini de diamètre négligeable, portant une charge uniformément répartie de densité linéique λ . En coordonnées cylindriques, de quelles variables dépend le champ électrique et quelle sont sa direction et son sens ? Peut-on donner a priori le comportement asymptotique à grande distance ? L'expression exacte du champ est la suivante

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

En déduire l'expression du potentiel en imposant la condition $V(r = a) = V_0$. Tracer l'allure de $E(r)$ et $V(r)$.

TD 5 : Champ et potentiel du dipôle électrique

Exercice 1 : Développements limités et dipôle électrique

- 1.1.** Soit $f(x)$ une fonction infiniment dérivable. Supposons connues sa valeur et celles de ses dérivées en un point x_0 . On cherche à estimer $f(x)$ par une fonction approchée $f_{\text{app}}(x)$ en un point voisin de x_0 , c'est-à-dire tel que $x - x_0 = \epsilon$, $|\epsilon| \ll 1$.
- 1.1.1.** Pour cela on tracera une fonction $f(x)$, on exprimera sa pente en x_0 et on calculera la valeur prise par la tangente en x_0 au point x . On notera $f_{\text{app}}(x)$ cette valeur.
- 1.1.2.** Soient par exemple $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$. Calculer les valeurs de f et g en $x = 1.1$ et en 1.01 et comparer aux valeurs approchées $f_{\text{app}}(1.1)$ et $g_{\text{app}}(1.1)$ (puis $f_{\text{app}}(1.01)$ et $g_{\text{app}}(1.01)$). Calculer l'erreur relative et commenter.
- 1.1.3.** En mathématiques, on démontre le développement de Taylor qui devient **exact** dans la limite d'un nombre infini de termes :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{1}{1!}(x - x_0)f^{(1)}(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 f^{(2)}(x_0) + \dots \\ &\quad + \dots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

où $f^{(n)}(x)$ est la dérivée n -ième de $f(x)$. On remarque que le développement n'est licite que dans un domaine où la fonction ne présente pas de singularité.

Dans la plupart des applications en physique, on peut se limiter à des développements du premier ordre (linéarisation) ou du second ordre. Calculer $f_{\text{app}}(1.1)$ et $g_{\text{app}}(1.1)$ jusqu'au second ordre ainsi que les erreurs correspondantes.

- 1.1.4.** Application au dipôle électrostatique : deux charges $+q$ et $-q$ distantes de ℓ créent en un point M distant de r de l'origine (prise au milieu des charges) un potentiel électrostatique

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

où r_+ et r_- sont indiqués sur le schéma. Exprimer r_+ et r_- en fonction de r , ℓ et θ †.

† Dans l'espace à trois dimensions, il faut deux angles θ et φ et une distance r pour repérer un point en coordonnées sphériques (l'origine est ici choisie par raison de symétrie au milieu des deux charges). Ayant choisi un axe z , l'angle θ repère l'inclinaison de la direction $\vec{r}$ par rapport à z (angle zénithal) et l'angle φ repère la rotation autour de z depuis un axe x perpendiculaire (angle azimutal). Lorsque la distribution de charges est comme ici invariante par rotation autour de z , il est inutile de spécifier l'axe x et les grandeurs physiques sont indépendantes de φ .

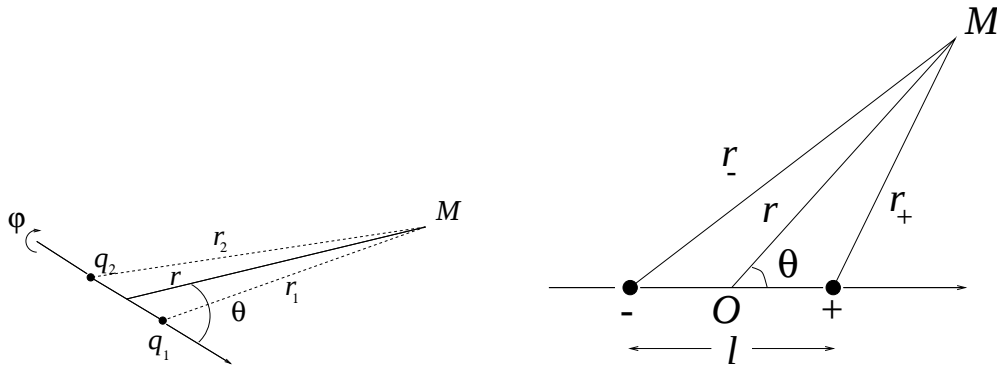


Figure 1.1 :

Si $\ell \ll r$ (ce qui est le cas pour les applications en physique où les dipôles électrostatiques se rencontrent par exemple lorsque des liaisons chimiques sont polarisées), développer $1/r_+$ et $1/r_-$ au premier ordre en ℓ/r . En déduire le potentiel à grande distance dans cette approximation.

1.1.5. La quantité $p = q\ell$ est appelée moment dipolaire. Calculer la valeur typique du moment dipolaire d'une molécule.

1.1.6. Les composantes du champ électrique en coordonnées polaires s'écrivent :

$$E_r(r, \theta) = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad E_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Exprimer ces composantes.

1.1.7. Exprimer le potentiel puis le champ électrique en coordonnées cartésiennes.

1.1.8. Déterminer l'équation des surfaces équipotentielles puis celle des lignes de champ. Représenter ces allures.

Exercice 2 : Champ électrique quadrupolaire

2.1. On considère quatre charges ponctuelles q_1, q_2, q_3 et q_4 situées aux sommets d'un carré de côté $2a$. Le carré est placé dans le plan $z = 0$ et son centre est confondu avec l'origine O . On pourra placer les sommets aux points de coordonnées

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.1.1. Donner l'expression (sous forme de vecteur colonne) du champ électrique $\vec{E}(O)$ au centre du carré.

2.1.2. En supposant que les charges ne peuvent prendre que deux valeurs possibles, $+q$ et $-q$, quel doit être le signe des quatre charges q_1, q_2, q_3 et q_4 pour que le champ électrique $\vec{E}(O)$ soit dirigé dans la direction de $\vec{u}_x$?

