

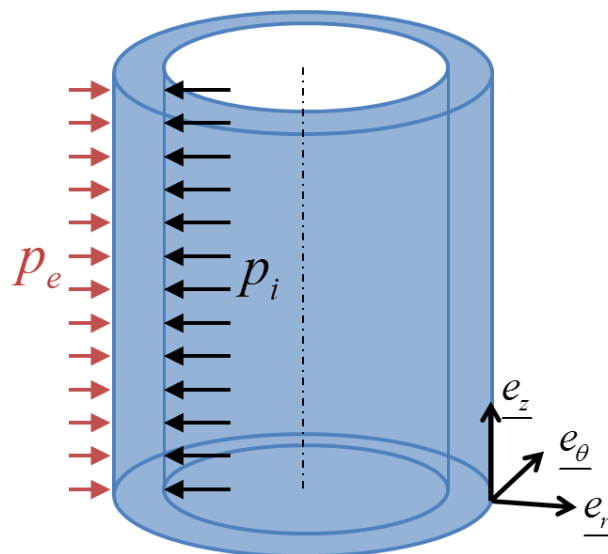
Mécanique des Milieux Continus (MMC)

2h – aucun document autorisé

Vous pouvez utiliser au choix les notations **indicielles**, **matricielles** ou **tensorielles**. Les questions ci-dessous ont été traitées pour une partie en amphithéâtre lors du dernier cours, pour l'autre partie dans un des exercices de révision disponible sur Arche.

Cas 1 : tube sous pressions interne et externe

On considère un tube soumis à une pression intérieure p_i et à une pression extérieure p_e . On note L la longueur du tube, et on note r_i et r_e le rayon intérieur et extérieur du tube respectivement. On suppose que le tube a un comportement élastique linéaire, homogène et isotrope, que la température est homogène et que les forces de volume sont négligées. Dans la suite, on va faire l'hypothèse que la solution du problème (déplacements, déformations, contraintes) est indépendant de la hauteur z . On se place sous l'hypothèse des petites perturbations dans tout le problème.



1. Exprimer les conditions aux limites sur la surface intérieure ($\underline{n} = -\underline{e}_r, r = r_i$) et sur la surface extérieure ($\underline{n} = \underline{e}_r, r = r_e$) du tube. (/2)

2. A partir de la physique du problème, proposer une forme simplifiée pour le champ de déplacement. (/1)

3. On considère un champ de déplacement de la forme $\underline{u}(r) = u_r(r)\underline{e}_r$. En déduire le tenseur des déformations linéarisé (/1)

4. En déduire le tenseur des contraintes de Cauchy (/2)

5. A partir de l'équilibre du milieu continu, montrer que le champ de déplacements doit satisfaire l'équation différentielle $r^2 u_r'' + r u_r' - u_r = 0$ (/2)

6. Retrouver le résultat précédent en utilisant l'équation de Navier (/2)

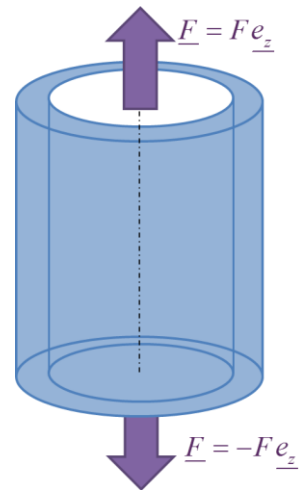
7. Un champ de déplacement de la forme $u_r = Ar + B/r$ est solution de l'équation précédente. Réécrire dans ce cas la quantité σ_{rr} en fonction des paramètres du matériau et des deux constantes A et B (/1)

8. A partir des conditions aux limites, écrire le système d'équations (sans le résoudre) qui permet de déterminer les constantes A et B (/1)

Cas 2 : tube en traction uniaxiale

On considère le même tube, soumis désormais à un effort de traction $\underline{F} = F \underline{e}_z$ supposé réparti de façon homogène sur la section du tube.

9. Exprimer les conditions aux limites sur la surface supérieure ($\underline{n} = \underline{e}_z, z = L$) et sur la surface inférieure ($\underline{n} = -\underline{e}_z, z = 0$) du tube. (/2)



10. On suppose que pour une telle configuration l'état de contraintes est homogène en tout point, et de la forme $\underline{\sigma}(r, \theta, z) = \sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$. Ecrire le tenseur des contraintes de Cauchy en tout point du tube en fonction de la force appliquée (/1)

11. En déduire le tenseur des déformations linéarisé en tout point du tube (/1)

12. Discuter de la signification physique de chacune des composantes de ce tenseur (y compris sur leur signe) (/1)

13. Vérifier que le tenseur précédent satisfait la condition de compatibilité géométrique (/1)

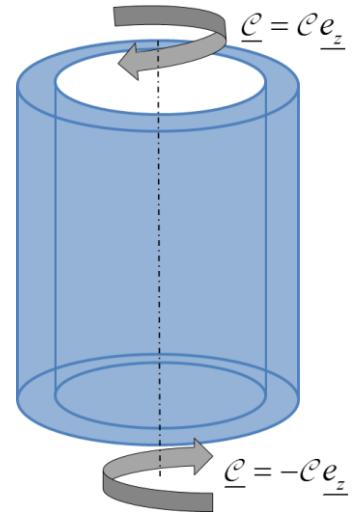
Cas 3 : tube en torsion

On considère le même tube, soumis désormais à un couple de torsion $\underline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \underline{e}_z$ supposé réparti de façon homogène sur la section du tube.

14. Ecrire proprement les conditions aux limites correspondantes sur la surface supérieure ($\underline{n} = \underline{e}_z, z = L$) du tube.

On suppose que l'épaisseur du tube est petite, et que la quantité

$\int_S r dS$ peut s'exprimer : $2\pi R^2 e$ avec e l'épaisseur du tube et R le rayon moyen. (/2).



On impose un couple de résultante $\mathcal{C}$, donc on peut écrire la condition (on nomme

Formulaire

En coordonnées cylindriques :

→ divergence d'un champ de vecteurs

$$\text{Div } \underline{T} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r T_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T_z}{\partial z}$$

→ divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2 symétrique:

$$\begin{aligned} \underline{\text{Div}} \underline{T} = & \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \right) \underline{e}_r + \\ & \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{\theta r} + T_{r\theta}) + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \right) \underline{e}_\theta + \\ & \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{zr} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \underline{e}_z \end{aligned}$$

→ gradient d'un champ de scalaires

$$\underline{\underline{Grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \underline{e}_z$$

→ gradient d'un champ de vecteurs

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Grad}} \underline{T} &= \frac{\partial T_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \\ &\quad \frac{\partial T_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \\ &\quad \frac{\partial T_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

Equation de Navier: $(\lambda + \mu) \underline{\underline{Grad}} (\underline{\text{Div}} \underline{u}) + \mu \underline{\Delta} \underline{u} + \rho (\underline{f}^m - \underline{a}) = \underline{0}$

Loi de comportement inverse: $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{I}$