



Mécanique des Milieux Continus (MMC)

2h – aucun document autorisé

Vous pouvez utiliser au choix les notations **indicielles**, **matricielles** ou **tensorielles**.

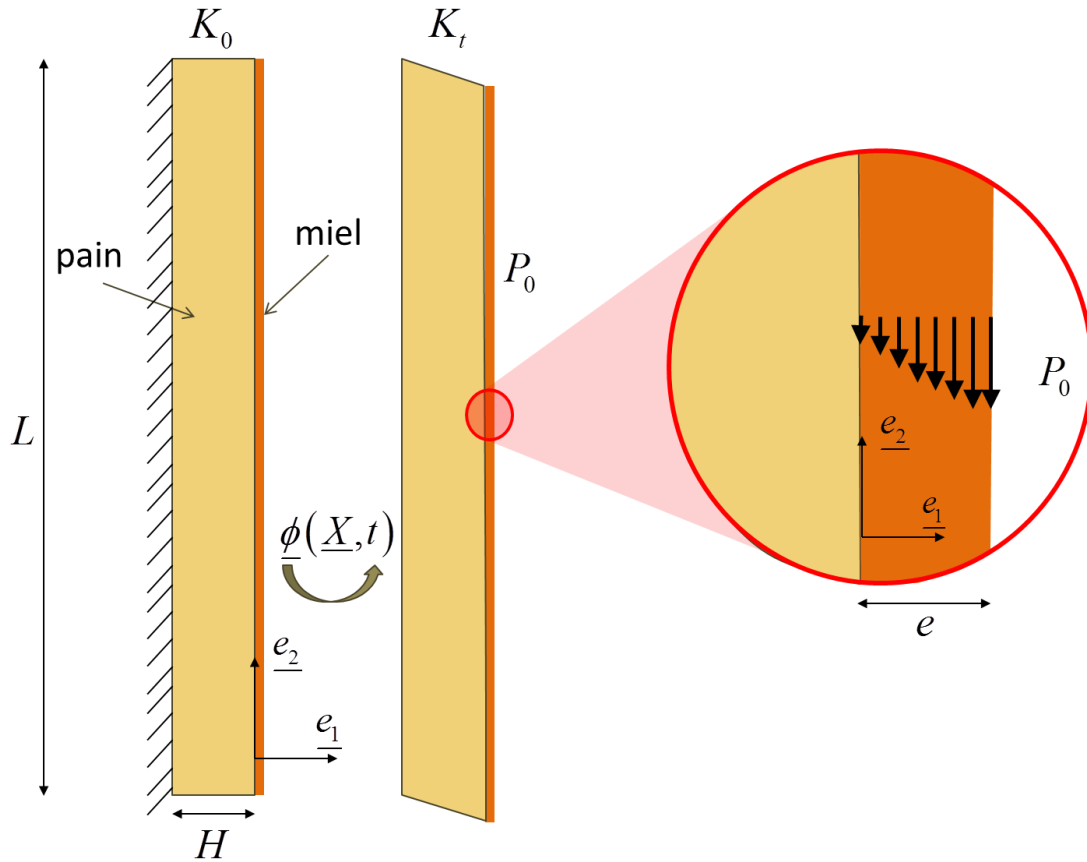
Mécanique du petit déjeuner

On considère une tranche de pain de mie parallélépipédique de côté L et de hauteur H . On considère que le **pain** de mie est un **solide élastique, linéaire** et **isotrope**. La face $x_1 = -H$ est considérée fixe (voir figure ci-dessous).

Sur cette tranche de pain de mie, on considère qu'une fine couche de miel d'épaisseur e est déposée de façon homogène. On considère que le **miel** est un **fluide newtonien incompressible**, et que la **pression** atmosphérique P_0 s'applique à sa surface. A l'interface miel – pain, on considère que la vitesse du fluide est **nulle**.

On place l'ensemble verticalement, de telle sorte que l'ensemble est soumis à son **propre poids**. Sous l'action de ce poids, le miel va s'écouler de façon **stationnaire**: on va dans un premier temps étudier cet écoulement, et en particulier la **contrainte** à l'interface miel – pain qui va résulter de cet écoulement. En raison de cette contrainte à l'interface miel – pain, et de son propre poids, le pain va se déformer. On va dans un second temps étudier cette **déformation**.

Notation : Dans toute la suite, la viscosité du miel sera notée η pour ne pas être confondu avec le paramètre de Lamé μ . De plus, on distinguera les masses volumiques du miel et du pain ρ^m et ρ^p .



Problème #1 : écoulement du miel

1. Ecrire la condition de surface **libre** à la surface du miel ($x_1 = e$, $\underline{n} = \underline{e}_1$). Ecrire la forme générale du tenseur des **contraintes** en ce point sous forme **matricielle**. (/1)

2. Justifier que le champ de vitesse d'écoulement du miel peut s'écrire $\underline{v}(x_1) = v_2(x_1)\underline{e}_2$ si l'on considère que l'épaisseur de la couche de miel est suffisamment petite pour que le pain soit infiniment grand selon $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$. On pourra s'aider du fait que le miel est considéré **incompressible** pour justifier proprement cette forme. (/1)

3. Quelles sont les étapes de la démonstration de **Navier-Stokes** (c'est-à-dire, quelles sont les équations fondamentales et **hypothèses** qui permettent d'arriver à l'équation finale) ? (/1)

4. Ecrire le système d'équations qui résulte de l'application de **l'équation de Navier-Stokes**, avec $\underline{v}(x_1) = v_2(x_1)\underline{e}_2$ et $p(x_1, x_2)$. (/2)

5. Calculer la **contrainte de Cauchy** qui résulte du champ de vitesses $\underline{v}(x_1) = v_2(x_1)\underline{e}_2$. (/1)

6. On admet que l'équation de Navier-Stokes implique : $\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} = \frac{\rho^m g}{\eta}$.

