

# Mécanique des Milieux Continus (MMC)

Examen de janvier 2018 - 2h – aucun document autorisé  
Vous pouvez utiliser au choix les notations **indicielles**, **matricielles** ou **tensorielles**.

## Questions de cours

( /4)

1. Expliquer brièvement le principe des puissances virtuelles .

( /1)

2. Quelle est la démarche (et les hypothèses) faite pour écrire l'équation de Navier-Stokes.

( /1)

3. Expliquer la différence entre le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  et le second tenseur de Piola-Kirchhoff (PK2)  $\underline{\underline{S}}$

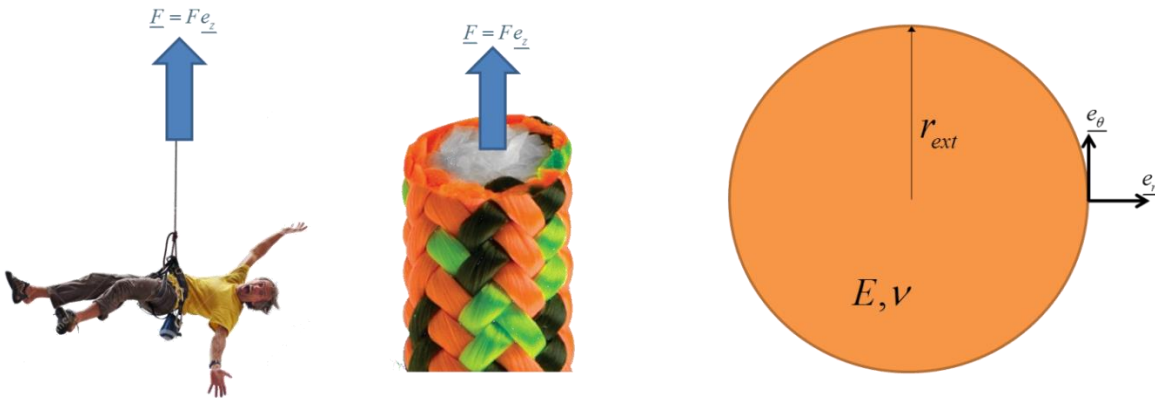
( /1)

4. Qu'est-ce qu'un fluide newtonien ?

( /1)

### Problème #1 : déformation transverse d'une corde d'escalade ( /16)

On considère une corde d'escalade de longueur  $L$ , que l'on modélise par un matériau homogène, élastique et isotrope (grosses approximations !!). On note  $r_{ext}$  le rayon extérieur de cette corde après déformation, et  $R_{ext}$  son rayon extérieur initial. On note  $E$  et  $\nu$  les modules d'Young et coefficients de Poisson du matériau équivalent, respectivement. On cherche à savoir si on peut prédire, en mesurant le diamètre  $r_{ext}$ , la masse  $M$  du grimpeur attaché à l'autre extrémité de la corde.



1. Ecrire la condition de surface libre à l'extérieur de la corde.

( /1)

2. On fait l'hypothèse que le champ de déplacement dans la corde sera de la forme

$\underline{u}(r, \theta, z) = u_r(r) \underline{e}_r + u_z(z) \underline{e}_z$ . Calculer le tenseur gradient de la transformation. ( /1)

3. Calculer le champ de déformations associé à ce champ de déplacement, en faisant l'hypothèse des petites perturbations. ( /1)

4. Exprimer le tenseur des contraintes dans la corde en fonction de  $u_r$  et  $u_z$  pour cette déformation, en faisant l'hypothèse qu'il existe un matériau équivalent à la corde élastique, linéaire et isotrope. On note  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé de ce matériau. ( /1)

5. Ecrire l'équation d'équilibre pour cet état de contraintes. Montrer que cette équation conduit aux deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} r^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_r}{\partial r} - u_r = 0 \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0 \end{cases} \quad ( /1)$$

6. Le champ de déplacement  $\underline{u}(r, z) = (Ar + B/r)\underline{e}_r + Cze_z$  est solution des équations précédente ( $A, B, C$  sont trois constantes à déterminer). On considère que le déplacement  $u_r$  est nul au centre de la corde : en déduire l'une de ces constantes. ( /1)

7. Réécrire le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  dans la corde obtenu en question 4 pour le champ de déplacement issu de la question précédente. ( /1)

8. Ecrire la condition obtenue en question 1 . Que peut-on dire sur les composantes  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  ?  
Comment appelle-t-on cet état de contrainte ? ( /1)

9. On suppose que l'effort  $F = Mg$  est réparti uniformément sur la section de la corde  $S$ . Ecrire une condition supplémentaire sur les composantes du tenseur des contraintes. En s'appuyant également sur la question précédente, écrire le système (sans le résoudre) qui permet de déterminer complètement le champ de déplacement (c-à-d de trouver toutes les constantes  $A, B$  et  $C$ ). ( /1)

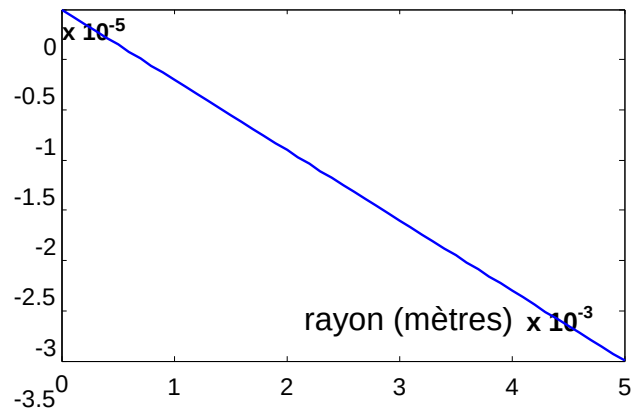
10. On considère les constantes  $A, B$  et  $C$  connues, avec  $B=0$ , et on considère que le tenseur des contraintes vaut  $\underline{\underline{\sigma}} = (Mg/S) \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ . Ecrire le champ de déformation déterminé en question 3. A partir de l'interprétation physique du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ , écrire les constantes  $A$  et  $C$  en fonction de  $E$  et  $\nu$ . ( /1).

