

CORRECTION DU TD N°1

OBJECTIFS :

- Appliquer la méthode des moindres carrés ou de Mayer sur des données individuelles

Exercice 1 Méthode des moindres carrés avec tableau de calculs

1. Ajustement linéaire de y en x par la méthode des moindres carrés : $y = a x + b$

► Tableau statistique

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
	1	50	1	2 500	50
	2	62	4	3 844	124
	3	72	9	5 184	216
	4	80	16	6 400	320
	5	86	25	7 396	430
Total	15	350	55	25 324	1 140

► Calculs préalables

Variable x

- Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{N} \left(\sum_i x_i \right) = \frac{1}{5} \times 15 = 3$
- Variance : $V(x) = \frac{1}{N} \left(\sum_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2 = \frac{1}{5} \times 55 - 3^2 = 2$
- Ecart-type : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \approx 1,4142$

Variable y

- Moyenne : $\bar{y} = \frac{1}{N} \left(\sum_i y_i \right) = \frac{1}{5} \times 350 = 70$
- Variance : $V(y) = \frac{1}{N} \left(\sum_i y_i^2 \right) - \bar{y}^2 = \frac{1}{5} \times 25324 - 70^2 = 164,8$
- Ecart-type : $\sigma(y) = \sqrt{V(y)} \approx 12,8374$

Covariance

- $\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{N} \left(\sum_i x_i y_i \right) - \bar{x} \bar{y} = \frac{1}{5} \times 1140 - 3 \times 70 = 18$

► Calcul de a et b

- Calcul de a : $a = \frac{\text{Cov}(x,y)}{V(x)} = \frac{18}{2} = \boxed{9}$

- Calcul de b : $b = \bar{y} - a\bar{x} = 70 - 9 \times 3 = \boxed{43}$

Conclusion : La droite D de régression de y en x a pour équation : $y = 9x + 43$

2. Calcul du coefficient de corrélation linéaire r

- Coefficient de corrélation linéaire r : $r = \frac{\text{Cov}(x,y)}{\sigma(x) \sigma(y)} = \frac{18}{\sqrt{2 \times 164,8}} = \boxed{0,9915}$

- Coefficient de détermination : $r^2 = \boxed{0,9831}$ ou $r^2 \approx \boxed{98\%}$

Conclusion : La dispersion expliquée par la régression linéaire de y en x s'élève à 98 % de la dispersion totale de la variable y : l'ajustement linéaire de y en x est de qualité excellente.

Exercice 2 **Méthodes de Mayer et des moindres carrés**

1. Ajustement linéaire de y en x par la méthode de Mayer

► Calculs préalables

Variable x

- Moyenne 1 : $\bar{x}_1 = \frac{1}{N} \left(\sum_i x_i \right) = \frac{1}{5} \times (5 + 7 + 8 + 9 + 10) = \boxed{7,8}$ 5 valeurs les plus petites

- Moyenne 2 : $\bar{x}_2 = \frac{1}{N} \left(\sum_i x_i \right) = \frac{1}{5} \times (15 + 13 + 12 + 14 + 11) = \boxed{13}$

Variable y

- Moyenne 1 : $\bar{y}_1 = \frac{1}{N} \left(\sum_i y_i \right) = \frac{1}{5} \times (5 + 7 + 7 + 8 + 11) = \boxed{7,6}$ 5 valeurs correspondantes à x

- Moyenne 2 : $\bar{y}_2 = \frac{1}{N} \left(\sum_i y_i \right) = \frac{1}{5} \times (13 + 13 + 13 + 12 + 12) = \boxed{12,6}$

► Points moyens

G1(7,8 ; 7,6) et G2 (13 ; 12,6)

► Droite de régression de y en x : $a = \frac{12,6 - 7,6}{13 - 7,8} = 0,96$ et $b = 7,6 - 0,96 \times 7,8 = 0,12$

