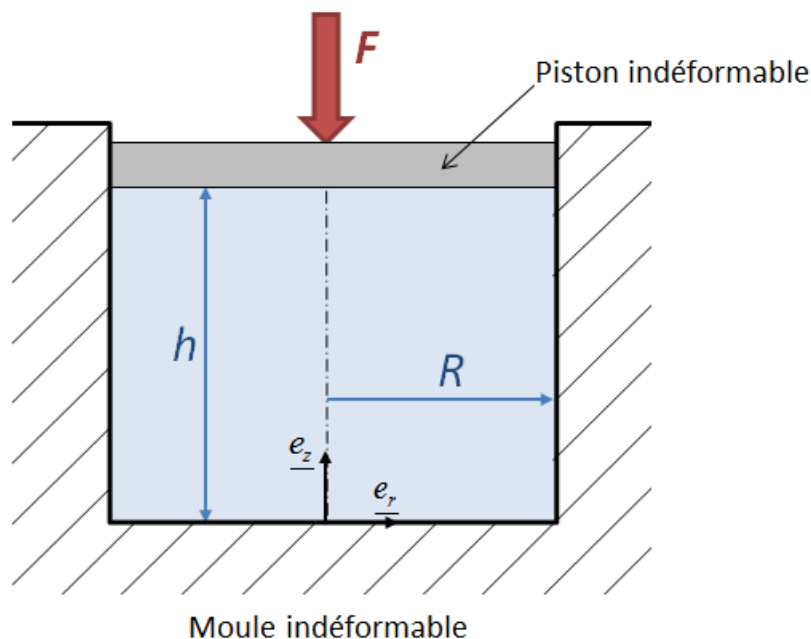

Matériau dans un moule cylindrique indéformable

Enoncé

Un cylindre composé d'un matériau homogène élastique linéaire isotrope de rayon R et de hauteur h est comprimé par un piston indéformable dans un moule indéformable, aux parois parfaitement lubrifiées. Sa face supérieure est soumise à un effort global de compression $\underline{F} = -F \underline{e}_z$ ($F > 0$) supposé uniformément réparti.



On suppose que l'intensité de F est telle que le poids de la pièce est négligeable, et nous nous plaçons dans un problème de statique.

Mise en équation du problème :

1. « ... composé d'un matériau homogène élastique linéaire isotrope » : expliquer comment cette assertion se traduit en termes de loi de comportement dans le cas d'un problème à température constante. En donner une forme tensorielle puis indicielle. /1
2. Exprimer l'équation d'équilibre du système en considérant le fait que le poids de la pièce est négligeable est que le problème est statique. Exprimer cette relation sous

forme tensorielle, puis développer les trois équations qui en résultent sans faire d'hypothèse dans un premier temps sur la forme de $\underline{\underline{\sigma}}$. /1

Conditions aux limites :

3. « ... dans un moule indéformable » : expliquer comment cette assertion se traduit en termes de conditions aux limites sur le champ de déplacement pour la surface latérale ($\underline{n} = \underline{e}_r, r = R$) et la surface inférieure ($\underline{n} = -\underline{e}_z, z = 0$), à partir d'un champ général du type :

$$\underline{u}(r, z) = u_r(r, \theta, z)\underline{e}_r + u_\theta(r, \theta, z)\underline{e}_\theta + u_z(r, \theta, z)\underline{e}_z \quad /1$$

4. Les parois du moule sont dites « parfaitement lubrifiées », c'est-à-dire qu'il est impossible d'imposer un effort autre qu'un effort normal sur ces parois. En déduire des conditions aux limites concernant le vecteur-contrainte et les composantes du tenseur des contraintes sur la paroi latérale et la paroi inférieure. /1
5. La surface supérieure ($\underline{n} = \underline{e}_z, z = h$) étant en contact parfaitement lubrifié avec le piston, écrire les trois composantes du vecteur-contrainte sur cette surface en fonction de la force appliquée au piston (supposée uniformément répartie). /1

Résolution du problème :

6. En raison des symétries du problème et des conditions aux limites, on propose un champ déplacement du type :

$$\underline{u}(z) = u_z(z)\underline{e}_z$$

Ecrire le tenseur gradient de la transformation à partir de ce champ de déplacement, puis le tenseur de déformation de Green-Lagrange. /1

7. On se place désormais dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations (HPP). Ecrire alors le tenseur des déformations approprié, et discuter des différences par rapport au tenseur de déformation de Green-Lagrange. /1

8. Calculer le tenseur des dilatations de Cauchy. Calculer la dilatation dans la direction $d\mathbf{X} = dX \underline{e}_z$. Retrouver ce résultat à partir de l'écriture du tenseur des déformations en HPP écrit à la question précédente. /1