2.1.3. Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)$ au point M de coordonnées $(0 \ 0 \ z)$.

2.1.4. Montrer qu'à grande distance des charges, i.e. $z \gg a$, le champ électrique n'est inversement proportionnel à la distance au carré que si la somme des charges est non nulle.

2.1.5. Donner l'expression du potentiel V créé par les quatre charges en tout point $M = (x \ y \ z)$ de l'espace. Donner le comportement asymptotique du potentiel lorsque $z \gg x, y, a$ en simplifiant l'expression au moyen du développement

$$(\epsilon + z^2)^{-1/2} = \frac{1}{z} - \frac{\epsilon}{2z^3} + \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon^2}{z^5}\right)$$

et en supposant que la somme des charges est nulle.

TD 6 : Distribution continue

Exercice 1 : Distributions de charge

- 1.1.** Soit un point M repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) . dans le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.
- 1.1.1.** Considérez un déplacement élémentaire du point M . Les nouvelles coordonnées de M sont $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Représenter le vecteur déplacement élémentaire de composantes (dx, dy, dz) .
- 1.1.2.** Représenter et exprimer les surfaces élémentaires dS_x , dS_y et dS_z en fonction de dx , dy et dz .
- 1.1.3.** Calculer le volume du parallélépipède rectangle de côtés a , b , et c .
- 1.1.4.** Déterminer par intégrations successives la charge portée par ce parallélépipède chargé de densité volumique de charge

$$\rho(x, y, z) = \frac{r_0}{a^6} xy^2 z^3$$

- 1.2.** Considérons un point M repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) dans le repère $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.
- 1.2.1.** Représenter le dièdre $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ au point M .
- 1.2.2.** Considérer un déplacement élémentaire du point M . Les nouvelles coordonnées de M sont $(r + dr, \theta + d\theta)$. Représenter le vecteur déplacement élémentaire de composantes $(d\ell_r, d\ell_\theta)$ selon $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.
- 1.2.3.** Exprimer les éléments différentiels $d\ell_r$ et $d\ell_\theta$ en fonction de r, dr, θ et $d\theta$.
- 1.2.4.** Calculer la circonférence du demi-cercle de rayon R .
- 1.2.5.** Calculer la surface du demi-disque de rayon R .
- 1.2.6.** Déterminer par intégrations successives la charge portée par le demi-disque de rayon R chargé en surface avec la densité surfacique

$$\sigma(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{a} r \cos \theta$$

- 1.3.** Considérons un point M repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans le repère $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.
- 1.3.1.** Représenter le trièdre $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ au point M .
- 1.3.2.** Considérer un déplacement élémentaire du point M . Les nouvelles coordonnées de M sont $(r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$. Représenter le vecteur déplacement élémentaire de composantes $(d\ell_r, d\ell_\theta, d\ell_z)$ selon $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.
- 1.3.3.** Exprimer les éléments différentiels $d\ell_r, d\ell_\theta$ et $d\ell_z$ en fonction de $r, dr, \theta, d\theta, z$ et dz .
- 1.3.4.** Calculer la surface d'un cylindre de rayon R et hauteur L .
- 1.3.5.** Calculer le volume d'un cylindre de rayon R et hauteur L .

1.3.6. Déterminer par intégrations successives la charge un cylindre de rayon R et de hauteur L portant la densité surfacique de charges

$$\sigma = \sigma_0 \cos \theta$$

1.4. Considérons un point M repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans le repère $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

1.4.1. Représenter le trièdre $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ au point M .

1.4.2. Considérer un déplacement élémentaire $(dl_r, dl_\theta, dl_\varphi)$ du point M . Les nouvelles coordonnées de M sont $(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$. Représenter le vecteur déplacement élémentaire de composantes $(dl_r, dl_\theta, dl_\varphi)$ selon $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

1.4.3. Exprimer les éléments différentiels dl_r, dl_θ et dl_φ en fonction de $r, dr, \theta, d\theta, \varphi$ et $d\varphi$.

1.4.4. Calculer la surface d'une sphère de rayon R .

1.4.5. Calculer le volume d'une sphère de rayon R .

1.4.6. Déterminer par intégrations successives la charge portée par une sphère de rayon R chargée uniformément avec la densité volumique constante.

1.4.7. Déterminer par intégrations successives la charge portée par une sphère de rayon R chargé avec la densité volumique

$$\rho = ar^2$$

Exercice 2 :

2.1. Calculer la charge totale d'un carré de centre O et de côtés a portant une densité surfacique de charge

$$\sigma(x, y) = \sigma_0 x^2 y^4$$

2.2. Calculer la charge totale d'un cube de centre O et de côtés a portant une densité volumique de charge

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 (x^2 + y^2)$$

2.3. Calculer la charge totale d'un disque de centre O et de rayon R portant une densité surfacique de charge

$$\sigma(r, \theta) = \sigma_0 r^2 \cos \theta$$

2.4. Calculer la charge totale d'un cylindre de centre O , de rayon R et de hauteur h portant une densité volumique de charge

$$\rho(r, \theta, z) = \rho_0 r \cos^2 \theta$$

(indice : vous pourrez réécrire $\cos^2 \theta$ en fonction de $\cos 2\theta$ avant d'intégrer).

2.5. Calculer la charge totale d'une sphère de centre O et de rayon R portant une densité surfacique de charge

$$\sigma(\theta, \varphi) = \sigma_0 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi$$

(indice : vous pourrez effectuer le changement de variable $u = \cos \theta$).

2.6. Calculer la charge totale d'une sphère de centre O et de rayon R portant une densité volumique de charge

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_0 r \cos^2 \theta e^{-r/a}$$

(indice : vous pourrez effectuer une intégration par parties).

TD 7 : Champ électrique d'une distribution continue (1)

Exercice 1 : Demi-cercle chargé

- 1.1. On considère un demi-cercle de rayon R , de centre O portant une charge Q uniformément répartie. Calculer le potentiel et le champ en O .

