

Eléments de théorie de dynamique des structures pour l'étude de treillis

1. Position du problème

On veut résoudre l'équation ; $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}(t) = \mathbf{0}$

avec $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$ les matrices de masse et de raideur de la structure.

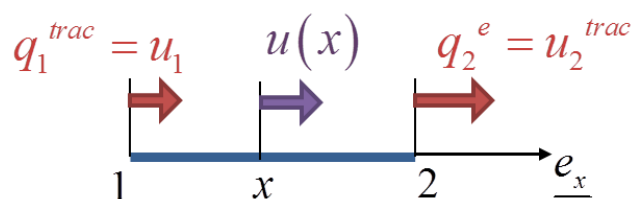
La solution est de la forme : $\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}e^{i\omega t}$

avec ω la pulsation propre, relié à la fréquence propre par $f = \omega / 2\pi$

On va ci-dessous expliciter une méthode d'obtention des matrices de masse et de raideur d'une structure plane composée de poutres sollicitées en flexion et/ou en traction-compression.

Remarque de notation : la matrice $\mathbf{M}$ par exemple est notée en caractère gras, contrairement à la matrice du représentative du tenseur des contraintes notée $\underline{\underline{\sigma}}$. En effet, cette matrice n'est la projection d'aucune quantité tensorielle...

2. Poutre en traction-compression :



Pour cet élément on peut facilement écrire la relation :

$$u(x) = q_1^{trac} + (q_2^{trac} - q_1^{trac}) \frac{x}{L}$$

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{trac} \\ u_2^{trac} \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{trac}(x) \cdot \mathbf{q}^{trac}$$

La matrice des masses élémentaire se calcule à partir de la matrice des fonctions de forme $\mathbf{N}^e$:

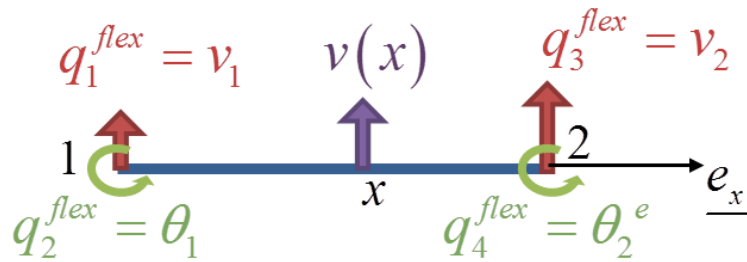
$$\mathbf{M}^{trac} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^{trac T} \cdot \mathbf{N}^{trac} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} d\Omega$$

$$\mathbf{M}^{trac} = \int_0^L \rho S \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 & \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \left(\frac{x}{L}\right)^2 \end{pmatrix} dx = \rho S \begin{pmatrix} L/3 & L/6 \\ L/6 & L/3 \end{pmatrix} = \frac{\rho S L}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice des raideurs élémentaires se formule dans le cas d'une barre en traction-compression :

$$\mathbf{K}^{trac} = \int_{\Omega} E \frac{\partial \mathbf{N}^{trac T}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}^{trac}}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} d\Omega = ES \int_0^L \begin{pmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{pmatrix} dx = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Poutre en flexion pure :



Pour cet élément on permet quatre degrés de liberté : deux rotations et deux translations à chaque extrémité de la poutre.

Pour ces degrés de liberté, on a quatre fonctions de forme qui permettent d'écrire :

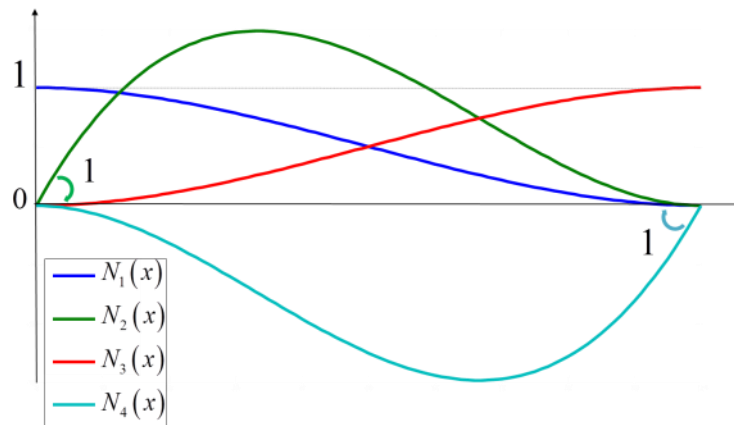
$$v(x) = \begin{bmatrix} N_1^{flex}(x) & N_2^{flex}(x) & N_3^{flex}(x) & N_4^{flex}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1^{flex} = v_1 \\ q_2^{flex} = \theta_1 \\ q_3^{flex} = v_2 \\ q_4^{flex} = \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{flex}(x) \cdot \mathbf{q}^{flex}$$

