

Initiation à la

①

Méca. fluide. Numérique
("Comput. Fluid. Dyn." (CFD))

I) Présentation

Pour étudier l'écoulement des fluides, 3 voies:

- Expérimentale
- Modélisation/Simulation:

Exprimer les lois de la Φ des fluides
sous la forme d'éq^{ts} mathématiques (N.S.)

Pour les résoudre :

→ Voie Analytique (Théorie/recherche)

→ Numérique $\Rightarrow$ CFD
(recherche, bureau d'étude, ...)

II) But de ce cours

Présenter 2 logiciels (complémentaires) qui
sont actuellement utilisés en R & D :

* GAMBIT : le "maillleur"

* FLUENT : le "solveur"

III) Etapes clés de la CFD

②

① Modéliser le pbme Φ ric "poser le pbme"

→ Définir la géométrie du domaine
(Utiliser les sym. éventuelles pour simplifier le domaine de calcul)

→ Propriétés phys. de l'écoulement

- Matériau (viscosité, masse vol., ...)
- Turbulent ?
- exotherme ? réactif ?
- Compressible ? (coefficient de l'écoulement)

→ Définir les eq's à résoudre

• Eq's de transport

- masse
- q'té de m'te

} N.S.

- Énergie / Température

- Modèles de fermeture (turbulent)

-

• Cond. aux. limites

• Cond. initiale ($t=0$).

réflexion préalable

②

Définir le maillage

- Lien la géométrie
- La maille

③

Simuler l'écoulement

- * Préparer le calcul
 - Eq's à résoudre
 - C.L., initiale
- * Calculer numériq^t la solution

④

Le post-Traitement

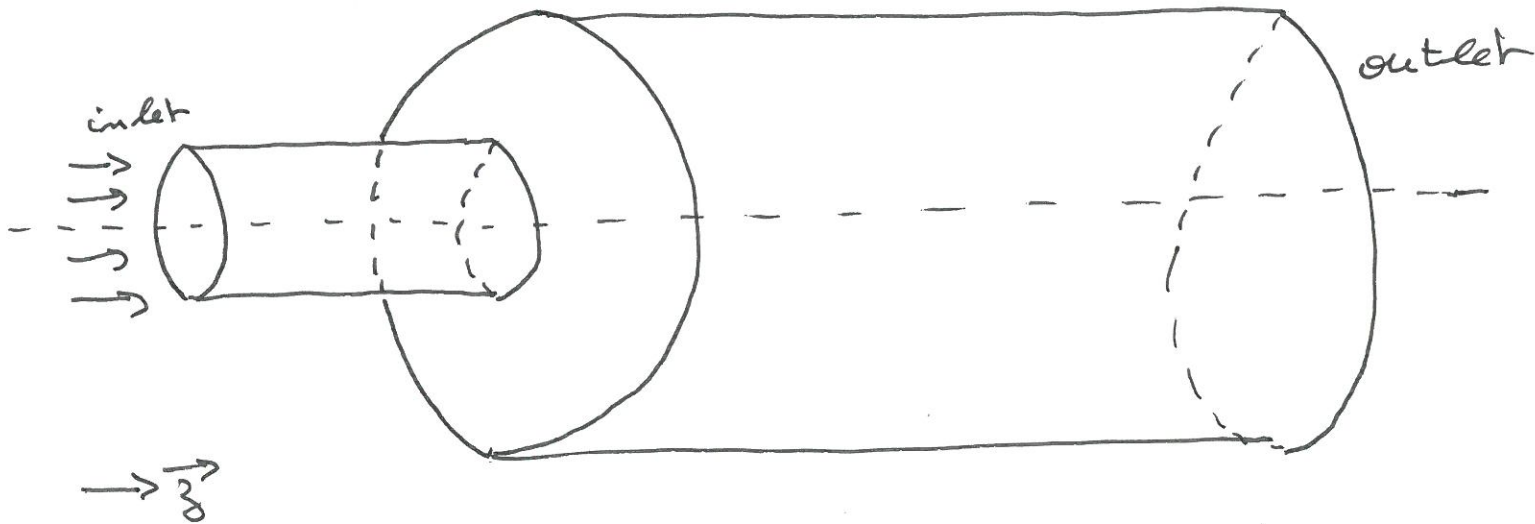
Analyser les résultats pour en tirer les informations pertinentes.