11. En conclusion : on suppose qu'on connaît les propriétés et la section de la corde, et on mesure le rayon extérieur avant et après que le grimpeur se pend à la corde ( $u_r = r_{ext} - R_{ext}$ ) Comment détermine-t-on la masse du grimpeur? ( /1)

12. On effectue la simulation de cet essai avec les valeurs :  $r_{ext} = 5\text{mm}$ ,  $E = 0.5\text{GPa}$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $M = 70\text{kg}$ . On obtient les courbes suivantes, dans lesquelles la légende a été oubliée... compléter les courbes suivantes, en précisant les grandeurs représentées et leurs unités. ( /2)

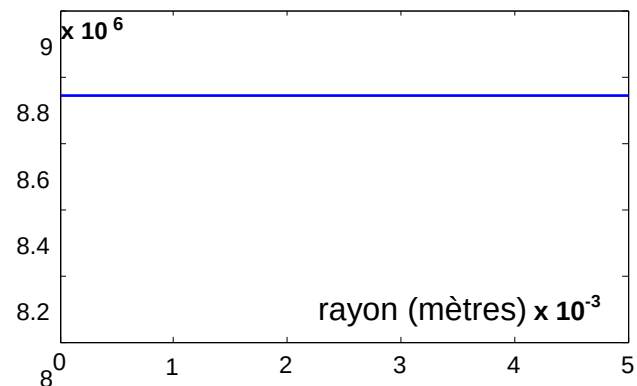
Quantité représentée :

Unité :



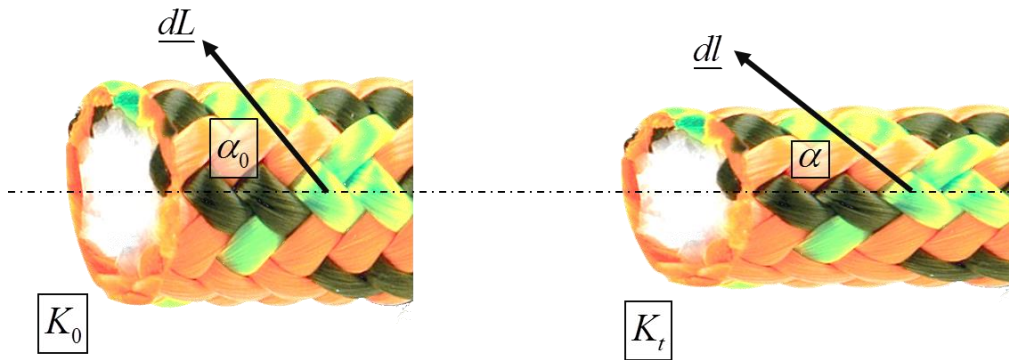
Quantité représentée :

Unité :

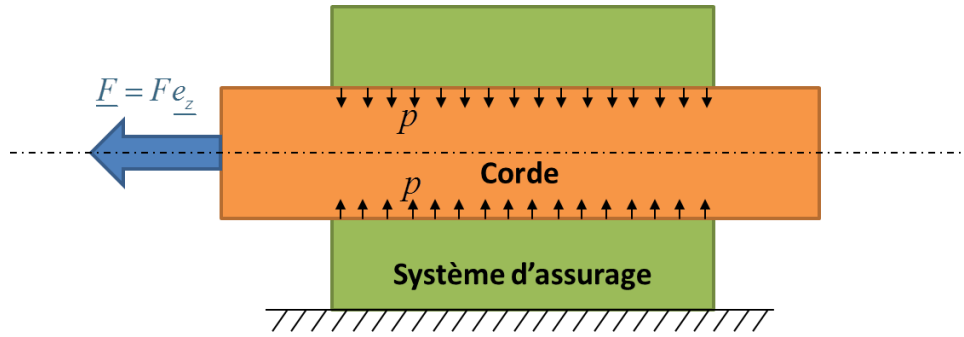




13. On considère un vecteur unitaire aligné dans la direction d'une des fibres qui constitue la gaine de la corde. On note  $\alpha_0$  l'angle initial entre ce vecteur et l'axe de la corde. D'après les questions précédentes, calculer l'angle  $\alpha$  entre cette fibre et l'axe de la corde après que la corde soit soumise au poids du grimpeur. Peut-on déterminer la masse du grimpeur en mesurant cet angle ? ( /2)



14. On fait l'hypothèse (fausse !) qu'un système d'assurage de longueur  $L$  maintient la corde en imposant une pression  $p$  homogène autour de la corde, soumise au poids du grimpeur. Le coefficient de frottement entre ce système d'assurage et la corde est noté  $\mu$ . Ecrire la condition sur la pression  $p$  pour que le système soit à l'équilibre en fonction de  $L, F, r_{\text{ext}}$  et  $\mu$ . ( /1)



## Formulaire (coordonnées cylindriques)

$$\underline{\text{div}} \underline{T} = \left( \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \right) \underline{e}_r + \left( \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{\theta r} + T_{r\theta}) + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \right) \underline{e}_\theta + \left( \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{zr} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \underline{e}_z$$

$$\text{div} \underline{T} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r T_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T_z}{\partial z}$$

$$\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{T} = \frac{\partial T_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \frac{\partial T_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \frac{\partial T_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

$$\text{Loi de Hooke en élasticité linéaire isotrope : } \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \end{cases}$$