
Méthode de Raleigh-Ritz

1. Méthode de Raleigh-Ritz

La méthode de Raleigh-Ritz est utilisée pour calculer le comportement en vibration d'une structure continue en la discrétisant. On veut donc obtenir le champ de déplacement $\underline{u}(\underline{x}, t) = u_i(\underline{x}, t) \underline{e}_i$ en tout point d'une structure en connaissant de déplacement en n points.

On a recours à des fonctions d'approximations f qui permettent d'écrire :

$$u_i(\underline{x}, t) = \sum_{j=1}^n f_{ij}(\underline{x}) q_j(t)$$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \mathbf{N}(\underline{x}) \cdot \mathbf{q}(t)$$

$\mathbf{q}$ contient les déplacements aux n points de la structure. On a nécessairement :

$$\text{Dim}(\mathbf{N}) = 3 \times n$$

A partir de ce champ de déplacement, on peut évaluer les composantes du champ de déformation en HPP :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, t) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}(\underline{x}) \cdot \mathbf{q}(t) = \mathbf{B}(\underline{x}) \cdot \mathbf{q}(t)$$

avec l'opérateur $\mathbf{D}$ défini comme suit en trois dimensions:

$$\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dim}(\mathbf{D}) = 6 \times 3 \\ \text{Dim}(\mathbf{N}) = 3 \times n \\ \text{Dim}(\mathbf{q}) = n \times 1 \\ \text{Dim}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 6 \times 1 \\ \text{Dim}(\mathbf{B}) = 6 \times n \end{array} \right.$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{13} \quad 2\varepsilon_{12}]$$

En deux dimensions, on a :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dim}(\mathbf{D}) = 3 \times 2 \\ \text{Dim}(\mathbf{N}) = 2 \times n \\ \text{Dim}(\mathbf{q}) = n \times 1 \\ \text{Dim}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 3 \times 1 \\ \text{Dim}(\mathbf{B}) = 3 \times n \end{array} \right.$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12}]$$

A partir de ces notations, **l'énergie cinétique** se note :

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{q}} d\Omega$$

Cette dernière forme étant nécessairement égale à $K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{q}}$

On en déduit la matrice des masses suivante:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} d\Omega \quad \text{Dim} \mathbf{M} = n \times n$$

En ce qui concerne **l'énergie potentielle interne**, on a par définition de l'énergie de déformation en élasticité:

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} : \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad \text{avec } \underline{\underline{\mathbf{A}}} \text{ le tenseur d'ordre 4 des modules d'élasticité.}$$

Dans le cas des notations matricielles (et non tensorielles) utilisées précédemment, cela devient :

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad \text{avec } \mathbf{H} \text{ la matrice de Hooke.}$$

Cette quantité est nécessairement égale à $W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{q}}$

On en déduit donc la matrice de raideur suivante :

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\Omega \quad \text{Dim} \mathbf{K} = n \times n$$

Dans le cas d'un milieu isotrope élastique linéaire, la matrice de Hooke s'écrit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\lambda = E \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

L'énergie cinétique K et l'énergie potentielle interne W_{int} s'écrivent pour une poutre de section S dont les extrémités ont pour abscisse 0 et L :

- dans le cas d'un mouvement longitudinal :
$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S(x) \left(\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx$$

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_0^L ES(x) \left(\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx$$
- dans le cas d'un mouvement de flexion :
$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S(x) \left(\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx$$

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left(\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

En ce qui concerne **l'énergie potentielle externe**, on la décompose en une partie due aux efforts surfaciques imposés et une autre due aux efforts de volume imposés:

$$W_{\text{ext}} = - \int_{\Omega} \rho \underline{f}^v(t) \cdot \underline{u}(t) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \underline{T}(t) \cdot \underline{u}(t) dS$$

$$W_{\text{ext}} = - \int_{\Omega} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{q})^T \cdot \rho \underline{f}^v(t) d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{q})^T \cdot \underline{T}(t) dS$$

$$W_{\text{ext}} = -\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{g} \quad \text{avec le vecteur des charges : } \mathbf{g} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \underline{T} dS + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \rho \underline{f}^v d\Omega$$

On peut obtenir ainsi une forme discrétisée du principe de moindre action :