Exercice 2 : Disque chargé, plan chargé

- 2.1. On considère une couronne circulaire uniformément chargée en surface, portant une densité surfacique constante σ , comprise entre deux cercles concentriques de rayons a et b .
- 2.1.1. Exprimer la charge totale Q en fonction de σ , a et b .
- 2.1.2. Calculer le champ électrique en un point quelconque de l'axe.
- 2.1.3. Retrouver le résultat relatif au disque plein, chercher également la limite du plan infini. En quoi le champ dans ce dernier cas est-il remarquable ? Que vaut alors le potentiel ?
- 2.1.4. Utiliser le théorème de superposition pour obtenir le champ sur l'axe d'une ouverture circulaire vide percée dans un plan infini chargé.

Exercice 3 : Fil rectiligne infini chargé

- 3.1. On considère un fil rectiligne infini de section négligeable, chargé uniformément avec une densité linéique λ .
- 3.1.1. On se propose de calculer le champ et le potentiel en un point quelconque. Quelle est l'orientation du champ et de quelles variables dépendent le module du champ et le potentiel ?
- 3.1.2. Donner la forme du potentiel créé par un élément de longueur du fil, montrer que la forme intégrale du potentiel conduit à une divergence. Cela signifie-t-il que le potentiel diverge effectivement ?
- 3.1.3. Calculer le champ électrique, puis en déduire le potentiel réel.

Exercice 4 : Fil rectiligne infini

- 4.1. On considère un fil rectiligne infini, portant une densité de charge λ répartie uniformément sur sa longueur.
- 4.1.1. Utiliser les arguments de symétrie pour déterminer la direction du champ électrique et les coordonnées dont dépend son module.
- 4.1.2. Calcul direct : on exprimera les intégrales pour le calcul de $E(r)$ ou de $V(r)$ en fonction l'angle α orienté représenté ci-dessous et de la distance r .

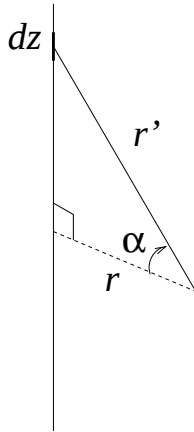


Figure 4.1 :

4.1.3. Déterminer la valeur du module du champ électrique,

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r},$$

par un calcul direct.

4.1.4. En déduire l'expression du potentiel électrostatique en imposant la condition $V(r = a) = 0$ où a est une distance quelconque. Tracer l'allure de $E(r)$ et $V(r)$.

4.1.5. Montrer que le calcul direct pour le potentiel conduit à des divergences. On donne

$$\int \frac{d\alpha}{\cos \alpha} = \ln \tan \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

4.1.6. Discuter l'origine de ces divergences.

TD 8 : Champ électrique d'une distribution continue (2)

Exercice 1 : Segment chargé

- 1.1. On considère un segment de longueur $2a$ placé sur l'axe Oy (l'origine est au milieu du segment), et portant une charge

$$\lambda(y) = \begin{cases} \lambda_0, & y > 0 \\ -\lambda_0, & y < 0 \end{cases}$$

- 1.1.1. Calculer la charge totale Q portée par le segment.
- 1.1.2. Calculer le champ électrique en un point M de l'axe (Ox) (on pourra utiliser les symétries pour déterminer l'orientation du champ). Déterminer le comportement asymptotique à grande distance.
- 1.1.3. Montrer que l'on peut faire une analogie avec le dipôle électrique et expliquer pourquoi.

Exercice 2 : Sphère chargée non uniformément en surface

- 2.1. On considère une sphère portant une charge répartie en surface selon une dépendance angulaire $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$ (σ_0 est une constante).
- 2.1.1. Déterminer le potentiel en son centre. Peut-on déduire de l'expression du potentiel en ce point la valeur du champ ?
 - 2.1.2. Déterminer de manière directe la valeur du champ au centre de la sphère.

Exercice 3 : Comportement dipolaire du potentiel créé à grande distance par une distribution neutre

- 3.1. On considère une *demi*-sphère de rayon r_0 portant une charge totale Q uniformément répartie en volume. On note O son centre et Oz l'axe de symétrie.
- 3.1.1. Exprimer la densité volumique de charge ρ .
 - 3.1.2. On s'intéresse à un point de l'axe, à la distance z du centre O . Quelle est la forme asymptotique du potentiel à grande distance ? Quels sont la direction et le module du champ à grande distance ?
 - 3.1.3. L'élément de volume est noté $d\tau = R^2 dR \sin \theta d\theta d\varphi$. Quelles sont les bornes de variation des trois coordonnées sphériques pour décrire la source de charges ? Exprimer la distance r' en fonction de z , R et θ . La partie droite de la figure représente la projection dans le plan $(\vec{R}, \vec{u}_z)$ de la figure de gauche.

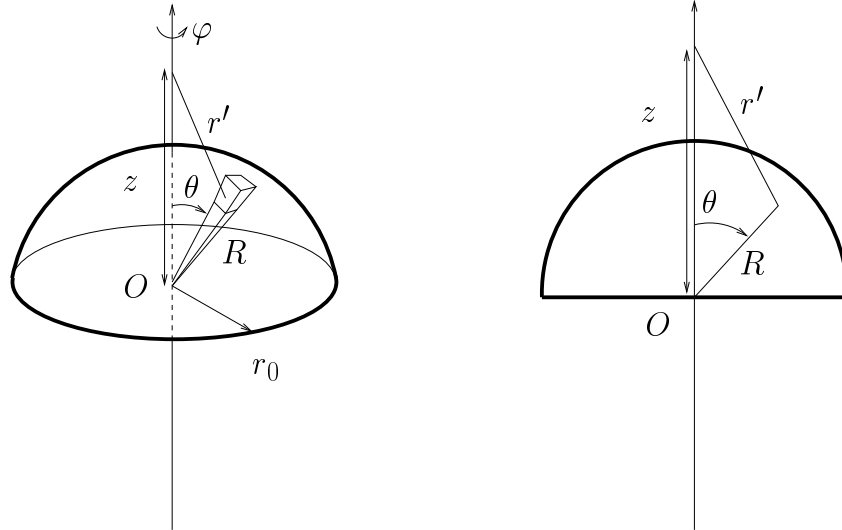


Figure 3.1 :