Ces fonctions de forme peuvent s'écrire alors :

$$N_1^{flex}(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad N_3^{flex}(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$N_2^{flex}(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \quad N_4^{flex}(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)$$

Chacune de ces fonctions de formes est nulle en un point et unitaire à l'autre point de la structure :



La matrice des masses se formule comme précédemment :

$$\mathbf{M}^{flex} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^{flex T} \cdot \mathbf{N}^{flex} d\Omega$$

Pour alléger la notation calculs on peut noter $x/L = r$

$$\mathbf{M}^{flex} = \int_{\Omega} \rho \begin{bmatrix} 1-3r^2+2r^3 \\ rL(1-r)^2 \\ 3r^2-2r^3 \\ Lr^2(r-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-3r^2+2r^3 & rL(1-r)^2 & 3r^2-2r^3 & Lr^2(r-1) \end{bmatrix} d\Omega$$

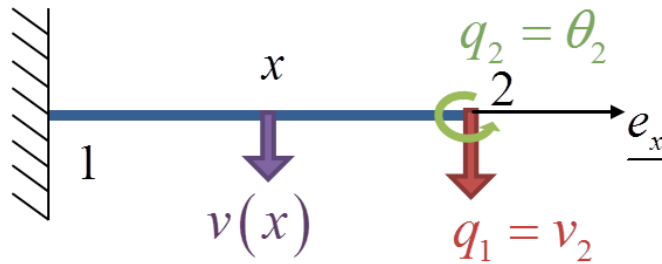
$$\begin{matrix} q_1^{flex} & q_2^{flex} & q_3^{flex} & q_4^{flex} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

$$\mathbf{M}^{flex} = \frac{\rho SL}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ sym & & & 4L^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow q_1^{flex} \\ \leftarrow q_2^{flex} \\ \leftarrow q_3^{flex} \\ \leftarrow q_4^{flex} \end{matrix}$$

La matrice des raideurs élémentaires se formule dans le cas d'une barre en flexion :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^{flex} &= \int_{\Omega} \frac{EI_z}{L^3} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^{flex T}}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{N}^{flex}}{\partial x^2} dx = \frac{EI_z}{L} \int_0^L \frac{\partial^2 \mathbf{N}^{flex T}}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{N}^{flex}}{\partial r^2} dr \\
\mathbf{K}^{flex} &= \frac{EI_z}{L^3} \int_0^L \begin{pmatrix} 12r-6 \\ L(6r-4) \\ 6r-12 \\ L(6r-2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12r-6 & L(6r-4) & 6r-12 & L(6r-2) \end{pmatrix} dr \\
&\quad \begin{matrix} q_1^{flex} & q_2^{flex} & q_3^{flex} & q_4^{flex} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\
\mathbf{K}^{flex} &= \frac{EI_z}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & 13L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ sym & & & 4L^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow q_1^{flex} \\ \leftarrow q_2^{flex} \\ \leftarrow q_3^{flex} \\ \leftarrow q_4^{flex} \end{matrix}
\end{aligned}$$

4. Applications pour d'autres cas : poutre encastree-libre



Une poutre encastree peut être vue comme une application du cas précédent de la flexion pure. En revanche, par rapport à ce cas précédent, on laisse seulement deux degrés de libertés et le déplacement au second nœud est orienté de façon opposée :

$$v(x) = \mathbf{N}^e(x^e) \cdot \mathbf{q}^e = \mathbf{N}^e(x) \cdot \begin{bmatrix} q_1^e = v_2 = -q_3^{flex} \\ q_2^e = \theta_2 = q_4^{flex} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_3^{flex}(x^e) & N_4^{flex}(x^e) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \end{bmatrix}$$

