

Mécanique des Milieux Continus (MMC)

2h – aucun document autorisé
Rattrapages – Mars 2016

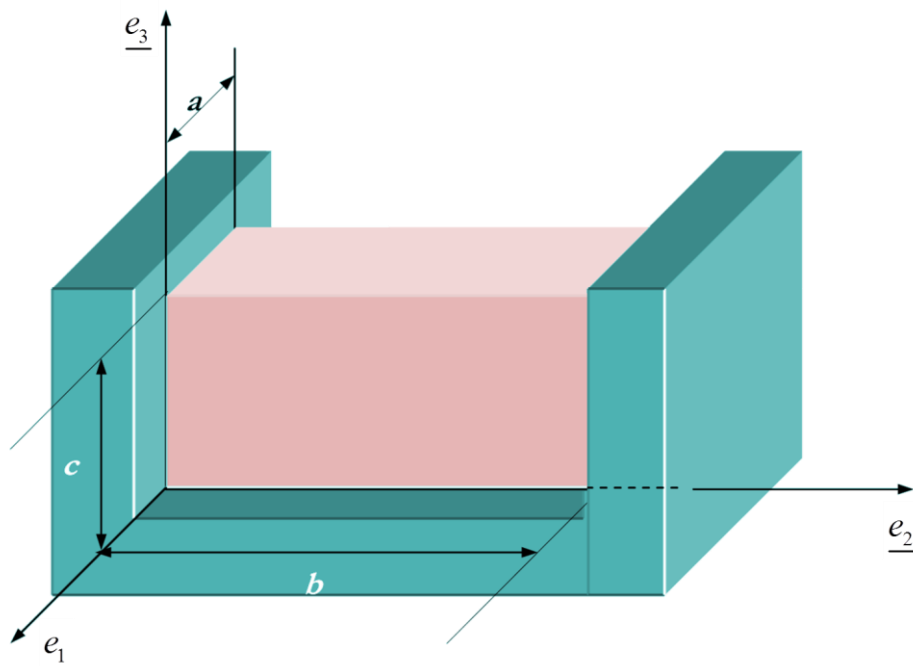
Vous pouvez utiliser au choix les notations **indicielles**, **matricielles** ou **tensorielles**.

On considère le solide ci-dessous (élastique linéaire isotrope de module de Young E et de coefficient de Poisson ν) soumis à une variation de température $\Delta\Theta$. Dans ce cas la loi de comportement fait intervenir un coefficient thermique α de telle sorte qu'on ait la relation :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{S}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{S}}) \underline{\underline{I}} + \alpha \Delta\Theta \underline{\underline{I}}$$

On néglige les forces de volumes et on considère un problème de statique.

Le solide est placé dans un rail entièrement rigide sur trois de ses six faces, comme illustré ci-dessous. Le contact entre le solide et le rail est considéré sans frottement, de telle sorte qu'il n'est pas possible d'imposer à l'interface un effort tangent.



1. Ecrire proprement les conditions aux limites sur les six faces du solide (/3)
2. A partir de la physique du problème, prouver que le second tenseur des contraintes de PK2 peut s'écrire $\underline{\underline{S}} = S_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$. (/1)
3. On fait l'hypothèse que la déformation de Green-Lagrange E_{22} sera nulle étant données les conditions aux limites. En déduire une condition sur la contrainte S_{22} à partir de la loi de comportement inverse et réécrire les tenseurs $\underline{\underline{S}}$ et $\underline{\underline{E}}$. (/2)
4. On se place désormais (**dans toute la suite**) en HPP. Quels changements de notation peuvent alors s'effectuer ? (/1)
5. A partir de considérations physiques, montrer que le champ de déplacement est de la forme : $\underline{u} = u_1(X_1) \underline{e}_1 + u_3(X_3) \underline{e}_3$ (/1)
6. Calculer la déformation (en HPP) correspondante à ce champ de déplacement. (/1)
7. Calculer la contrainte (en HPP) correspondante à ce champ de déformation, en utilisant la loi de comportement suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} - k \Delta \Theta \underline{\underline{I}} \quad \text{où } k \text{ est un paramètre thermique.} \quad (/1)$$
8. On a précédemment fait l'hypothèse que la contrainte était uniquement orientée selon $\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$. D'après la question précédente, montrer que le champ de déplacement peut alors s'écrire de la forme : $\underline{u} = (A \Delta \Theta X_1 + B) \underline{e}_1 + (A \Delta \Theta X_3 + C) \underline{e}_3$ avec A, B, C des constantes. Expliciter la constante A en fonction des paramètres du matériau. (/2)

9. A quoi correspondent les constantes B et C ? Comment les déterminer ? (/1)
10. On suppose qu'on peut écrire $\sigma_{22} = -\alpha E \Delta \Theta$. En déduire une relation entre le module de Young E , les paramètres de Lamé et les paramètres thermiques du matériau. (/1)
11. On donne dans la littérature l'expression suivante : $k = \frac{E\alpha}{1-2\nu}$
12. Le milieu est-il à l'équilibre ? (/1)
13. Ecrire la trajectoire d'un point P situé initialement en $\underline{X}^P$. Discuter de la cohérence de la forme obtenue par rapport à la physique du problème (/1)
14. A partir de la forme obtenue, calculer le tenseur gradient de la transformation. Calculer la variation de volume en fonction de la variation de température. (/2)
15. Calculer la dilatation dans la direction du rail. Quel est le coefficient de dilatation thermique α du solide dans cette direction (définition : $\Delta L = \alpha L_0 \Delta \Theta$) ? (/1)