

## Mécanique des Milieux Continus (MMC)

2h – aucun document autorisé

Vous pouvez utiliser au choix les notations **indicielles**, **matricielles** ou **tensorielles**.

### 1. Question de cours

(/4)

Dans toute cette section on se place en **coordonnées cartésiennes**.

- Démontrer la relation suivante (/0.5) :

$$\text{Tr}(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\text{Grad}}}(\underline{v})) = T_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

- Démontrer la relation suivante (/0.5) :

$$\text{Div}(\alpha \underline{a}) = \underline{\underline{\text{Grad}}} \alpha \cdot \underline{a} + \alpha \text{Div}(\underline{a})$$

- On rappelle le « théorème de la divergence » pour un tenseur d'ordre 2 :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\text{Div}}}(\underline{\underline{T}}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n} da$$

Prouver que pour un tenseur sphérique  $\underline{\underline{T}} = \alpha \underline{\underline{I}}$ , on a la relation (/1):

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\text{Grad}}} \alpha d\Omega = \int_{\partial\Omega} \alpha \underline{n}(\underline{x}) da$$

- Cocher les bonnes cases. Réponse juste et complète : +0.25. Réponse fausse ou incomplète : -0.25. Pas de réponse = 0.

- Le tenseur gradient de la transformation est :

☐ symétrique   ☐ lagrangien   ☐ eulérien   ☐ mixte   ☐ sphérique

- Le second tenseur de Piola-Kirchhoff est :

☐ symétrique   ☐ lagrangien   ☐ eulérien   ☐ mixte   ☐ sphérique

- Lors d'un mouvement de corps rigide, les quantités suivantes sont nulles :

☐  $F_{11}$    ☐  $C_{21}$    ☐  $C_{33}$    ☐  $\varepsilon_{33}$    ☐  $\lambda$    ☐  $\mathcal{P}_i(\hat{\underline{v}})$    ☐  $E_{33}$    ☐  $d_{21}$

- On peut qualifier la quantité  $I_1^\sigma = \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}})$  d'invariant :

☐ par changement de base   ☐ par changement de référentiel   ☐ scalaire

- Lors d'un essai de traction selon  $\underline{e}_1$ , il est courant de diviser l'effort mesuré par la section initiale de l'échantillon. La valeur obtenue est :

☐  $P_{11}$    ☐  $S_{11}$    ☐  $\sigma_{11}$    ☐  $\varepsilon_{11}$    ☐  $E$    ☐  $\nu$

- Les quantités suivantes sont énergétiquement conjuguées :

☐  $\underline{\underline{S}}$  et  $\underline{\underline{d}}$    ☐  $\underline{\underline{P}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$    ☐  $\underline{\underline{F}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$    ☐  $\underline{\underline{S}}$  et  $\underline{\underline{E}}$    ☐  $\underline{\underline{P}}$  et  $\underline{\underline{F}}$

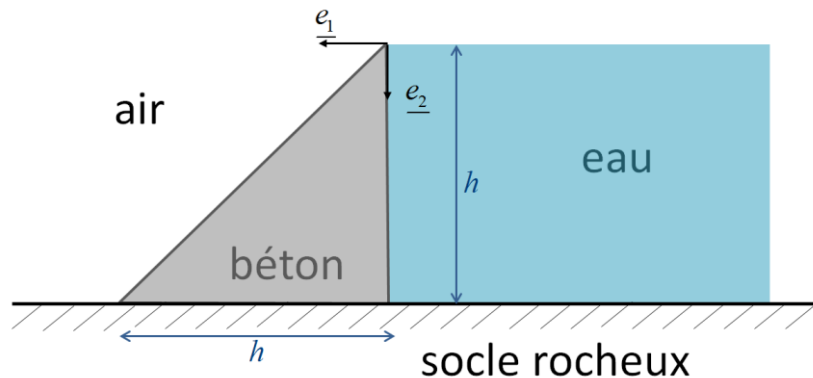
- En HPP on a :

☐  $\underline{\underline{\varepsilon}} \approx \underline{\underline{\sigma}}$    ☐  $P_{32} \approx S_{32}$    ☐  $S_{12} = S_{21}$    ☐  $\underline{\underline{\varepsilon}} \approx \underline{\underline{C}}$    ☐  $J \approx 1$

- Pour caractériser le comportement mécanique d'un solide élastique linéaire isotrope il faut connaître :

☐ sa taille   ☐  $E, \nu$  et  $\lambda, \mu$    ☐  $E, \nu$  ou  $\lambda, \mu$    ☐ sa viscosité   ☐ sa forme

## 2. Exercice 1 : étude des contraintes dans un barrage pesant (/9)



On considère un barrage pesant en forme de trièdre de côté  $h$ , de longueur  $L$  destiné à retenir de l'eau de densité  $\rho_0$ .