Le "maillage"
GAMBIT

Le "solveur"
FLUENT

Le "solveur"

L'écoulement du TP



Écoulement de l'eau dans une conduite circulaire avec élargissement brusque, avec une vitesse d'entrée uniforme u_{inlet}

• Régime de l'écoulement :

a) $Re_D = \frac{\rho_{eau} u_{inlet} D}{\mu_{eau}}$

avec : Pour une conduite lisse :

$Re_D \lesssim 1000$: Laminaire
2400

$1000 \lesssim Re_D \lesssim 2000$: Transitoire
2400 4000

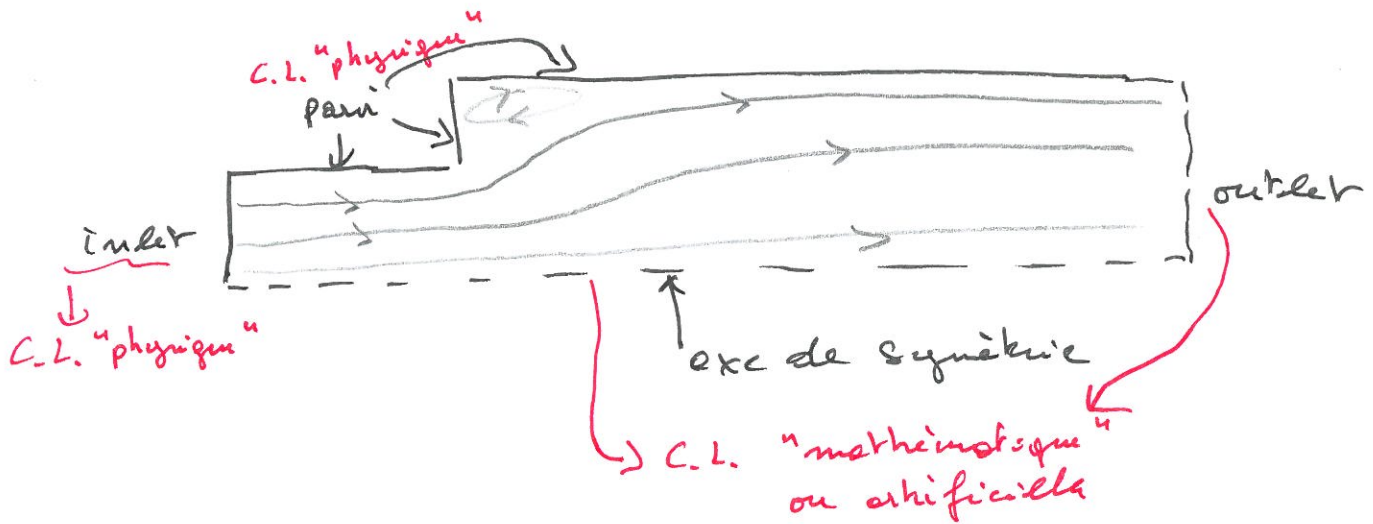
$Re_D \gtrsim 2000$: Turbulent
4000

b) $u_{inlet} < C$ ($u < 1$) écoulement incompressible.

• Symétries ?

$\Rightarrow$ Dans les cas transitoires et turbulent, on peut faire l'hypothèse que l'écoulement est symétrique par rapport à l'axe ($\vec{Ox}$) ($\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ dès les e^{1st}).

⇒ Ecoulement axisymétrique: On modélise le domaine 2D:



⇒ Régime permanent ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$ des eq's).

