

Mécanique des Milieux Continus (MMC)

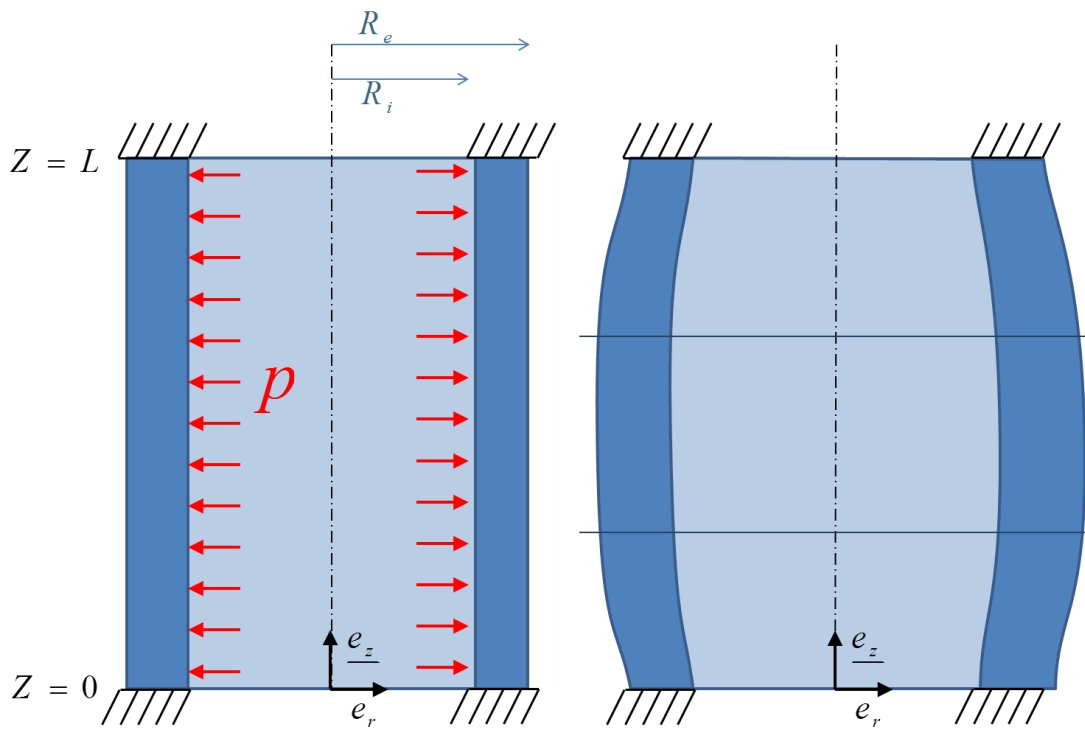
2h – aucun document autorisé

Vous pouvez utiliser au choix les notations **indicielles**, **matricielles** ou **tensorielles**.

Artère soumise à la pression sanguine

(/15)

On considère un segment de paroi artérielle cylindrique d'une longueur L soumise à une pression interne de pression maximum p . Les rayons internes et externes de cette paroi sont notés respectivement R_i et R_e . On cherche à reproduire cet état mécanique en laboratoire, en imposant une pression constante p par l'intermédiaire d'un fluide sous pression tout en fixant les deux extrémités inférieure et supérieure du segment artériel. Dans tout le problème, on fera l'hypothèse que la température est maintenue constante lors de l'essai et que les forces de volume sont négligées.



1. Exprimer les conditions aux limites sur les surfaces intérieure et extérieure de l'échantillon. (/2)

2. Exprimer les conditions aux limites sur les surfaces inférieure et supérieure de l'échantillon. (/1)

3. On considère que sous l'application de la pression, le champ de déplacement dans l'artère est de la forme $\underline{u}(r, \theta, z) = u_r(r, z)\underline{e}_r$. Justifier cette hypothèse par des considérations physiques. (/1)

4. Pour ce champ de déplacement, calculer le tenseur gradient de la transformation. (/2)

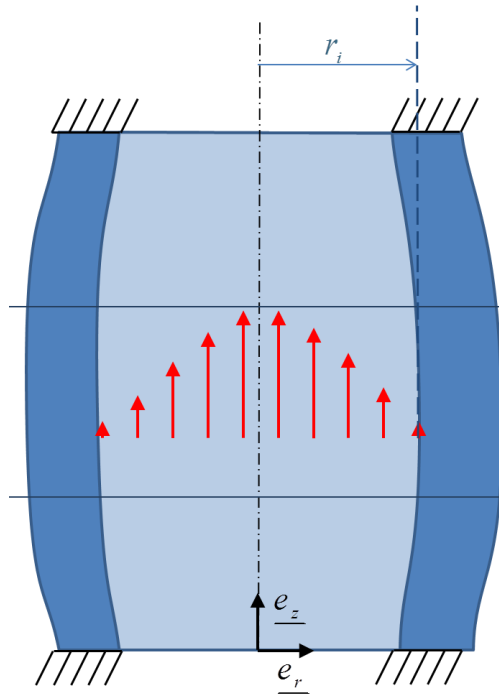
5. Les matériaux qui constituent les tissus biologiques sont essentiellement constitués d'eau, et par conséquent très peu compressibles. On fait donc l'hypothèse qu'il n'y a aucune variation de volume durant la transformation. Déterminer l'équation qui doit alors être satisfaite par $u_r(r, z)$. (/1)