On a donc $y = 0,96x + 0,12$

2. Ajustement linéaire de x en y par la méthode des moindres carrés :

► Calculs préalables

Variable x

- Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{N} \left(\sum_i x_i \right) = \frac{1}{10} \times 104 = \boxed{10,4}$

Variable y

- Moyenne : $\bar{y} = \frac{1}{N} \left(\sum_i y_i \right) = \frac{1}{10} \times 101 = \boxed{10,1}$
- Variance : $V(y) = \frac{1}{N} \left(\sum_i y_i^2 \right) - \bar{y}^2 = \frac{1}{10} \times 1103 - 10,1^2 = \boxed{8,29}$
- Ecart-type : $\sigma(y) = \sqrt{V(y)} \approx \boxed{2,88}$

Covariance

- $\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{N} \left(\sum_i x_i y_i \right) - \bar{x} \bar{y} = \frac{1}{10} \times 1132 - 10,4 \times 10,1 = \boxed{8,16}$

► Droite de régression de x en y : $D': x = a'y + b'$

- Calcul de a' : $a' = \frac{\text{Cov}(x, y)}{V(y)} = \frac{8,16}{8,29} \approx \boxed{0,984}$

- Calcul de b' : $b' = \bar{x} - a' \bar{y} \approx 10,4 - 0,984 \times 10,1 \approx \boxed{0,458}$

Conclusion : La droite D' de régression de x en y a pour équation : $\boxed{x = 0,98y + 0,46}$

3. Si $y = 16$, on cherche x donc on utilise la droite obtenue dans la question 2. On obtient $x = 16,12$
4. Si $x = 16$, on cherche y donc on utilise la droite obtenue dans la question 1. N obtient $y = 15,48$

Exercice 3 Méthode des moindres carrés

1. Ajustement linéaire de y en x par la méthode des moindres carrés :

► Calculs préalables

Variable x

- Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{N} \left(\sum_i x_i \right) = \frac{1}{5} \times 62353 = \boxed{12470,6}$
- Variance : $V(x) = \frac{1}{N} \left(\sum_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2 = \frac{1}{5} \times 780954577 - 12470,6^2 = \boxed{675051,04}$
- Ecart-type : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \approx \boxed{821,6}$

Variable y

- Moyenne : $\bar{y} = \frac{1}{N} \left(\sum_i y_i \right) = \frac{1}{5} \times 28832 = \boxed{5766,4}$
- Variance : $V(y) = \frac{1}{N} \left(\sum_i y_i^2 \right) - \bar{y}^2 = \frac{1}{5} \times 166720836 - 5766,4^2 = \boxed{92798,24}$
- Ecart-type : $\sigma(y) = \sqrt{V(y)} \approx \boxed{304,6}$

Covariance

- $\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{N} \left(\sum_i x_i y_i \right) - \bar{x} \bar{y} = \frac{1}{5} \times 358510224 - 12470,6 \times 5766,4 = \boxed{-208423,04}$

► Droite de régression de y en x : $D : y = a x + b$

● Calcul de a : $a = \frac{\text{Cov}(x,y)}{V(x)} = \frac{-208423,04}{675051,04} \approx -0,309$

● Calcul de b : $b = \bar{y} - a \bar{x} \approx 5766,4 - (-0,309) \times 12470,6 \approx 9616,717$

Conclusion : La droite D de régression de y en x a pour équation : $y = -0,31x + 9617$

2. Calcul du coefficient de corrélation linéaire r

● Coefficient de corrélation linéaire r : $r = \frac{\text{Cov}(x,y)}{\sigma(x) \sigma(y)} = \frac{-208423,04}{\sqrt{675051,04 \times 92798,24}} \approx -0,833$

● Coefficient de détermination : $r^2 \approx 0,693$ ou $r^2 \approx 69\%$

Conclusion : La dispersion expliquée par la régression linéaire de y en x s'élève à 69 % de la dispersion totale de la variable y : l'ajustement linéaire de y en x est donc de qualité moyenne.