3.1.4. On s'intéresse au comportement à grande distance du potentiel, mais on ne se contente plus désormais de l'approximation coulombienne. Montrer qu'un développement au premier ordre en R/z du potentiel élémentaire créé par $d\tau$ est donné par

$$dV(z) \simeq \frac{3Q}{2\pi\epsilon_0 r_0^3 z} \left(1 + \frac{R}{z \cos \theta} \right) d\tau.$$

En déduire à cet ordre l'expression du potentiel créé sur l'axe Oz à grande distance par la demi-sphère.

3.1.5. Calculer le champ électrique correspondant.

3.1.6. On rapproche une demi-sphère complémentaire à la première, mais chargée *négativement*, de sorte qu'on obtienne une sphère complète (la figure ci-après montre comment la seconde demi-sphère vient compléter la première, avant qu'elles ne soient en contact).

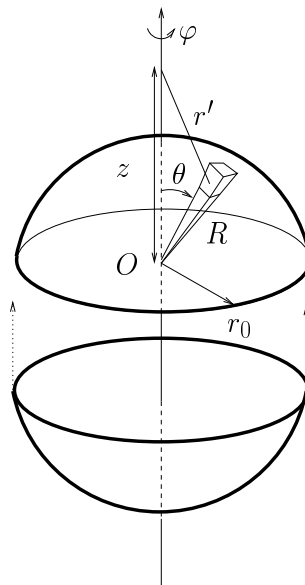


Figure 3.2 :

A partir des résultats précédents, exprimer le potentiel créé par cette seconde demi-sphère au même point z . En déduire que le potentiel total créé par les deux demi-sphères

se met sous la forme

$$V(z) \simeq \frac{p}{\varepsilon_0 z^2}.$$

Commenter cette expression, que vaut p ? Quel est la champ créé en z ?

Exercice 4 : Le dipôle plan

4.1. Un fil rectiligne infini porte une densité de charges constante λ par unité de longueur.

4.1.1. Calculer le champ électrique $\vec{E}_\lambda(\vec{r})$ (on repère la position $\vec{r}$ en coordonnées cylindriques (r, φ, z)) en un point quelconque de l'espace.

4.1.2. En déduire le potentiel électrostatique $V_\lambda(\vec{r})$.

4.2. On considère maintenant deux fils rectilignes infinis parallèles, portant des densités uniformes de charges opposées $+\lambda$ et $-\lambda$ et distants de d . On appelle r_+ et r_- les distances d'un point d'observation M aux deux fils.

4.2.1. Exprimer le potentiel électrostatique total $V_{2 \text{ fils}}$ en fonction des distances r_+ et r_- (on choisira un potentiel nul dans le plan équidistant des deux fils).

4.2.2. On fixe l'origine des coordonnées entre les deux fils et à égale distance et on travaille dans un plan perpendiculaire à ces fils. La distance à l'origine est notée r et l'angle mesuré dans le plan par rapport au segment joignant les fils est noté φ . Exprimer les distances r_+ et r_- en fonction de r , d et φ .

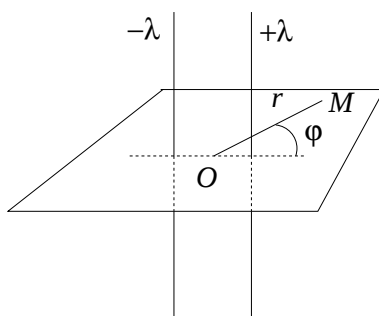


Figure 4.1 :

4.2.3. Dans l'approximation de grande distance $r \gg d$ (approximation du dipôle plan), l'expression du potentiel prend une forme assez simple. En utilisant le développement limité au premier ordre $\ln(1 + \epsilon) \simeq \epsilon$, montrer que

$$V(r, \varphi) = \frac{p \cos \varphi}{2\pi \varepsilon_0 r}.$$

Exprimer p . Vérifier les dimensions du potentiel.

4.2.4. En déduire les composantes du champ électrique $\vec{E}_{2 \text{ fils}}(\vec{r})$. Comparer les résultats à ceux du dipôle ordinaire (que l'on rappellera) et donner une raison à la décroissance plus lente en fonction de r dans le problème du dipôle plan.

TD 9 : Théorème de Gauss (1)

Exercice 1 : Distributions de charges sphériques

1.1. Champ et potentiel à l'extérieur d'une distribution sphérique

1.1.1. Justifier les formes suivantes pour le potentiel et le champ créés par une distribution sphérique de rayon r_0 chargée uniformément en volume

$$V(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0 r} f(r_0/r),$$
$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0 r^2} g(r_0/r) \vec{u}_r.$$

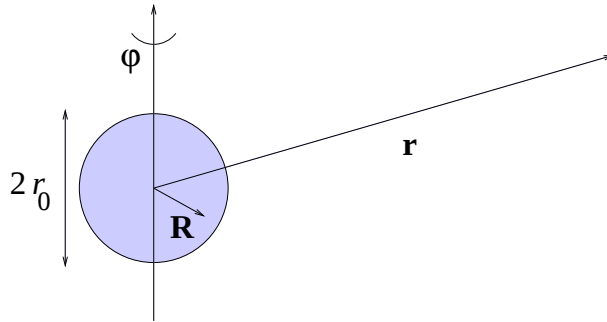


Figure 1.1 :

1.1.2. Que doit-on attendre comme comportement des fonctions f et g à l'infini ? Utiliser le théorème de Gauss pour exprimer le champ en un point quelconque $r > r_0$. En déduire le potentiel et commenter les expressions. Qu'est-ce qui changerait si la charge était uniformément répartie à la surface de la sphère ?