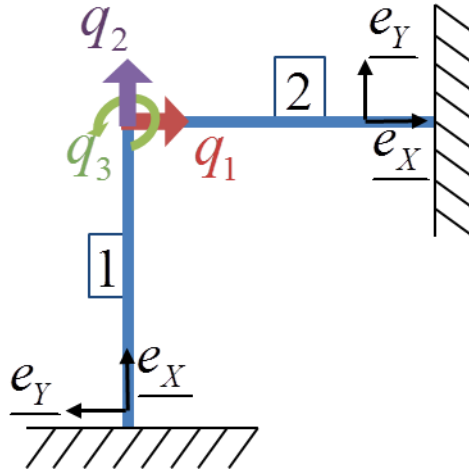
avec les fonctions de forme définies précédemment :

$$N_3^{flex}(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad N_4^{flex}(x) = \frac{x^2}{L} \left(\frac{x}{L} - 1\right)$$

Les matrices de masse et de raideur élémentaires se déduisent facilement à partir des résultats précédents, en ne gardant que les termes correspondant aux degrés de libertés q_3^{flex} et q_4^{flex} , et en prenant soin au signe des fonctions de forme...

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^e &= \frac{\rho SL}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22L^e \\ 22L^e & 4L^{e^2} \end{pmatrix} \\
\mathbf{K}^e &= \frac{EI_z^e}{L^{e^3}} \begin{pmatrix} 12 & 6L^e \\ 6L^e & 4L^{e^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5. Applications pour d'autres cas : poutre en L encastrée-encastrée



On considère la poutre ci-contre, constituée de deux tronçons de longueur L et de section S .

Pour cette structure, on va autoriser trois degrés de libertés q_1, q_2, q_3 correspondant à deux déplacements et une rotation. On va donc chercher des matrices de masse et de raideur de la forme :

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & \begin{matrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ & M_{22} & M_{23} \\ \text{sym} & & M_{33} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow q_1 \\ \leftarrow q_2 \\ \leftarrow q_3 \end{matrix} \end{matrix} \quad \mathbf{K} = \begin{matrix} & \begin{matrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ & K_{22} & K_{23} \\ \text{sym} & & K_{33} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow q_1 \\ \leftarrow q_2 \\ \leftarrow q_3 \end{matrix} \end{matrix}$$

On considère la poutre n°1 :

Les sollicitations concernant la poutre 1 peuvent être vues comme une superposition d'une sollicitation en traction-compression et d'une sollicitation en flexion : ces deux cas ont été vus précédemment.

Pour la partie traction-compression, on a ici $q_2 = q_2^{trac}$ et $q_1^{trac} = 0$. On en déduit facilement

$$u(x) = \cancel{q_1^{trac}} + \left(q_2^{trac} - \cancel{q_1^{trac}} \right) \frac{x}{L} = \cancel{q_1^{trac}} + \left(q_2 - \cancel{q_1^{trac}} \right) \frac{x}{L}$$

$$u(x) = \frac{x}{L} q_2 = \mathbf{N}^{(1)trac}(x) \cdot \mathbf{q}^{(1)trac}$$

On en déduit facilement les matrices de masse et de raideur associées :

$$\mathbf{M}^{(1)trac} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho SL}{3} & 0 & 0 \\ sym & & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}^{(1)trac} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ sym & & 0 \end{pmatrix}$$

Pour la partie flexion, on a ici $q_1 = -q_3^{flex}$, $q_3 = q_4^{flex}$, $q_1^{flex} = 0$, $q_2^{flex} = 0$. On en déduit :

$$v(x) = \begin{bmatrix} N_3^{flex}(x) & N_4^{flex}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_3^{flex} = -q_1 \\ q_4^{flex} = q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_3^{flex}(x) & N_4^{flex}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{(1)flex}(x) \cdot \mathbf{q}^{(1)flex}$$

Les matrices de masse et de raideur associées sont :

$$\mathbf{M}^{(1)flex} = \frac{\rho SL}{420} \begin{pmatrix} 156 & 0 & 22L \\ & 0 & 0 \\ sym & & 4L^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}^{(1)flex} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 6L \\ & 0 & 0 \\ sym & & 4L^2 \end{pmatrix}$$

On a donc sélectionné les parties correspondant aux degrés de liberté q_3^{flex} et q_4^{flex} des matrices de masse et de raideur associées à une poutre en flexion pure, qu'on a fait correspondre (au signe près) aux degrés de liberté q_1 et q_3 des matrices élémentaires ci-dessus.