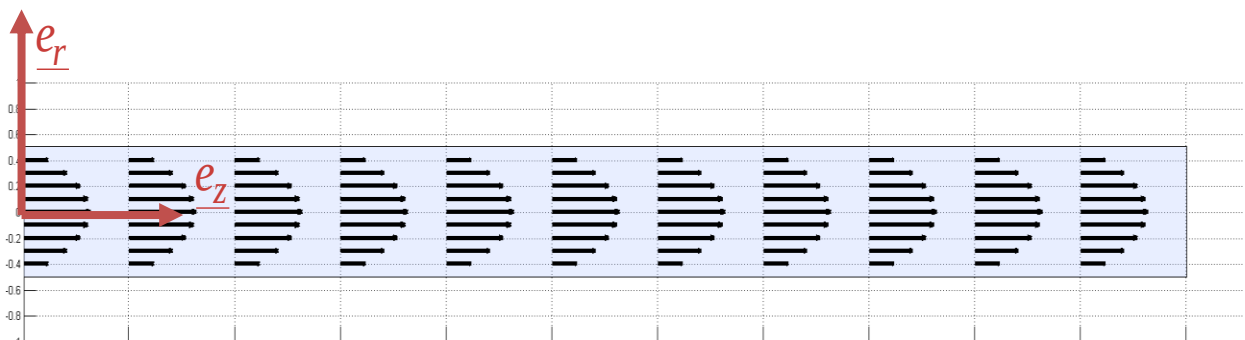
9. En se basant sur la première question, proposer une forme pour le tenseur des contraintes de Cauchy en notation tensorielle. /1
10. Réécrire les équations d'équilibre dans ce cas en simplifiant les termes nuls. Proposer une forme pour $\sigma_{zz}(r, \theta, z)$ en s'appuyant sur les conditions aux limites énoncées sur la surface supérieure. /1
11. Déduire une forme pour le champ de déplacement $\underline{u}(z)$ en s'appuyant sur les conditions aux limites sur la face inférieure. /1
12. Donner les valeurs et directions principales du champ de contraintes. /1
13. Exprimer la variation de volume lors de la transformation /1
14. En utilisant l'équation de Navier et les conditions aux limites du problème, et à partir d'une forme générale pour le champ de déplacement du type $\underline{u}(z) = u_z(z)\underline{e}_z$, démontrer qu'on a obligatoirement un champ de la forme $\underline{u}(z) = Aze_z$ avec A une constante pour respecter l'équilibre mécanique du système.
- rappel : équation de Navier $(\lambda + \mu)\underline{\text{Grad}}(\text{Div}\underline{u}) + \mu\underline{\text{Div}}(\underline{\text{Grad}}\underline{u}) + \rho(\underline{f}^v - \underline{a}) = \underline{0}$ /2

Ecoulement de Poiseuille

Enoncé

On se donne un écoulement de Poiseuille dans une conduite de rayon R . La forme du champ de vitesse est la suivante :

$$\underline{v}(r, \theta, z, t) = v_{\max}(t) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \underline{e}_z$$



1. Donner une condition sur le champ de vitesse pour que l'on soit dans le cas d'un mouvement stationnaire. /1
2. Dans le cas d'un mouvement stationnaire, donner la description lagrangienne du mouvement avec la condition initiale $r(t=0)=R_0, \theta(t=0)=\theta_0, z(t=0)=Z_0$. /1
3. Vérifier à partir de ce champ de vitesses que le fluide est incompressible. /1
4. Calculer le tenseur de description eulérienne $\underline{\underline{K}}$, puis le tenseur vitesse de déformation $\underline{\underline{D}}$ et le tenseur vitesse de rotation $\underline{\underline{\Omega}}$. /1
5. On considère que le fluide est newtonien. Pour un tel fluide, la loi de comportement nous dit que la partie déviatorique du tenseur des contraintes est égale au tenseur vitesse de déformation multiplié par 2η , η étant la viscosité dynamique du fluide. Ecrire le tenseur des contraintes qui résulte d'un écoulement de Poiseuille en notation tensorielle puis matricielle, en posant $-p = \text{Tr} \underline{\underline{\sigma}} / 3$. /1

Formulaire

→ gradient d'un scalaire en coordonnées cylindriques

$$\underline{\text{Grad}} a = \frac{\partial a}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial a}{\partial z} \underline{e}_z$$

→ gradient d'un vecteur en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{a} = & \frac{\partial a_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - a_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial a_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial a_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + a_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial a_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial a_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

→ divergence d'un vecteur en coordonnées cylindriques

$$\text{Div} \underline{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

→ divergence d'un tenseur d'ordre 2 symétrique en coordonnées cylindriques:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{Div}}} \underline{\underline{A}} = & \left(\frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (A_{rr} - A_{\theta\theta}) + \frac{\partial A_{rz}}{\partial z} \right) \underline{e}_r + \\ & \left(\frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} A_{\theta r} + \frac{\partial A_{\theta z}}{\partial z} \right) \underline{e}_\theta + \\ & \left(\frac{\partial A_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} A_{zr} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \right) \underline{e}_z \end{aligned}$$

→ rotationnel d'un vecteur en coordonnées cylindriques:

$$\underline{\text{Rot}} \underline{a} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \underline{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \underline{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r a_\theta}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \underline{e}_z$$