1.2. Dans le cas où la charge est répartie en volume, calculer le champ à l'intérieur de la sphère, puis le potentiel. Que valent les fonctions f et g pour $r < r_0$? Même question pour une charge de surface.

Exercice 2 :

2.1. On considère une sphère de centre O et de rayon R_2 . On réalise au centre de cette sphère une cavité vide, sphérique, de centre O et de rayon $R_1 < R_2$. On suppose que ce qui reste de la sphère porte une densité de charge volumique ρ uniforme.

2.1.1. Établir la liste exhaustive des plans de symétrie de la distribution de charge. Que pouvez-vous en déduire quant au champ électrique en un point M quelconque ?

2.1.2. Quelles transformations laissent la distribution de charge invariante ? Que pouvez-vous en déduire quant au champ électrique en un point M quelconque ?

2.1.3. Quelle surface de Gauss choisir pour simplifier le calcul du champ électrique au point M de coordonnées sphériques $(r \ \theta \ \phi)$?

- 2.1.4.** Donner l'expression d'un élément de surface dS sur la surface de Gauss. En déduire le flux du champ électrique.
- 2.1.5.** Déterminer le champ électrique à l'extérieur de la sphère, dans la partie chargée et dans la cavité vide.
- 2.1.6.** En déduire le potentiel électrique V en tout point de l'espace.
- 2.2.** On considère à présent une sphère de centre O et de rayon R portant une densité volumique de charge non uniforme

$$\rho(r, \theta, \phi) = \rho_0 \frac{r^2}{R^2}$$

dans le système de coordonnées sphériques.

- 2.2.1.** Calculer la charge totale portée par la sphère.
- 2.2.2.** Reprendre les questions 2.1.1 à 2.1.6.

TD 10 : Théorème de Gauss (2)

Exercice 1 :

- 1.1.** On considère un fil rectiligne infini de rayon r_0 portant une charge répartie uniformément en volume de densité ρ . Utiliser les arguments de symétrie et le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrique en tout point de l'espace. En déduire le potentiel obéissant à la condition arbitraire $V(r_0) = 0$.

Exercice 2 :

- 2.1.** On considère un cylindre creux, de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 , infini dans l'autre direction et d'axe de révolution suivant (Oz) . On suppose que le cylindre porte une densité de charge volumique ρ uniforme.
- 2.1.1.** Établir la liste exhaustive des plans de symétrie de la distribution de charge. Que pouvez-vous en déduire quant au champ électrique en un point M quelconque ?
- 2.1.2.** Quelles transformations laissent la distribution de charge invariante ? Que pouvez-vous en déduire quant au champ électrique en un point M quelconque ?
- 2.1.3.** Quelle surface de Gauss choisir pour simplifier le calcul du champ électrique au point M de coordonnées cylindriques $(r \ \theta \ z)$?
- 2.1.4.** Donner l'expression d'un élément de surface dS sur la surface de Gauss. En déduire le flux du champ électrique.
- 2.1.5.** Déterminer le champ électrique à l'extérieur du cylindre, dans la partie chargée et dans la cavité vide à l'intérieur.
- 2.1.6.** En déduire le potentiel électrique V en tout point de l'espace.
- 2.2.** On considère un cylindre de rayon R , infini et d'axe de révolution suivant (Oz) . On suppose que le cylindre porte une densité de charge volumique ρ non-uniforme :

$$\rho(r, \theta, z) = \rho_0 \frac{r^3}{R^3}$$

dans le système de coordonnées cylindriques.

- 2.2.1.** Calculer la charge totale portée par le cylindre sur une hauteur h .
- 2.2.2.** Reprendre les questions 2.1.1 à 2.1.6.
- 2.2.3.** Quelles transformations laissent la distribution de charge invariante ? Que pouvez-vous en déduire quant au champ électrique en un point M quelconque ?

TD 11 : Théorème de Gauss (3)

Exercice 1 : Modèle sommaire d'atome

- 1.1.** On considère un modèle rudimentaire d'atome constitué d'un noyau ponctuel de charge $+Z|q_e|$ entouré d'un cortège électronique représenté par une densité volumique de charge de la forme

$$\rho_e(r) = \begin{cases} \rho_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

- 1.1.1.** Calculer le constante ρ_0 en fonction des paramètres du problème.
1.1.2. Déterminer le champ électrique puis le potentiel à l'intérieur et à l'extérieur du rayon a .
1.1.3. Peut-on donner une estimation de l'énergie d'ionisation de l'atome ?
1.1.4. Donner des valeurs numériques réalistes de a et de cette énergie.

Exercice 2 : Atome d'hydrogène

- 2.1.** L'atome d'hydrogène dans son état fondamental est représenté par : - le proton (constituant le noyau) assimilé à une charge ponctuelle $+|q_e|$ à l'origine O du repère (r, θ, φ) , et produisant un potentiel purement coulombien $V_n(r)$, - une densité de charge électronique $\rho_e(r) = Ce^{-2r/a_0}$, $a_0 = 0.529 \text{ \AA}$.

- 2.1.1.** La constante C est déterminée en assurant la neutralité électrique (l'intégrale se calcule par intégration par parties (1)). Montrer que l'on obtient

$$-|q_e| = \int_0^\infty 4\pi r^2 dr \rho_e(r) = \pi a_0^3 C.$$

- 2.1.2.** Pour calculer le champ électrique créé par l'atome, on utilise le théorème de Gauss. La charge totale contenue à l'intérieur d'une sphère Σ de rayon r (centrée sur l'origine) vaut

$$Q_\Sigma = |q_e| + Q_e(r) = |q_e| + \int_0^r 4\pi r^2 dr \rho_e(r)$$

où $Q_e(r)$ est la contribution du nuage électronique et $|q_e|$ celle du noyau. Calculer Q_Σ (2).

(1) On obtient la fonction Γ d'Euler définie par $\Gamma(n+1) \equiv \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt = n\Gamma(n)$ avec $\Gamma(1) = 1$, soit $\Gamma(n+1) = n!$ si n est entier.

