

Mécanique des Milieux Continus (MMC)

2h – aucun document autorisé

Vous pouvez utiliser au choix les notations **indicielles**, **matricielles** ou **tensorielles**.

Tube en traction et pression interne

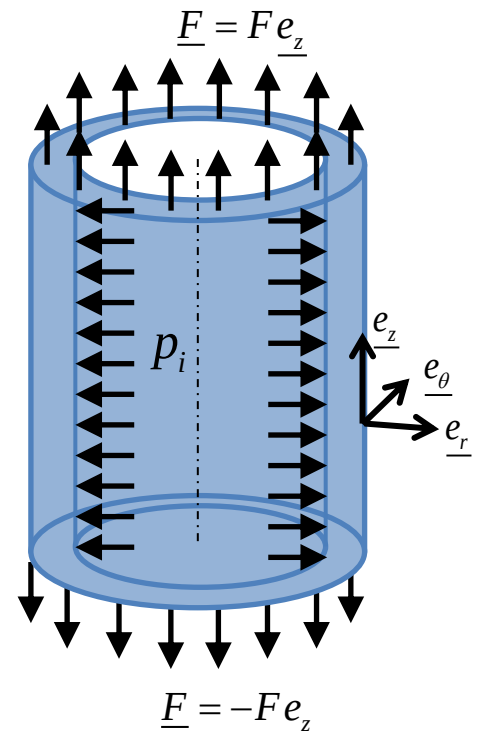
Enoncé

On traite ici un problème bien connu des étudiants 1A à l'ENSEM, puisque traité en amphithéâtre lors du dernier cours de MMC.

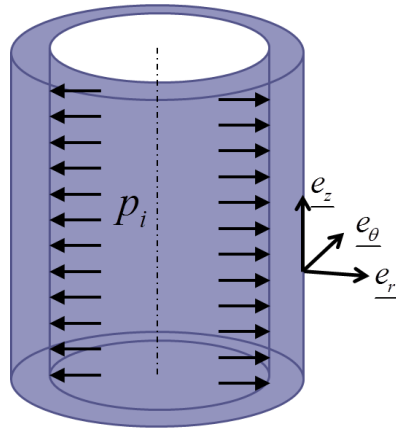
On considère un tube à paroi mince soumis d'une part à une densité surfacique d'efforts de traction répartie de façon uniforme sur sa section et qui a pour résultante F , et d'autre part à une pression p_i sur sa paroi interne. Le déplacement longitudinal du tube est bloqué à l'extrémité $z = 0$.

On note L la longueur du tube, R son rayon interne, e l'épaisseur de sa paroi telle que $e \ll R$. Le matériau qui constitue le tube est homogène, isotrope, élastique linéaire. On considère que la température est constante dans tout le problème, et que les forces de volumes sont négligées.

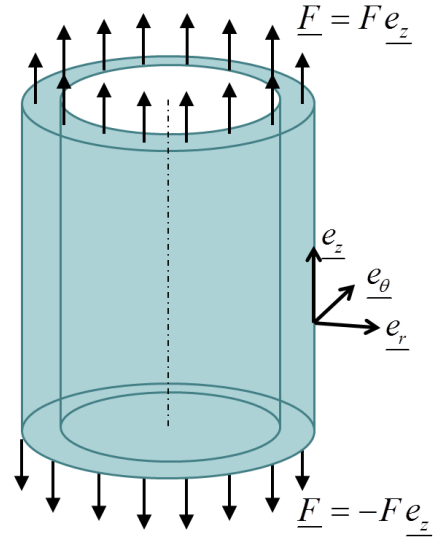
On se propose de résoudre ce problème d'élastostatique, c'est-à-dire de déterminer les champs de déplacements, de contraintes et de déformations. Pour cela, on va dans un premier temps traiter deux sous-problèmes : le cas d'un tube à paroi mince soumis à une pression interne seule, et le cas d'un tube à paroi mince soumis à une sollicitation en traction seule.



Sous-problème 1



Sous-problème 2



Sous-
problème (1)

1. On considère le sous-problème (1) du tube soumis à une pression interne, toutes les autres faces étant libres d'efforts. Ecrire les conditions aux limites dans ce cas pour la face interne ($\underline{n} = -\underline{e}_r, r = R$) et la face externe ($\underline{n} = \underline{e}_r, r = R + e$) (/1)
2. Des considérations physiques nous permettent de pressentir un champ de déplacement de la forme $\underline{u}^{(1)}(r) = u_r^{(1)}(r)\underline{e}_r$ pour le sous-problème (1). Calculer le tenseur gradient de la transformation, et l'écrire en notations tensorielle et matricielle. (/1)
3. En déduire les tenseurs des déformations $\underline{\underline{E}}^{(1)}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)}$ (notation au choix) pour le sous-problème (1). Discuter des différences entre ces deux tenseurs. (/1.5)
4. En tenant compte du fait que le matériau est élastique linéaire isotrope, et en se plaçant dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations (HPP), déduire à partir de $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)}$ le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}$ associé au sous-problème (1). On notera λ, μ les coefficients de Lamé du matériau qu'on considérera connus. (/1)