Calculer complètement **le champ de vitesses**, à partir de la condition de non-glissement en $x_1 = 0$ à l'interface, et de la condition de surface libre en $x_1 = e$ énoncée en question 1. (/2)

7. Ecrire l'équation de la **trajectoire** d'une particule de miel initialement en (X_1, X_2, X_3) . (/1)

8. Pour la suite on considère que seule la contrainte de cisaillement va intervenir dans la déformation de la phase solide (le pain de mie), c'est-à-dire qu'on néglige la pression hydrostatique p . Montrer qu'à **l'interface**, la **contrainte** induite par l'écoulement du miel peut s'écrire $\underline{\underline{\sigma}} = \tau(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)$ avec $\tau = -\rho^m g e$ (/1)

Problème #2 : déformation du pain sous l'effet de l'écoulement.

On considère la tranche de pain seule, soumise à la contrainte de **cisaillement** $\underline{\underline{\sigma}} = \tau (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)$ (on considère que τ est connu) en $x_1 = 0$, ainsi qu'à son **propre poids**. On peut s'attendre à une déformée comme celle représentée ci-dessus. On considère que le champ de **déplacement** pour une telle transformation est de la forme $\underline{u}(x_1) = u_2(x_1)\underline{e}_2$.

9. Calculer le tenseur des **déformations linéarisées** pour un tel déplacement. (/1)

10. Donner une interprétation des **composantes** non-nulles du tenseur des déformations linéarisées (un dessin est bienvenu). (/1)

11. Calculer la **contrainte de Cauchy** correspondant à ce champ de déformations, en fonction du champ de déplacement. (/1)

12. Ecrire l'**équation d'équilibre** en considérant que le pain est statique et soumis à son propre poids, et déduire une forme pour le champ de déplacement en considérant les différentes conditions aux limites ($u_2(x_1 = -H) = 0$, contrainte $\underline{\underline{\sigma}}(x_1 = 0) = \tau (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)$) (/2)

13. **Représenter** le champ de déplacement dans la partie solide (le pain de mie). (/1)

14. Vérifier que le résultat obtenu a bien la **dimension** d'un déplacement. (/1)

15. Le **volume** du pain est-il conservé durant la transformation ? (/1)

16. Réécrire le tenseur des contraintes en tout point dans la base **principale**.

(/1)

17. Lorsqu'on cherche à savoir le seuil de contraintes auquel un matériau va sortir de sa zone élastique, on peut calculer notamment la contrainte de **Von Mises** définie comme suit :

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$$

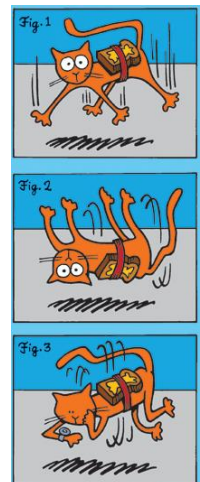
La contrainte de Von Mises maximale admise par le pain est notée $\sigma_{\max}$. A partir des questions précédentes, donner **l'épaisseur** de la couche de miel pour laquelle cette contrainte est atteinte. (/1)

Question bonus (pour détendre le correcteur et si vous vous ennuyez)

(+1 pour la meilleure réponse)

Tout le monde connaît le paradoxe du chat et de la tartine : le chat retombe toujours sur ses pattes, la tartine toujours du côté du beurre (ou du miel), et donc un ensemble chat + tartine devrait tourner à l'infini et conduire au mouvement perpétuel.

Partant de ce constat, proposer une solution technologique innovante pour générer un mouvement perpétuel.



Formulaire

Equation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\underline{grad}}(p) + \mu \Delta \underline{v} + \rho \underline{g}$$

Divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Div}} \underline{\underline{T}} &= \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \right) \underline{e}_1 + \left(\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \right) \underline{e}_2 + \left(\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \right) \underline{e}_3 \\ &= T_{ij,j} \underline{e}_i \end{aligned}$$

Approche en déplacement : équation de Navier

$$(\lambda + \mu) \underline{\underline{Grad}}(\underline{\underline{Div}} \underline{u}) + \mu \Delta \underline{u} + \rho(\underline{f}^m - \underline{a}) = \underline{0}$$

Approche en contraintes : équation de Beltrami

$$(1 + \nu) \underline{\underline{Div}}(\underline{\underline{Grad}}(\underline{\underline{\sigma}})) + \underline{\underline{Grad}}(\underline{\underline{Grad}}(\text{Tr} \underline{\underline{\sigma}})) = \underline{0}$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \underline{p} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{v}) d\Omega_t + \int_{\partial \Omega_t} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) da$$