Au total, on a pour la poutre 1 :

$$\mathbf{M}^{(1)} = \mathbf{M}^{(1)trac} + \mathbf{M}^{(1)flex} = \begin{pmatrix} 156 \frac{\rho SL}{420} & 0 & 22L \frac{\rho SL}{420} \\ & \frac{\rho SL}{3} & 0 \\ sym & & 4L^2 \frac{\rho SL}{420} \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{K}^{(1)trac} + \mathbf{K}^{(1)flex} = \begin{pmatrix} 12 \frac{EI_z}{L^3} & 0 & 6L \frac{EI_z}{L^3} \\ & \frac{ES}{L} & 0 \\ sym & & 4L^2 \frac{EI_z}{L^3} \end{pmatrix}$$

On considère la poutre n°2 :

Les sollicitations concernant la poutre 2 peuvent à leur tour être vues comme une superposition d'une sollicitation en traction-compression et d'une sollicitation en flexion.

Pour la partie traction-compression, on a ici $q_1 = q_1^{trac}$ et $q_2^{trac} = 0$. On en déduit facilement

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) q_1^{trac} = \mathbf{N}^{(2)trac}(x) \cdot \mathbf{q}^{(2)trac}$$

On en déduit facilement les matrices de masse et de raideur associées :

$$\mathbf{M}^{(2)trac} = \begin{pmatrix} \frac{\rho SL}{3} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ sym & & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}^{(2)trac} = \begin{pmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ sym & & 0 \end{pmatrix}$$

Pour la partie flexion, on a ici $q_2 = q_1^{flex}$, $q_3 = q_2^{flex}$, $q_3^{flex} = 0$, $q_4^{flex} = 0$. On en déduit :

$$v(x) = \begin{bmatrix} N_1^{flex}(x) & N_2^{flex}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1^{flex} = q_2 \\ q_2^{flex} = q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{flex}(x) & N_2^{flex}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{(2)flex}(x) \cdot \mathbf{q}^{(2)flex}$$

Les matrices de masse et de raideur associées sont :

$$\mathbf{M}^{(2)flex} = \frac{\rho SL}{420} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L \\ sym & & 4L^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}^{(2)flex} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 12 & 6L \\ sym & & 4L^2 \end{pmatrix}$$

On a donc sélectionné les parties correspondant aux degrés de liberté q_1^{flex} et q_2^{flex} des matrices de masse et de raideur associées à une poutre en flexion pure, qu'on a fait correspondre aux degrés de liberté q_2 et q_3 des matrices élémentaires ci-dessus.

Au total, on a pour la poutre 1 :

$$\mathbf{M}^{(2)} = \mathbf{M}^{(2)trac} + \mathbf{M}^{(2)flex} = \begin{pmatrix} \frac{\rho SL}{3} & 0 & 0 \\ & 156 \frac{\rho SL}{420} & 22L \frac{\rho SL}{420} \\ sym & & 4L^2 \frac{\rho SL}{420} \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{K}^{(2)trac} + \mathbf{K}^{(2)flex} = \begin{pmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ & 12 \frac{EI_z}{L^3} & 6L \frac{EI_z}{L^3} \\ sym & & 4L^2 \frac{EI_z}{L^3} \end{pmatrix}$$

Assemblage des matrices élémentaires :

Il suffit d'assembler les matrices élémentaires précédentes pour obtenir les matrices de masse et de raideur globales de la structure :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} 156 \frac{\rho SL}{420} + \frac{\rho SL}{3} & 0 & 22L \frac{\rho SL}{420} \\ & \frac{\rho SL}{3} + 156 \frac{\rho SL}{420} & 22L \frac{\rho SL}{420} \\ sym & & 22L \frac{\rho SL}{420} + 8L^2 \frac{\rho SL}{420} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)} = \begin{pmatrix} 12 \frac{EI_z}{L^3} + \frac{ES}{L} & 0 & 6L \frac{EI_z}{L^3} \\ & 12 \frac{EI_z}{L^3} + \frac{ES}{L} & 6L \frac{EI_z}{L^3} \\ sym & & 6L \frac{EI_z}{L^3} + 8L^2 \frac{EI_z}{L^3} \end{pmatrix}$$