6. On fait désormais l'hypothèse que dans le tiers central de l'échantillon, en vertu du principe de Saint-Venant, le champ de déplacement est indépendant de z et on a par conséquent $\underline{u}(r, \theta, z) = u_r(r)\underline{e}_r$. Réécrire le tenseur gradient de la transformation dans ce cas, puis le tenseur des déformations de Green-Lagrange. (/2)

7. On se place désormais dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, qui peut être considérée comme acceptable tant que la pression appliquée est petite. Calculer dans ce cas le tenseur des déformations linéarisé, et le comparer au tenseur des déformations de Green-Lagrange obtenu précédemment. (/1)
8. On considère qu'en HPP, l'artère se comporte de façon élastique linéaire et isotrope. Calculer le tenseur des contraintes de Cauchy. (/1)
9. En considérant l'équilibre du milieu, montrer que le champ de déplacements doit satisfaire l'équation différentielle $r^2 u_r'' + r u_r' - u_r = 0$ avec $u_r' = \frac{du_r}{dr}$ (/2)
10. Un champ de déplacement de la forme $u_r = Ar + B/r$ est solution de l'équation précédente. Réécrire dans ce cas la quantité σ_{rr} en fonction des paramètres du matériau et des deux constantes A et B. (/1)
11. A partir des conditions aux limites formulées en première question, écrire les équations (sans les résoudre) qui permettent de déterminer les constantes A et B. (/1)

Artère soumise à la pression sanguine et à une circulation de fluide (/5)

On maintient l'essai précédent, en faisant dorénavant circuler le fluide permettant de mettre l'artère sous pression. On considère l'écoulement établi.



12. On considère que les champs de pression et de vitesse sont de la forme $p = p(r, z)$ et $\underline{v} = v_z(r)\underline{e}_z$ respectivement. A l'aide de l'équation de Navier-Stokes, écrire les équations différentielles qui régissent le champ de pression $p = p(r, z)$ et de vitesse $\underline{v} = v_z(r)\underline{e}_z$ dans le tiers central de l'échantillon. (/2)

13. On considère que le champ de vitesse à l'intérieur de ce fluide est de la forme (écoulement de Poiseuille en régime établi):

$$\underline{v}(r, \theta, z, t) = v_z(r)\underline{e}_z = v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{r_i^2} \right) \underline{e}_z$$

Dans cette équation, on note r_i le rayon interne du segment artériel dans le tiers central de l'échantillon. Vérifier qu'un tel écoulement est incompressible, et que la vitesse du fluide est nulle en contact avec la paroi artérielle. (/1)

14. Calculer le tenseur taux de déformation correspondant à ce champ de vitesses (/1)

15. En considérant que le fluide qui circule est newtonien avec une viscosité μ , déduire de la question qui précède la contrainte de cisaillement $\underline{\underline{\tau}} = 2\mu\underline{\underline{d}}$ qui s'exerce au niveau de la paroi interne de l'artère lors de l'écoulement. (/1)

On vient globalement d'estimer les contraintes auxquelles sont soumises les cellules qui tapissent la paroi interne d'une artère, qui s'écrivent sous la forme :

$$\left[\underline{\underline{\sigma}}\right] = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \tau \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \tau & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

où les différentes composantes ont été calculées précédemment. Ceci peut permettre notamment de mieux comprendre l'environnement dans lesquelles ces cellules évoluent, et donc de faire des hypothèses sur les mécanismes qui mènent à la thrombose artérielle (obstruction de l'artère).

Cette estimation a impliqué de nombreuses hypothèses dont la plupart sont fausses (matériau élastique linéaire isotrope, fluide newtonien) : pour se passer de ces hypothèses, il faudra attendre le programme de deuxième année du parcours EM-SYS...

Formulaire

En coordonnées cylindriques :

→ divergence d'un champ de vecteurs

$$\text{Div } \underline{T} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rT_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T_z}{\partial z}$$

→ divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2 symétrique:

$$\begin{aligned} \underline{\text{Div}} \underline{T} = & \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \right) \underline{e}_r + \\ & \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{\theta r} + T_{r\theta}) + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \right) \underline{e}_\theta + \\ & \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{zr} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \underline{e}_z \end{aligned}$$

→ gradient d'un champ de scalaires

$$\underline{\text{Grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \underline{e}_z$$

→ gradient d'un champ de vecteurs

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{T} = & \frac{\partial T_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial T_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial T_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

Loi de comportement inverse pour un solide élastique linéaire isotrope :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}$$

$$\text{Equation de Navier-Stokes: } \rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\underline{\text{grad}}}(p) + \mu \Delta \underline{v} + \rho \underline{g}$$