(2) On établit facilement par intégration par parties la relation

$$\Gamma_a(n+1) \equiv \int_0^a t^n e^{-t} dt = [-t^n e^{-t}]_0^a + n \int_0^a t^{n-1} e^{-t} dt = n\Gamma_a(n) - a^n e^{-a}$$

et $\Gamma_a(1) = 1 - e^{-a}$.

2.1.3. Montrer que le flux du champ électrique (3) à travers Σ , $4\pi r^2 E(r)$, conduit, à l'aide du théorème de Gauss, à l'expression

$$E(r) = \frac{|q_e|}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{a_0 r} + \frac{1}{2r^2} \right) e^{-2r/a_0}$$

2.1.4. Expliquer le résultat obtenu dans la limite $r \rightarrow 0$. Le potentiel correspondant s'obtient par intégration†

$$V(r) = \frac{|q_e|}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{r} \right) e^{-2r/a_0}.$$

2.1.5. L'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène est déterminée en évaluant le travail nécessaire pour extraire du potentiel $V_n(r)$ créé par le noyau seul un électron de charge $-|q_e|$ et l'emmener de la distance $r = a_0$ à l'infini. Exprimer cette énergie de liaison et donner sa valeur numérique.

(3) La distribution de charge est sphérique, le champ est donc radial, $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{u}_r$.

† On cherche pour cela une solution de la forme $(a + b/r)e^{-2r/a_0}$.

TD 12 : Condensateurs, charge et décharge

Exercice 1 : Condensateur sphérique

- 1.1. On considère deux sphères concentriques, de centre O , de rayons R_1 et $R_2 > R_1$ et portant une densité surfacique de charge respectivement σ_1 et σ_2 .
- 1.1.1. Quelle doit être la relation entre σ_1 et σ_2 pour que le système soit globalement neutre ?
- 1.1.2. Établir la liste exhaustive des plans de symétrie de la distribution de charge. Que pouvez-vous en déduire quant au champ électrique en un point M quelconque ?
- 1.1.3. Quelles transformations laissent la distribution de charge invariante ? Que pouvez-vous en déduire quant au champ électrique en un point M quelconque ?
- 1.1.4. Quelle surface de Gauss choisir pour simplifier le calcul du champ électrique au point M de coordonnées sphériques $(r \ \theta \ \phi)$?
- 1.1.5. Donner l'expression d'un élément de surface dS sur la surface de Gauss. En déduire le flux du champ électrique.
- 1.1.6. Déterminer le champ électrique en tout point de l'espace.
- 1.1.7. En déduire le potentiel électrique V en tout point de l'espace.
- 1.1.8. Le système forme un condensateur. Calculer la différence de potentiel entre les deux armatures sphériques.
- 1.1.9. Calculer la charge Q de l'armature extérieure puis la capacité de ce condensateur sphérique.

Exercice 2 : Condensateur plan

- 2.1. On étudie un condensateur plan pour lequel on néglige les effets de bords, c'est-à-dire que l'on suppose que les deux armatures planes, distantes de e , de surface S , chargées uniformément (densité σ), créent un champ électrique uniforme (comme des plans chargés infinis).
- 2.1.1. Rappeler l'expression du champ électrostatique $\vec{E}_1$ créé par l'armature chargée positivement. Représenter les champs E_1 , E_2 dus aux deux armatures et appliquer le théorème de superposition pour en déduire le champ total E .
- 2.1.2. Calculer le potentiel électrostatique $V(z)$ entre les armatures. Exprimer la différence de potentiel $V(0) - V(e)$ en fonction de la densité σ puis de la charge totale Q portée par une armature.
- 2.1.3. En déduire la capacité C du condensateur. AN $S = 25\text{cm}^2$, $e = 1\text{mm}$, $\epsilon_0 \simeq 1/(36\pi 10^9) \text{ F/m}$

TD 13 : Courant électrique

Exercice 1 : Conductivité électrique dans les métaux

1.1. La conductivité électrique dans les métaux est due à la présence d'électrons libres.

Le cuivre libère à l'état métallique un électron par atome. On considère un fil de cuivre de section $S = 1 \text{ mm}^2$. La masse volumique du cuivre est $\rho = 8,9 \text{ g.cm}^{-3}$ et sa masse molaire $m_{\text{Cu}} = 63,6 \text{ g.mol}^{-1}$. On rappelle que le nombre d'Avogadro vaut $\mathcal{N} = 6,02.10^{23} \text{ at.mol}^{-1}$.

1.1.1. Calculer la densité électronique dans le fil.

1.1.2. Le fil étant parcouru par un courant électrique $I = 10 \text{ A}$, calculer la densité de courant i et la vitesse des électrons.

1.2. On crée une différence de potentiel aux extrémités du fil et donc un champ électrique uniforme E dans le métal. Les électrons sont soumis à l'action de ce champ électrique et à celle d'une force de frottement visqueux de la forme

$$\vec{F}_f = -\frac{m_e}{\tau} \vec{v}$$

qui rend compte en moyenne des collisions entre les électrons et les impuretés ou les défauts d'empilement du cuivre (modèle de Drude, 1900). τ est le temps moyen s'écoulant entre deux chocs. Le frottement décrit phénoménologiquement les collisions représentées sur la figure ci-dessous.

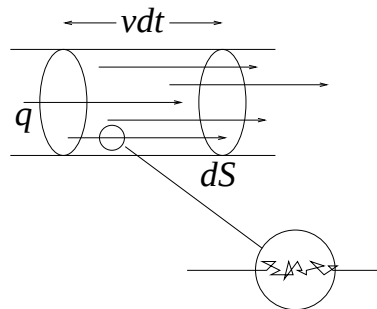


Figure 1.1 :

Établir la loi de variation de la vitesse des électrons en fonction du temps sachant que leur vitesse est nulle à l'instant $t = 0$.