5. A partir de l'équation d'équilibre, déduire l'équation différentielle que doit satisfaire $u_r^{(1)}$ pour assurer l'équilibre mécanique du solide. Vérifier que $u_r^{(1)} = Ar + B/r$ est solution de cette équation différentielle (avec A et B des constantes). (/1.5)
6. Retrouver la même équation différentielle en partant du champ de déplacement donné et de l'équation de Navier qui s'écrit :
- $$(\lambda + \mu) \text{Grad}(\text{Div} \underline{u}) + \mu \text{Div}(\text{Grad} \underline{u}) + \rho(\underline{f}^m - \underline{a}) = \underline{0} \quad (/2)$$
7. On pose désormais $\underline{u}^{(1)}(r) = u_r^{(1)}(r) \underline{e}_r = (Ar + B/r) \underline{e}_r$. Quelle condition peut-on formuler sur A et B pour que la transformation se fasse à volume constant ? (/1)
8. Déduire de l'expression $u_r^{(1)} = Ar + B/r$ une forme générale pour le champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}$. En reprenant les conditions aux limites énoncées ci-dessus, écrire le système (sans le résoudre) qui permet de déterminer les deux constantes A et B. (/1)

Sous-problème (2)

9. On considère le sous-problème (2) du tube soumis à une densité surfacique d'efforts de résultante F répartie de façon uniforme sur ses deux extrémités, toutes les autres faces étant libres. Ecrire les conditions aux limites en efforts dans ce cas pour la face inférieure ($\underline{n} = -\underline{e}_z, z = 0$) et la face supérieure ($\underline{n} = \underline{e}_z, z = L$). Etant donnée la condition de paroi mince, on approchera l'aire de la section par $S \approx 2\pi eR$ (/1)
10. On se trouve en fait dans le cas de la traction simple, où la seule composante non nulle du tenseur des contraintes de Cauchy est $\sigma_{zz}^{(2)} = F / 2\pi eR$: on a donc $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} = F / 2\pi eR \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$. Tracer cet état de contraintes dans le plan de Mohr. Que vaut le cisaillement maximum $\tau_{\max}$? (/2)

11. En tenant compte du fait que le matériau est élastique linéaire isotrope, et en se plaçant dans le cadre de l'HPP, déduire à partir de $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}$ le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)}$ associé au sous-problème (2). On notera E, η le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau qu'on considérera connus. (/1)
12. Vérifier que le champ de déformation ci-dessus satisfait les conditions de compatibilité qui vont permettre l'existence d'un champ de déplacement associé. (/1)
13. Pour ce sous-problème, on fait l'hypothèse d'un champ de déplacement du type : $\underline{u}^{(2)}(r, z) = u_r^{(2)}(r)\underline{e}_r + u_z^{(2)}(z)\underline{e}_z$. Trouver les expressions de $u_r^{(2)}(r)$ et $u_z^{(2)}(z)$ qui permettent de retrouver le tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)}$ calculé précédemment, en utilisant le fait que le déplacement longitudinal du tube est bloqué à l'extrémité $z = 0$. (/2)

Superposition des deux sous-problèmes

14. En HPP, on va faire l'hypothèse que les champs de déplacements, de contraintes et de déformation peuvent s'écrire comme la somme des solutions des deux sous-problèmes. Ecrire donc ces trois champs $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{u}$ en notation tensorielle. On considérera désormais que les deux constantes A et B du sous-problème (1) sont connues. (/1,5)
15. Discuter de chaque composante non nulle des quantités écrites à la question précédente. A quoi correspondent-elles physiquement ? Leur signe (lorsqu'il peut être déterminé) est-il cohérent ? (on précise pour cela que $F > 0, B > 0, A > 0$) (/1.5)

Formulaire

→ gradient d'un scalaire en coordonnées cylindriques

$$\underline{\text{grad}} a = \frac{\partial a}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial a}{\partial z} \underline{e}_z$$

→ gradient d'un vecteur en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{a} = & \frac{\partial a_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - a_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial a_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial a_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + a_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial a_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial a_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

→ divergence d'un vecteur en coordonnées cylindriques

$$\text{div} \underline{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

→ divergence d'un tenseur d'ordre 2 symétrique en coordonnées cylindriques:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{A}} = & \left(\frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (A_{rr} - A_{\theta\theta}) + \frac{\partial A_{rz}}{\partial z} \right) \underline{e}_r + \\ & \left(\frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} A_{\theta r} + \frac{\partial A_{\theta z}}{\partial z} \right) \underline{e}_\theta + \\ & \left(\frac{\partial A_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} A_{zr} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \right) \underline{e}_z \end{aligned}$$

→ rotationnel d'un vecteur en coordonnées cylindriques:

$$\underline{\text{rot}} \underline{a} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \underline{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \underline{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r a_\theta}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \underline{e}_z$$

→ rappel : loi de Hooke

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = + \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}$$