• Propriétés du fluide

⇒ eau, $\rho = \underline{cte}$, $\mu = \underline{cte}$

⇒ isotherme

• Equations à résoudre

⇒ Régime laminaire: eq's de N.S. incompressible

- 3 eq's scalaires pour u , v et P (2D)

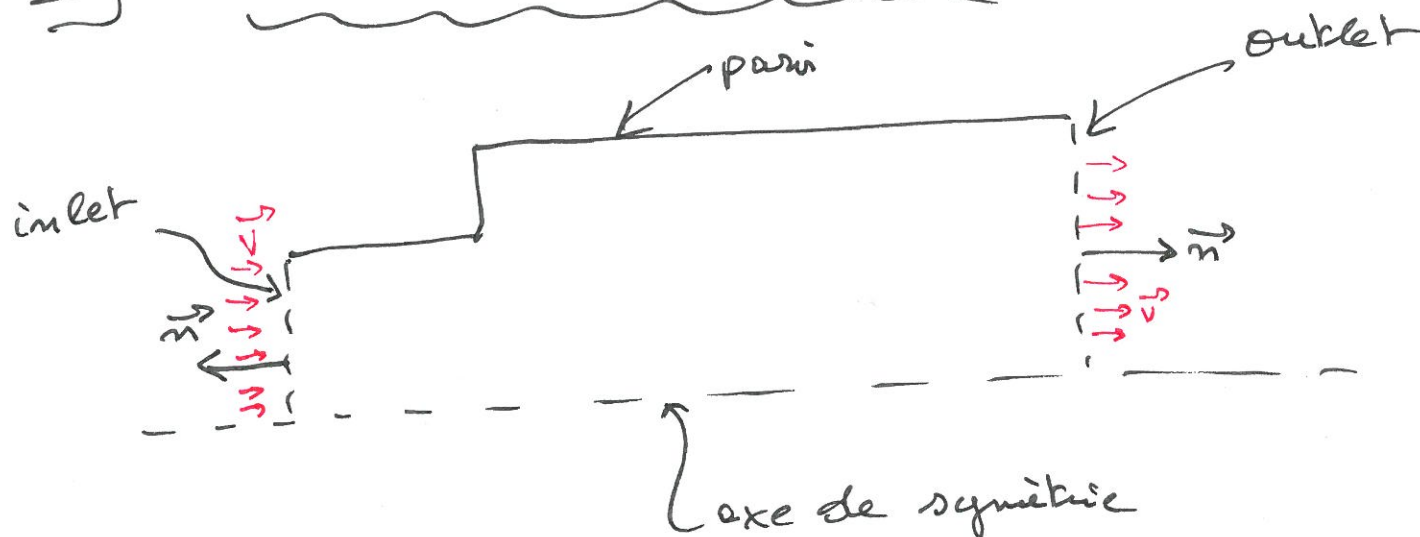
⇒ Régime turbulent:

- Eq's de N.S. moyennées pour $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{P}$

- Modèle de turbulence (ex: $k-\epsilon$)
→ 2 eq's de transport pour k et ϵ .

Bref descriptif des méthodes Numériques de FLUENT

I) Conditions aux limites



1) Cond. aux limites "physiques"

* A une paroi solide (type **WALL** de FLUENT)

Viscosité

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \vec{V} = 0 \text{ en visqueux (adhérence à la paroi)} \\ \bullet \vec{V} \cdot \vec{n} = 0 \text{ en non visqueux} \end{array} \right.$$

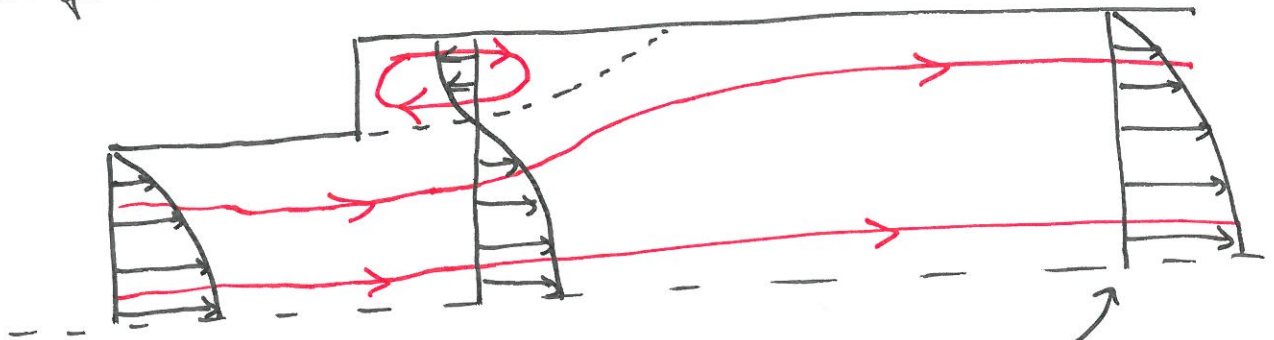
température :

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad : \text{adiabatique}$$

* Autres C.L : surface libre, etc...