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{g} \right) dt$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \, d\Omega \\ \mathbf{K} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, d\Omega \\ \mathbf{g} &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \underline{T} \, dS + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \rho \underline{f}^v \, d\Omega \\ \mathbf{B} &= \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}\end{aligned}$$

En procédant ensuite à la variation de $\mathbf{q}$ on obtient les équations du mouvement sous forme discrétisée :

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}$$

Dans le cas de vibrations libres, on a :

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{q}(t) &= \mathbf{Q} e^{i\omega t} \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) &= -\omega^2 \mathbf{Q} e^{i\omega t} \\ \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} &= 0\end{aligned} \right\} \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \omega^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{q}$$

Les solutions sont en nombre infini pour une structure continue et correspondent aux pulsations propres : $0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \omega_3^2 \leq \dots$

Ces pulsations sont liées aux fréquences propres de la structure : $f_1 = \omega_1 / 2\pi$

En discrétisant la structure comme ci-dessus, on réduit un système continu possédant une infinité de degrés de libertés à un système discret à n degrés de liberté. La discrétisation revient à imposer $q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_{\infty} = 0$

Notons désormais $\omega_{1,e}^2$ les pulsations exactes du système et $\omega_{1,c}^2$ les pulsations calculées à partir des matrices de masse et de raideur ci-dessus.

Chaque valeur propre $\omega_{1,c}^2$ résultant de la discrétisation du principe de moindre action constitue une borne supérieure de la fréquence exacte correspondante :

$$\omega_{i,e}^2 \leq \omega_{i,c}^2 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n$$

La valeur calculée $\omega_{1,c}^2$ converge vers la valeur exacte $\omega_{1,e}^2$ lorsque n augmente :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{i,c}^2 = \omega_{i,e}^2$$

De plus, si on note $\omega_{i,cn}^2$ la $i^{\text{ème}}$ pulsation propre calculée à partir d'une discrétisation à n degrés de libertés, on montre que :

$$\omega_{1,cn+1}^2 \leq \omega_{1,cn}^2 \leq \omega_{2,cn+1}^2 \leq \omega_{2,cn}^2 \leq \dots$$

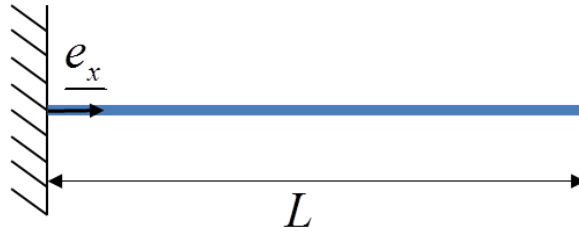
A partir de cette approximation sur $\omega_{i,c}^2$, solutions de $\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \omega^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{q}$, on peut déduire les approximations $\mathbf{q}_{i,c}$ des vecteurs propres associés vérifiant :

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}_{(i),c} - \omega_{(i),c}^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{q}_{(i),c} = 0$$

Les formes propres sont alors approximées à partir des fonctions de forme :

$$\underline{u}_{(i),c} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}_{(i),c}$$

2. Illustration par un exemple : poutre encastrée-libre



On considère la barre ci-dessus en traction-compression de section S .

Le cas de la traction-compression de cette barre a été traité précédemment, en faisant l'hypothèse que l'évolution du déplacement était linéaire selon l'axe de cette barre. Cette hypothèse est déjà une façon de contraindre des degrés de libertés de la structure. On se propose maintenant de modéliser ce déplacement par différentes *fonctions tests* non linéaires, et de calculer les fréquences propres associées à ces modélisations.

Ces fonctions devront être cinématiquement admissible, c'est-à-dire respecter les conditions aux limites imposées en ce qui concerne le champ de déplacement. Ici, ces conditions imposent que le déplacement soit nul en $x = 0$

Hypothèse 1 : degré 1

Comme ci-dessus (poutre encastrée en traction-compression), on peut dans un premier temps faire l'hypothèse que l'évolution du déplacement horizontal de la barre est linéaire. Une fonction test cinématiquement admissible peut être formulée :

$$u(x) = \frac{x}{L} q_1 = \mathbf{N}(x) \cdot \mathbf{q} \text{ avec } \mathbf{N}(x) = \left[\frac{x}{L} \right], \quad \mathbf{q} = [q_1]$$

Par définition, la matrice de masse peut être calculée :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} d\Omega \Rightarrow \mathbf{M} = M_{11} = \int_0^L \rho S \frac{x_1^2}{L^2} dx = \frac{\rho SL}{3}$$