Le barrage repose sur un socle rocheux plan. Le béton constituant le barrage peut être décrit comme un matériau homogène élastique isotrope.

On considère le barrage très long selon la direction  $\underline{e}_3$ , et qu'il est bloqué selon  $\underline{e}_3$  à ses deux extrémités. On peut donc considérer que le problème sera indépendant de  $\underline{e}_3$ , et qu'on aura un champ de déplacement de la forme :

$$\underline{u}(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2)\underline{e}_1 + u_2(x_1, x_2)\underline{e}_2$$

On cherche à connaître le champ de contraintes dans le barrage. Le problème est évidemment un problème de statique, la température est considérée homogène, et on se place sous l'hypothèse des petites perturbations dans tout le problème. Le poids n'est bien entendu **pas** négligé.

1. Exprimer le tenseur gradient de la transformation (/1)

2. On considère le vecteur suivant :  $\underline{B} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2$ . Calculer le vecteur  $\underline{b}$  après transformation. (/1)

3. Calculer le tenseur des déformations linéarisé en tout point du barrage. Interpréter les différents termes de ce tenseur. (/1.5)

4. Calculer le tenseur des contraintes en tout point du barrage à partir de la question précédente (/1)

5. Le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_{12} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) + \sigma_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_{33} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

Ecrire les équations qui résultent de l'équilibre du barrage, en se rappelant qu'ici :

$$\underline{f}^m = g \underline{e}_2 \quad (/1)$$

6. Sur la face du barrage soumise à la pression de l'eau, on peut exprimer la pression en fonction de la hauteur :  $P(x_2) = \rho_0 g x_2$ , avec  $\rho_0$  la masse volumique de l'eau (la pression atmosphérique est négligée). Ecrire la condition aux limites correspondante sur cette surface concernant le tenseur des contraintes de Cauchy (/1)

7. Ecrire les conditions aux limites sur la face du barrage en contact avec l'air. Sur cette face la normale sortante s'écrit naturellement :  $\underline{n} = (\underline{e}_1 - \underline{e}_2) / \sqrt{2}$  et on a  $x_1 = x_2$ . En déduire que sur cette face le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{11} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \sigma_{33} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (/1.5)$$

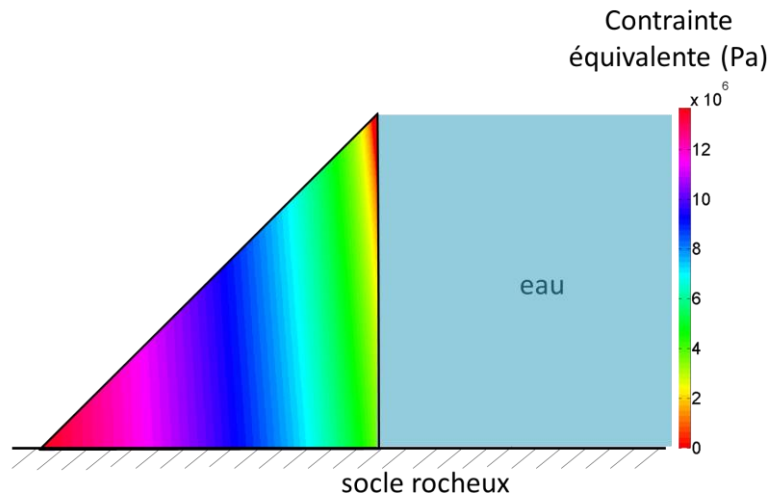
8. La question 3) nous a permis de nous apercevoir que  $\varepsilon_{33} = 0$ . A partir de la loi de comportement inverse, en déduire une condition sur  $\sigma_{33}$  par rapport aux autres composantes du tenseur des contraintes. (/1)

Rappel : loi de comportement inverse :  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{I}$