2) Cond. aux limites "artificielles"

Lorsqu'on tronque un domaine physique très grand ou infini :



On retrouve un profil de Poiseuille suffisamment en aval de l'élargissement

Problématique: Définir un domaine de calcul autour de l'élargissement tel que les C.L. artificielles n'affectent pas la solution à l'intérieur du domaine. (Surtout pour les C.L. d'OUTLET).

* À l'entrée : Inlet

Mathématique: frontière définie par $\vec{V} \cdot \vec{n} < 0$.

a) débit imposé: VELOCITY INLET

$$\begin{cases} \vec{V} = \vec{V}_{inlet} \\ T = T_{inlet} \end{cases}$$

définie par l'utilisateur:

- constante
- profil donné par une expérience

b) Pression imposée: PRESSURE INLET

$$P + \frac{\rho}{2} |\vec{V}|^2 = P_{inlet}$$

frontière définie par $\vec{v} \cdot \vec{n} > 0$ (fluide sort)

Si du fluide entre/sort ("back-flow") $\Rightarrow$ pbm de convergence de la solution. Il faut définir des C.L. qui laissent sortir le fluide sans provoquer de réflexion parasites qui influenceraient sur l'écoulement ^{avant}.

a) type OUTFLOW

On sup. que suffisamment en aval de la singulière, un écoulement de type Poiseuille, et on impose plus :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}_3} = 0, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}_2} = 0$$

Rq: • Placer l'outlet suffisamment loin de la singularité ($L \geq 200$)

- Si l'écoulement est instationnaire, préférer le C.L. suivante:

b) type PRESSURE OUTLET

Une autre C.L. suppose que l'outlet débouche sur
dans un milieu externe dont on connaît l'état de
contrainte:

$$\underline{\underline{A}}^2 = -P^2 \underline{\underline{I}}.$$

ou p^0 est la pression atmosphérique extérieure. On s'pre
alors la continuité du tenseur des contraintes:

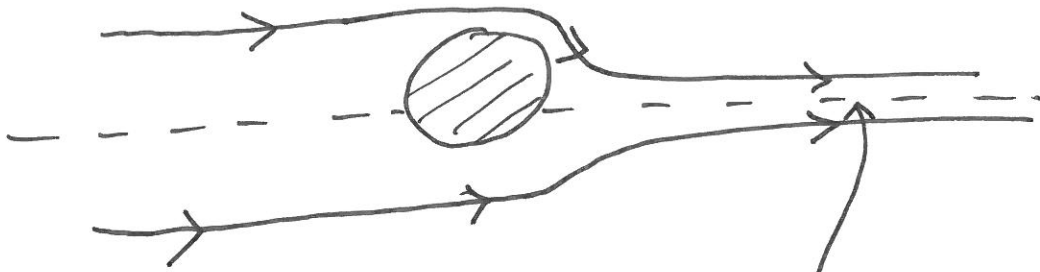
$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

3) Cond. aux limites "mathématiques"

(4)

Pour imposer diverses symétries à l'écoulement, et diminuer la taille du maillage :

a) type SYMMETRY



$$\text{sur l'axe: } \left\{ \begin{array}{l} \vec{V} \cdot \vec{n} = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{array} \right.$$

b) type AXIS

l'équivalent du type précédent pour des écoulements 3D axisymétriques.

c) type PERIODIC

II) Méthode de volumes finis

(1)