On calcule la matrice de raideur à partir d'une forme générale de l'énergie de déformation:

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}^T \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}$$

Ici la seule composante qui intervient dans $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est ε_{xx} , qui peut s'écrire :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{q_1}{L}$$

On en déduit une forme pour la matrice de raideur :

$$\left. \begin{aligned} W_{\text{int}} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} E \varepsilon_{xx}^2 d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E \frac{q_1^2}{L^2} d\Omega = \frac{1}{2} ES \int_0^L \frac{q_1^2}{L^2} dx = \frac{1}{2} ES \frac{q_1^2}{L} \\ W_{\text{int}} &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2} q_1^2 \mathbf{K} \end{aligned} \right\} \mathbf{K} = K_{11} = \frac{ES}{L}$$

On peut donc écrire le système à résoudre :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} - \omega^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{q} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow K_{11} q_1 - \omega^2 M_{11} q_1 &= 0 \\ \Rightarrow \frac{ES}{L} q_1 - \omega^2 \frac{\rho SL}{3} q_1 &= 0 \\ \Rightarrow \frac{3E}{\rho L^2} = \omega^2 &\Rightarrow \boxed{f = \sqrt{\frac{3E}{\rho L^2}} / 2\pi} \end{aligned}$$

Une application numérique pour une barre en aluminium telle que :

$$E = 70 \text{ GPa} \quad \rho = 2700 \text{ kg/m}^3 \quad L = 1 \text{ m}$$

permet d'arriver à la fréquence propre : $f_1 \approx 1403 \text{ Hz}$

Hypothèse 2 : degré 2

Reprenons la démarche ci-dessus en ajoutant un degré de liberté qui permet un déplacement quadratique de la barre. On note alors :

$$u(x) = \frac{x}{L} q_1 + \frac{x^2}{L^2} q_2 = \mathbf{N}(x) \cdot \mathbf{q} \text{ avec } \mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} \frac{x}{L} & \frac{x^2}{L^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = [q_1 \quad q_2]$$

Par définition, la matrice de masse peut être calculée :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} d\Omega \Rightarrow \mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \begin{bmatrix} \frac{x}{L} \\ \frac{x^2}{L^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x}{L} & \frac{x^2}{L^2} \end{bmatrix} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \begin{pmatrix} \frac{x^2}{L^2} & \frac{x^3}{L^3} \\ \frac{x^3}{L^3} & \frac{x^4}{L^4} \end{pmatrix} d\Omega$$

$$\left. \begin{aligned} M_{11} &= \rho S \int_0^L \frac{x^2}{L^2} dx = \frac{\rho S L}{3} \\ M_{12} &= \rho S \int_0^L \frac{x^3}{L^3} dx = \frac{\rho S L}{4} \\ M_{22} &= \rho S \int_0^L \frac{x^4}{L^4} dx = \frac{\rho S L}{5} \end{aligned} \right\} \mathbf{M} = \rho S L \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Par rapport à la première hypothèse, on a désormais : $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{q_1}{L} + \frac{2x}{L^2} q_2$

On en déduit une forme pour la matrice de raideur :

$$\left. \begin{aligned} W_{\text{int}} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} E \varepsilon_{xx}^2 d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E \left(\frac{q_1^2}{L^2} + 4q_1 q_2 \frac{x}{L^3} + 4 \frac{x^2}{L^4} q_2^2 \right) d\Omega = \frac{1}{2} ES \left(\frac{q_1^2}{L} + 2 \frac{q_1 q_2}{L} + \frac{4}{3} \frac{q_2^2}{L} \right) \\ W_{\text{int}} &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (q_1^2 K_{11} + 2q_1 q_2 K_{12} + q_2^2 K_{22}) \end{aligned} \right\} \mathbf{K} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire le système à résoudre :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} - \omega^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{q} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - \omega^2 \rho S L \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{pmatrix} - \frac{\omega^2 \rho S L^2}{ES} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \frac{\mu}{3} & 1 - \frac{\mu}{4} \\ 1 - \frac{\mu}{4} & \frac{4}{3} - \frac{\mu}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} &\text{ avec } \mu = \frac{\omega^2 \rho \cancel{S} L^2}{E \cancel{S}} \end{aligned}$$

On trouve deux solutions : $\mu_1 = \frac{\omega_1^2 \rho L^2}{E} \approx 32.18$ $\mu_2 = \frac{\omega_2^2 \rho L^2}{E} \approx 2.48$

En reprenant l'application numérique précédente, on trouve les deux fréquences propres suivantes :

$$f_1 \approx 1278 \text{ Hz} \quad f_3 \approx 4597 \text{ Hz}$$

On constate qu'on calcule cette fois deux fréquences propres, et que la seconde est proche mais inférieure à la fréquence calculée avec un seul degré de liberté.