6. Passage des repères locaux aux repères globaux

Dans les cas précédents, les repères axes des repères locaux de chaque poutre sont alignés avec le repère global de la structure. Dans le cas général, il ne faudra pas oublier de faire passer les matrices du repère local au repère global à partir de l'orientation de la poutre. Ceci n'est valable bien entendu que pour les degrés de libertés en déplacement, la direction des rotations étant nécessairement inchangées dans le cas d'une structure plane...

Si le repère local est incliné d'un angle α avec le repère global, on pourra la relation suivante par exemple dans le cas d'une barre en traction-compression :

$$\mathbf{K}^{glob} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha \end{pmatrix} \cdot \mathbf{K}^{local} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{glob} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

7. Résolution : détermination des fréquences propres et des modes propres

On veut résoudre l'équation ; $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}(t) = \mathbf{0}$

La solution est de la forme : $\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}e^{i\omega t}$ avec ω la pulsation propre, reliée à la fréquence propre par $f = \omega / 2\pi$

Méthode directe

Le système précédent peut également s'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}e^{i\omega t} \end{cases} \Rightarrow (i\omega)^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{q}(t) = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}(t) \Rightarrow \boxed{\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0}$$

Cette résolution peut se faire directement dans la plupart des cas simples.

Revenons au cas précédent de la poutre en L encastree-encastree.

Prenons les valeurs numériques ci-dessous, et des propriétés matériaux correspondant à de l'aluminium:

$$E = 70 \text{ GPa} \quad \rho = 2700 \text{ kg / m}^3 \quad L = 1 \text{ m} \quad S = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \quad I_z = 4.1 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4$$

On va pouvoir calculer autant de fréquences propres que de degrés de libertés dans la structure : cependant, on ne peut bien estimer que $n-1$ valeurs propres pour un système à n degrés de libertés.

Pour cette application numérique, on trouve :

$$f_1 \approx 5\text{Hz} \quad f_2 \approx 965\text{Hz} \quad f_3 \approx 1255\text{Hz}$$

On peut en déduire les modes propres $\mathbf{q}_i$ en résolvant l'équation :
 $(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{q}_i = \mathbf{0}$

Décomposition de Choleski

Pour des systèmes plus complexes, il peut être commode d'opter pour une solution utilisant la décomposition de Choleski de la matrice des masses : $\mathbf{M} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T$

On effectue alors la démarche suivante :

$$\begin{aligned} (i\omega)^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{q} &= -\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} \\ \Rightarrow \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} - \omega^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{q} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} &= \omega^2 \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{q} \end{aligned}$$

On pose ensuite le vecteur $\mathbf{y} = \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{q}$ ce qui implique :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} &= \omega^2 \mathbf{L} \cdot \mathbf{y} \\ \Rightarrow \mathbf{q} &= \omega^2 \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{y} \\ \Rightarrow \mathbf{y} &= \omega^2 \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

Si on pose maintenant $\mathbf{S} = \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{L}$, on arrive au système à résoudre :

$$\mathbf{y} = \omega^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{S} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{\omega^2} \mathbf{y}$$

En calculant les valeurs et vecteurs propres de $\mathbf{S}$ on obtient donc $1/\omega_i^2$ et $\mathbf{y}^i$ respectivement, à partir desquels on peut calculer les fréquences et modes propres de la structure f_i et $\mathbf{q}^i$.

Pour l'application ci-dessus, on trouve bien les mêmes fréquences propres :

$$f_1 \approx 5\text{Hz} \quad f_2 \approx 965\text{Hz} \quad f_3 \approx 1255\text{Hz}$$

On obtient les modes propres :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 = u_1 \\ q_1 = v_1 \\ q_1 = \theta_1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}^1 \approx \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -16 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}^2 \approx \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}^3 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

On peut facilement déduire les modes propres suivantes :