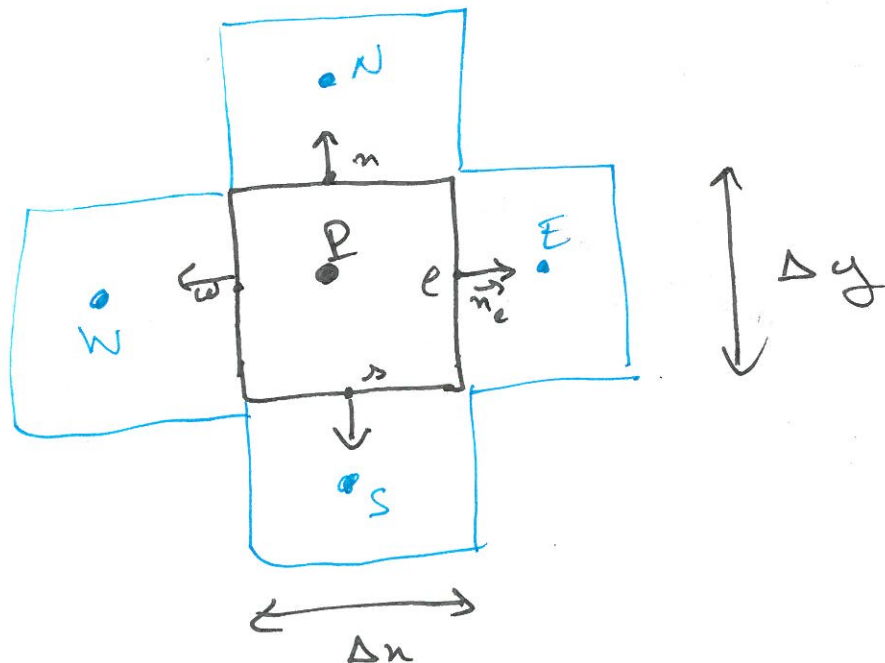
Eq^t de bilan générique ($\vec{v}$ une vitesse donnée)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} \phi) - \nabla \cdot (\gamma \vec{\nabla} \phi) = 0$$

Méth. vol. finis ^{est} basée sur la forme intégrale de l'eq^t de bilan:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_P} \phi dV + \underbrace{\int_{P_P} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} dP}_{\text{Flux convectifs: } F_c} - \underbrace{\int_{P_P} \gamma \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} dP}_{\text{Flux diffusifs: } F_d} = 0$$

où V_P est une cellule (volume de contrôle) d'un maillage:



Volume: $V_P = \Delta x \Delta y$

Surface: $P_P = P_e \cup P_n \cup P_s \cup P_w$

* Discrétisation basée sur des formules de quadrature: (2)

$$\int_{V_P} \phi dV \approx V_P \phi_P \quad \text{par formule de la moyenne.}$$

$\Rightarrow$ Les inconnues sont situées au centre des cellules.

• Discrétisation des flux convectifs:

On considère le flux sur la face P_e : $(F_c)_e = \int_{P_e} \phi \vec{V} \cdot \vec{n}_e d\Omega$

a) Approximation des intégrales surfaciques:

$$(F_c)_e = \int_{P_e} \phi u dy \approx \phi_e u_e \Delta y$$

? ↗

b) Interpolation de ϕ_e / aux inconnues ϕ_P, ϕ_E , etc....

~~Et~~ Comme en diff. finies, il y a de nombreuses possibilités:

• Centrée: $\phi_e \approx \frac{1}{2} \phi_P + \frac{1}{2} \phi_E$

$$\Rightarrow (F_c)_e \approx u_e \frac{\Delta y}{2} (\phi_P + \phi_E)$$

Remarque importante:

Si on suppose que $\vec{V} = c \underline{e}_x$, alors $(F_c)_w \approx -u \frac{\Delta y}{2} (\phi_P + \phi_w)$
on retrouve la formule centrée des différences finies:

$$(F_c)_e + (F_c)_w \approx u V_P \frac{\phi_E - \phi_w}{2 \Delta x} = V_P \left(u \delta_x^0 \phi_P \right)$$

• UPwind:

On décentre l'interpolation suivant la vitesse de direction convection $\vec{V}$:

$$\phi_e \approx \begin{cases} \phi_P & \text{si } u_e > 0 \\ \phi_E & \text{si } u_e < 0 \end{cases}$$

On retrouve ^{ainsi} l'approximation $S_n^- \phi_P$ des différences finies.