1.2.1. Calculer la vitesse des électrons à l'équilibre.

1.2.2. Calculer la densité de courant dans le fil et en déduire la conductivité électrique du cuivre (Application numérique : $\tau = 4,22.10^{-15} \text{ s}$, $m_e = 9.109.10^{-31} \text{ kg}$).

1.2.3. Calculer la résistance d'un mètre de fil de cuivre de section 1 mm^2 .

TD 14 : Forces de Lorentz et Laplace

Exercice 1 : Forces de Lorentz et de Laplace, effet Hall

- 1.1. On considère une tige en argent traversée par un courant électrique I dans un champ magnétique B . On peut considérer cette tige comme une superposition de charges positives $(Ag)^+$ immobiles et de charges négatives e^- animées d'une vitesse moyenne $\vec{v}$.
 - 1.1.1. Rappeler l'expression de la force de Lorentz.
 - 1.1.2. Exprimer la force volumique subie par les ions argent puis celle subie par les électrons.
 - 1.1.3. Exprimer la neutralité électrique de la tige en argent. En déduire la force exercée sur la tige par unité de volume. Montrer que l'on retrouve ainsi la loi de Laplace pour la force exercée par unité de longueur de la tige.
- 1.2. Un ruban d'argent de largeur ℓ et d'épaisseur d est parcouru par un courant d'intensité I (on se place en régime permanent). On suppose que le ruban est de longueur infinie afin que les lignes de courant soient parallèles à la longueur du fil. On place ce ruban dans un champ magnétique B normal au plan du ruban.

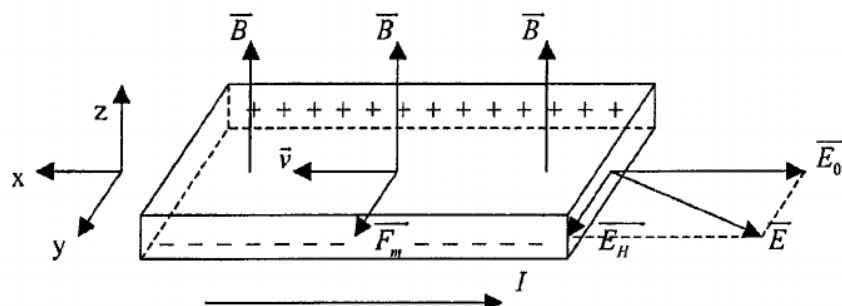


Figure 1.1 : Ruban d'argent.

- 1.2.1. Exprimer la loi d'Ohm sous forme macroscopique et sous forme locale. Retrouver la résistance d'un fil de longueur L , de section S et de conductivité γ .
- 1.2.2. Rappeler l'expression de la force subie par une particule chargée en présence d'un champ électrique et d'un champ magnétique.
- 1.2.3. Exprimer la loi d'Ohm généralisée en présence de champs électrique et magnétique.
- 1.2.4. En tenant compte de la géométrie de la figure ci-dessus, exprimer la densité de courant $\vec{j}$, la vitesse moyenne des électrons $\vec{v}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ dans le repère $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.
- 1.2.5. En déduire que le champ électrique doit être de la forme $\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y$ et relier E_x et E_y à j_x , v_x et B_z .
- 1.2.6. Déterminer la différence de potentiel V_H entre deux points situés sur les petits côtés du ruban, à la même abscisse. L'exprimer en fonction du courant I et de la densité de charges mobiles ρ . Calculer ρ puis la densité d'électrons mobiles. AN: $I = 15 \text{ A}$, $\ell = 1 \text{ cm}$, $d = 10^{-4} \text{ m}$, $B = 2 \text{ T}$ et $V_H = 25.2 \text{ } \mu\text{V}$.

1.2.7. Calculer la vitesse moyenne des électrons.

1.2.8. La masse molaire de l'argent est $M = 108 \text{ g/mol}$, sa masse volumique $\mu = 10.5 \text{ g/cm}^3$. Déterminer la densité atomique de l'argent et en déduire le nombre d'électrons de conduction par atome.

TD 15 : Loi de Biot-Savart (1)

Exercice 1 : Champ magnétique créé par un fil rectiligne

- 1.1.** Un fil rectiligne infini, de section circulaire de rayon a , dont l'axe de révolution coïncide avec l'axe (Oz) , est parcouru par un courant continu d'intensité I . On se place dans le système de coordonnées cylindriques.
- 1.1.1.** Donner l'expression du champ $\vec{B}(M)$ créé en un point M extérieur au fil à une distance r de l'axe du fil.
- 1.1.2.** Le fil parcouru par un courant I présente une densité volumique de courant $\vec{j}$ uniforme sur une section. Après avoir examiné les propriétés de symétrie et d'invariance, reprendre le calcul du champ $\vec{B}(M)$ créé en un point M quelconque., intérieur ou extérieur au fil, à une distance r de l'axe, par une autre technique. Conclure sur les deux techniques possibles. Tracer la courbe $B(r)$. Le champ est-il continu en $r = a$? Commenter cette propriété.
- 1.1.3.** Calculer B à $r = 1 \text{ cm}$ et pour $I = 1 \text{ A}$ et $a = 1 \text{ mm}$. Comparer cette valeur à celle de la composante horizontale du champ magnétique terrestre ($B_{\text{Terre}} \simeq 2.10^{-5} \text{ T}$).
- 1.1.4.** Au cours d'un orage, un éclair peut être assimilé à un fil rectiligne de rayon $a = 12 \text{ cm}$, et parcouru par un courant d'intensité $I = 10^5 \text{ A}$. A moins de quelle distance du point de chute de l'éclair, l'aiguille d'une boussole risque-t-elle d'être désaimantée sachant que cela se produit lorsqu'elle est placée dans un champ supérieur à $B \simeq 2,4.10^{-3} \text{ T}$.
- 1.1.5.** Réfléchir à la contribution au champ d'un segment fini en un point M extérieur au fil et distant de r de l'axe. Quelle(s) loi(s) peut-on utiliser dans ce cas ?