Hypothèse 3 : degré 3

Ajoutant un nouveau degré de liberté du troisième ordre:

$$u(x) = \frac{x}{L} q_1 + \frac{x^2}{L^2} q_2 + \frac{x^3}{L^3} q_3 = \mathbf{N}(x) \cdot \mathbf{q} \quad \text{avec} \quad \mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} \frac{x}{L} & \frac{x^2}{L^2} & \frac{x^3}{L^3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]$$

Par définition, la matrice de masse peut être calculée :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \begin{bmatrix} \frac{x}{L} \\ \frac{x^2}{L^2} \\ \frac{x^3}{L^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x}{L} & \frac{x^2}{L^2} & \frac{x^3}{L^3} \end{bmatrix} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \begin{pmatrix} \frac{x^2}{L^2} & \frac{x^3}{L^3} & \frac{x^4}{L^4} \\ \frac{x^3}{L^3} & \frac{x^4}{L^4} & \frac{x^5}{L^5} \\ \frac{x^4}{L^4} & \frac{x^5}{L^5} & \frac{x^6}{L^6} \end{pmatrix} d\Omega \Rightarrow \mathbf{M} = \rho SL \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}$$

La déformation longitudinale s'écrit désormais : $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{q_1}{L} + \frac{2x}{L^2} q_2 + \frac{3x^2}{L^3} q_3$

On en déduit une forme pour la matrice de raideur :

$$\left. \begin{aligned} W_{\text{int}} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} E \varepsilon_{xx}^2 d\Omega = \frac{1}{2} ES \left(\frac{q_1^2}{L} + 2 \frac{q_1 q_2}{L} + \frac{4}{3} \frac{q_2^2}{L} + 2 \frac{q_1 q_3}{L} + 3 \frac{q_2 q_3}{L} + \frac{9}{5} \frac{q_3^2}{L} \right) \\ W_{\text{int}} &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2} \left(q_1^2 K_{11} + q_2^2 K_{22} + q_3^2 K_{33} + 2q_1 q_2 K_{12} + 2q_1 q_3 K_{13} + 2q_2 q_3 K_{23} \right) \end{aligned} \right\} \quad \mathbf{K} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire le système à résoudre :

$$\begin{aligned} &\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} - \omega^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0} \\ \Rightarrow &\frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4/3 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 9/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \omega^2 \rho SL \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4/3 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 9/5 \end{pmatrix} - \frac{\omega^2 \rho S L^2}{ES} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \frac{\mu}{3} & 1 - \frac{\mu}{4} & 1 - \frac{\mu}{5} \\ 1 - \frac{\mu}{4} & \frac{4}{3} - \frac{\mu}{5} & \frac{3}{2} - \frac{\mu}{6} \\ 1 - \frac{\mu}{5} & \frac{3}{2} - \frac{\mu}{6} & \frac{9}{5} - \frac{\mu}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\omega^2 \rho \cancel{S} L^2}{E \cancel{S}}$$

En reprenant l'application numérique précédente, on trouve les trois fréquences propres suivantes :

$$f_1 \approx 1273 \text{ Hz} \quad f_2 \approx 3919 \text{ Hz} \quad f_3 \approx 8466 \text{ Hz}$$

Faisons le bilan des fréquences propres qui viennent d'être calculées :

Ordre	$f_1 \text{ (Hz)}$	$f_2 \text{ (Hz)}$	$f_3 \text{ (Hz)}$
1	1403	-	-
2	1278	4597	-
3	1273	3919	8466

On constate :

- qu'on calcule autant de fréquences propres que l'on de d.d.l.
- que les fréquences convergent lorsqu'on augmente les d.d.l.

que pour n d.d.l., on estime de façon satisfaisante $n-1$ fréquences propres