On vient au final de calculer le tenseur des contraintes suivant :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -\rho_0 g x_2 & -\rho_0 g x_1 & 0 \\ -\rho_0 g x_1 & (-2\rho_0 g + \rho g) x_1 + (\rho_0 g - \rho g) x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu(-\rho g x_2 + (\rho g - 2\rho_0 g) x_1) \end{pmatrix}$$

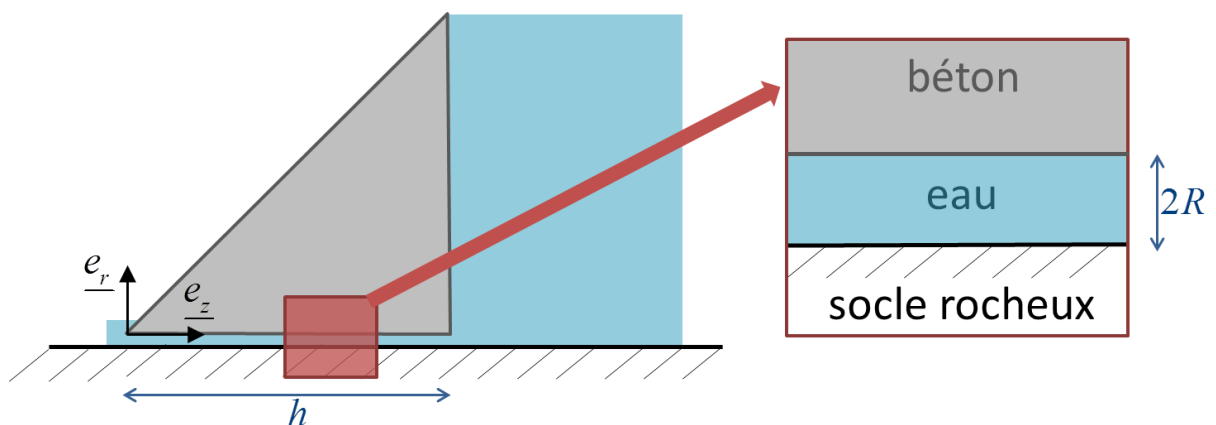
Les contraintes dans tout le barrage sont représentées ci-dessous :



### 3. Exercice 2 : écoulement de l'eau à travers le barrage

(/7)

On considère maintenant qu'une conduite d'eau cylindrique traverse le barrage comme indiqué sur le schéma ci-dessous. La conduite est de rayon  $R$  et de longueur  $h$ . On considère le nouveau repérage cylindrique ci-dessous tel qu'à l'entrée de la conduite (en  $z = h$ ) la pression est égale à  $P_0 = \rho_0 g h$  et qu'à la sortie de la conduite (en  $z = 0$ ) la pression est égale à la pression atmosphérique  $P_{atm}$ . On cherche à connaître le profil de vitesse à l'intérieur de la conduite une fois l'écoulement établi, sachant qu'on considère une adhésion complète du fluide aux parois.



9. On fait l'hypothèse que le champ de vitesses est complètement orienté selon l'axe de la conduite, et indépendant de  $\theta$ . En considérant que l'eau qui y circule est incompressible, donner la forme générale de  $\underline{v}$ . (/1)

10. A l'aide de l'équation de Navier-Stokes, écrire les équations différentielles qui régissent le champ de pression et le champ de vitesse. On considère que le champ de pression est indépendant de  $\theta$ , on rappelle que l'écoulement est établi, et on néglige les efforts volumiques. (/1.5)

11. On considère un champ de pression linéaire en  $z$ . A partir de l'équation précédente et des conditions aux limites, déterminer complètement le champ de pression. (/1)

12. A partir de l'équation de Navier-Stokes et des conditions d'adhésion à la paroi, déterminer le champ de vitesse. Pour le déterminer complètement, on se servira du fait que le profil de vitesse obtenu doit être une fonction paire par rapport à  $r$ . (/1.5)

13. On considère que le champ de vitesse obtenu est de la forme  $v_z(r) = C(r^2 - R^2)$ , avec  $C$  une constante dépendante des propriétés de l'eau. Donner l'équation de la trajectoire de la particule placée initialement en  $(R_0, \theta_0, Z_0)$ . (/1)

14. On considère le champ de vitesse précédent et un champ de pression de la forme  $p(z) = Az + B$  avec  $A, B$  des constantes dépendantes des propriétés de l'eau. En considérant que l'eau est un fluide newtonien, calculer la contrainte générée par l'écoulement en tout point de la paroi de la conduite. (/1)