TD 16 : Loi de Biot-Savart (2)

Exercice 1 : Champ magnétique créé par une spire circulaire

1.1. On considère une spire circulaire de centre O , d'axe (Oz) , de rayon R , parcourue par un courant d'intensité I . A partir d'un point M de son axe, elle est vue sous un angle 2β .

1.1.1. En utilisant les propriétés de symétrie, que peut-on dire de la direction du champ magnétique créé par cette spire en un point de son axe ?

1.1.2. En utilisant la loi de Biot et Savart, montrer que le champ magnétique créé en un point M de son axe a pour expression

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \beta$$

1.1.3. Tracer qualitativement la courbe donnant la variation de B en fonction de la distance z du point M au centre O de la spire. Vérifier que la courbe $B(z)$ présente un point d'inflexion pour $z = R/2$. Donner la valeur du rapport $B(R/2)/B(0)$.

1.2. Bobine plate

Calculer le champ sur l'axe d'une bobine plate constituée de N spires identiques, semblables à celle étudiée précédemment. Comparer le champ magnétique créé au centre de la bobine plate de 130 spires de rayon moyen $R = 15 \text{ cm}$ parcourues par un courant d'intensité $I = 1.70 \text{ A}$ au champ magnétique terrestre $B_T \simeq 2.10^{-5} \text{ T}$.

1.3. Bobines d'Helmholtz

On considère un dispositif constitué de deux bobines plates, de même rayon R , de même axe et comportant chacune N spires. Chacune de ces deux bobines est parcourue par un courant électrique de même intensité I et de même sens. La distance entre les centres O_1 et O_2 des bobines est noté d . On appelle O le milieu de O_1O_2 et z la distance d'un point M sur l'axe au point O . On se propose de montrer que pour une certaine valeur de d , que l'on exprimera en fonction de R , le champ magnétique varie très peu sur l'axe au voisinage du point O .

1.3.1. Montrer que le champ magnétique au point M est de la forme

$$B(z) = f\left(\frac{d}{2} + z\right) + f\left(\frac{d}{2} - z\right)$$

où $f(z)$ est une fonction que l'on définira.

1.3.2. Par un développement de Taylor à l'ordre trois de $f(z)$ que l'on ne cherchera pas à exprimer, montrer que pour une certaine valeur de d , que l'on exprimera en fonction de R , le champ magnétique se met sous la forme

$$B(z) = 2f\left(\frac{d}{2}\right) + \sigma(z^3)$$

TD 17 : Théorème d'Ampère

Exercice 1 : Solénoïde infini

1.1. On considère un solénoïde infini de rayon R et formé de n spires par unité de longueur parcourues par un courant I .

1.1.1. Par des considérations de symétrie, déterminer la forme de $\vec{B}(\vec{r})$.

1.1.2. Montrer à l'aide du théorème d'Ampère que ce champ est constant à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde.

1.1.3. En supposant nul le champ à l'extérieur du solénoïde, déduire sa valeur à l'intérieur du solénoïde.

1.1.4. Démontrer que la circulation du champ magnétique le long d'un cercle de rayon r dans le plan (Oxy) s'écrit

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B_{\theta}(r)$$

On prendra soin de bien détailler chaque étape de la justification.

1.1.5. En déduire le champ magnétique créé par le fil en tout point de l'espace.

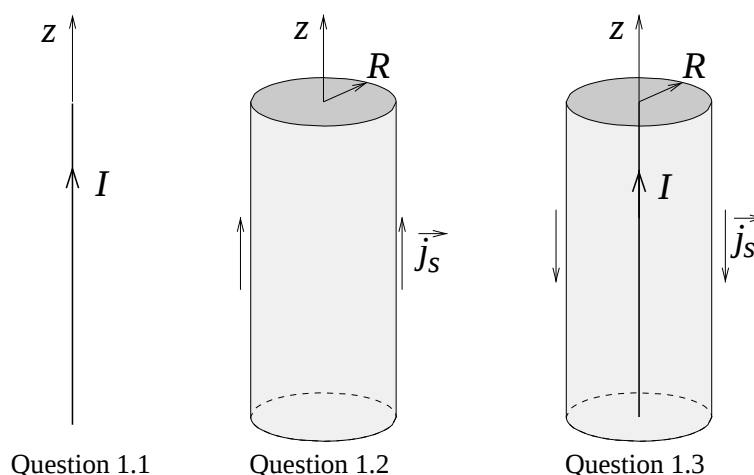


Figure 1.1 : Les trois figures correspondent aux questions 1.1, 1.2 et 1.3 (de gauche à droite).

1.2. On considère à présent un cylindre creux, infini, de rayon R et d'axe de révolution suivant (Oz) . Un courant électrique s'écoule sur la surface du cylindre. On note $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_z$ la densité surfacique de courant et on suppose que j_s est une constante (le courant est uniforme).

1.2.1. Quelle est la relation entre la densité surfacique de courant j_s et l'intensité du courant s'écoulant à travers une section circulaire du cylindre ?

1.2.2. Quels sont les plans de symétrie et d'anti-symétrie de la distribution de courant ? Quelles transformations laissent la distribution de courant invariante ? Quelle conclusion en tirez-vous quant au champ magnétique ?

1.2.3. En appliquant le théorème d'Ampère sur un cercle de rayon r dans un plan perpendiculaire à (Oz) , déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace. Vous distinguerez les cas $r < R$ et $r > R$.

1.3. On considère le câble coaxial rectiligne et infini représenté à droite sur la figure ci-dessus. Le câble est constitué au centre d'un fil, considéré unidimensionnel, puis d'une couche isolante cylindrique de rayon R et finalement d'une couche conductrice infiniment fine. Le fil au centre est parcouru par un courant d'intensité I dirigé vers le haut. La surface cylindrique est quant à elle parcourue par une densité de courant surfacique $\vec{j}_s$ uniforme dirigée vers le bas. Le principe du câble coaxial est que toute l'intensité électrique monte par le fil au centre et redescend par la surface cylindrique.

1.3.1. Montrer que le champ magnétique s'annule à l'extérieur du câble coaxial.