⚠ C'est une formule en $O(\Delta x)$ seulement. Il existe de nombreuses formules + précises, en $O(\Delta x^2)$, p. ex :

QUICK

Remarques générales :

Sur maillage régulier et eq^e à coeff. constants, Vol. finis et diff. finies conduisent à des discrétisations équivalentes.

⇒ Les notions de $\left\{ \begin{array}{l} \text{Troncature} \\ \text{précision} \\ \text{analyse de V. Neumann} \end{array} \right.$ restent valables en Vol. finis.

⇒ Vol. finis offrent + de possibilités pour les maillages quelconques.

III

Intégration en temps des eq's de Navier - Stokes

①

Eq's N-S incompressibles, semi-discretisées par vol. finies:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + F(u) + Gp = 0 & (1a) \\ Du = 0 & (1b) \end{cases}$$

Difficulté majeure: il n'y a pas de dérivée en temps pour p en incompressible $\Rightarrow$ Mathématiquement, la pression n'est présente que pour enforcer la consistance de la masse.

IV) Méthodes de correction de pression

1) Schéma explicite EP1:

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + F(u^n) + G(p^{n+1}) = 0 & (2) \\ Du^{n+1} = 0 & (3) \end{cases}$$

il y a 3 eq's scalaires (2D)
il faut donc 3 inconnues: u^{n+1} , p^{n+1}

De l'eq (2), on tire la décomposition:

$$u^{n+1} = \underbrace{u^n + \Delta t F(u^n)}_{u^*: \text{connu}} + \underbrace{\Delta t G(p^{n+1})}_{\text{inconnu}} \quad (4)$$

u^{n+1} inconnu.

Pour éliminer l'inconnue u^{n+1} , on injecte cette (2) équation dans l'éq^t de cons. de la même (3):

$$DG(p^{n+1}) = \frac{1}{\Delta t} Du^* \quad (5)$$

(c'est la fameuse eq^t de Poisson pour la pression, que l'on résout pour obtenir p^{n+1} . On obtient alors u^{n+1} (tel que $Du^{n+1} = 0$) en utilisant l'Eq. (4).

En résumé, l'algor. de correction de pression n'est:

(1) On fait une prédiction de la vitesse:
 $u^* = u^n + \Delta t F(u^n)$

(2) On calcule la pression p^{n+1} ; eq^t (5)
 $DG(p^{n+1}) = \frac{1}{\Delta t} Du^*$

(3) On corrige la prédiction u^* ; eq^t (4):
 $u^{n+1} = u^* + \Delta t G(p^{n+1})$

2) Pour un schéma implicite: On ne peut obtenir $Du^{n+1} = 0$ après 3 étapes seulement. Il faut utiliser un schéma itératif:

$$(u^{n+1})^{h+1} = (u^{n+1})^h + \Delta u \delta u^{n+1}$$

$$(p^{n+1})^{h+1} = (p^{n+1})^h + \Delta p \delta p^{n+1}$$

pour obtenir la convergence: $D(u^{n+1})^h \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$ Algorithmes du type S.I.M.P.L.E (et ses variantes)

$\Delta u, \Delta p$: coeff. de sous-relaxation ($\in]0, 1[$).

R₂ II

(3)

Ajout d'eq^t de transport: ~~est~~

Algorithme Segregated

Supposons qu'on couple les eq^s de N-S (1) avec une eq^t de température:

$$\frac{dT}{dt} + F_c(u, T) + F_d(T) = 0$$

qu'on discrétise avec un schéma explicite (ER1):

$$(b) \quad \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + F_c(u^{n+1}, T^{n+1}) + F_d(T^{n+1}) = 0.$$

On procède de la façon suivante pour calculer $(u^{n+1}, p^{n+1}, T^{n+1})$:

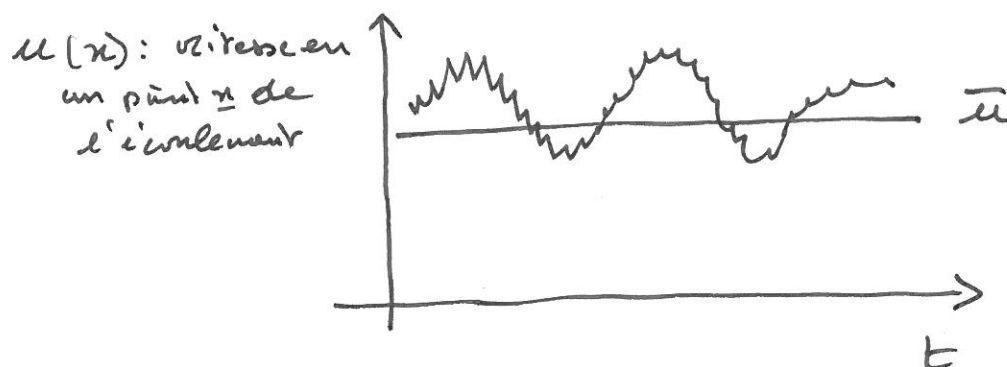
- On utilise SIMPLE pour calculer (u^{n+1}, p^{n+1}) .
- Comme u^{n+1} est connue, on résout (6) pour obtenir T^{n+1} .

Le principe de découplage des inconnues hydrodyn. (u^{n+1}, p^{n+1}) et des inconnues transportées (ex: T^{n+1}) est connu sous le nom d'algorithme SEGREGATED dans FLUENT.

IV) Un mot sur la simulation de la turbulence

①

- Mouvement désordonné du fluide:



- Simulation numérique directe (DNS): capturer sur un maillage toutes les échelles de l'écoulement:

en 3D, $N^3 \propto (Re)^{3/4}$: trop coûteux!

- En R & D, on utilise plutôt une approche statistique:

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{\bar{u}}} + \underline{\underline{u'}}$$

$$p = \bar{p} + p'$$

On obtient les équations pour $(\underline{\underline{\bar{u}}}, \bar{p})$ à partir des eq's de N.S.:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \underline{\underline{\bar{u}}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{\underline{\bar{u}}} \otimes \underline{\underline{\bar{u}}} - \underline{\underline{S}}) + \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\bar{u}}} = 0 \end{array} \right.$$

(avec $\underline{\underline{S}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\underline{u}}^T + \nabla \underline{\underline{u}})$
tenseur des déformations)

On prend la moyenne des eq's de NS pour obtenir les équations de Reynolds:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u} \bar{u} - 2\mu \bar{S}) + \nabla \bar{p} = 0 \\ \nabla \cdot \bar{u} = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

Puisque $\bar{u} \bar{u} \neq \bar{u} \bar{u}$, les eq's de Reynolds possèdent + d'inconnues ($\bar{u}$, $\bar{p}$ et $\bar{u} \bar{u}$: 7 inconnues scalaires en 3D) que d'équations (4 scalaires) $\Rightarrow$ Problème de ~~est~~ clôture des équations.

On fait alors l'hypothèse de Boussinesq:

$$\bar{u} \bar{u} = \bar{u} \bar{u} + \mu_t \bar{S}$$

où μ_t est la viscosité turbulente à "modéliser"

par analyse dimensionnelle:

$$\text{viscosité} = \text{vitesse} \times \text{longueur}.$$

Il y a un nombre considérable de modèles. L'un des + répondu en R & D est le modèle $k-\epsilon$ ⁽¹⁹⁷⁴⁾, tel que:

$$\mu_t = C \frac{k^2}{\epsilon} \rightarrow \begin{array}{l} k^2 \rightarrow \text{énergie cinétique turbulente} \\ \epsilon \rightarrow \text{taux de dissipation de } k \end{array}$$

constante sans dimension

Les variables k et ϵ doivent être modélisées en ajoutant des eq's de transport à partir des eq's NS:

$$\frac{Dk}{Dt} = \dots, \quad \frac{D\epsilon}{Dt} = \dots$$

Conclusion • Il faut résoudre des eq's pour $\bar{u}$, $\bar{p}$, k et ϵ (7 eq's en 3D)

• Moins de points de calcul qu'en DNS pour calculer les moyennes $\bar{u}$, $\bar{p}$...

- Dans la modélisation statistique, il apparaît des constantes empiriques qu'il faut ^{calibrer} ~~déterminer~~ en comparant le calcul numérique avec des expériences test.