

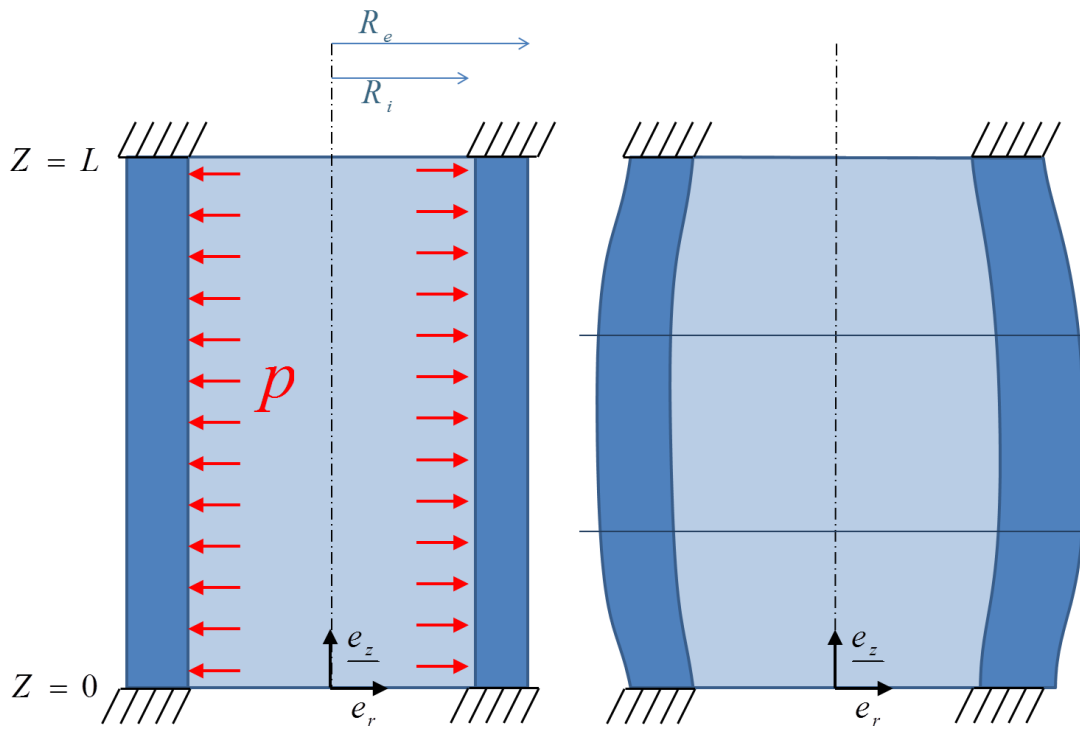
Mécanique des Milieux Continus (MMC)

Sujet de janvier 2018 - 2h – aucun document autorisé

Vous pouvez utiliser au choix les notations **indicielles**, **matricielles** ou **tensorielles**.

Problème #1 : Artère soumise à la pression sanguine (/15)

On considère un segment de paroi artérielle cylindrique d'une longueur L soumise à une pression interne de pression maximale p . Les rayons internes et externes de cette paroi sont notés respectivement R_i et R_e . On cherche à reproduire cet état mécanique en laboratoire, en imposant une pression constante p par l'intermédiaire d'un fluide sous pression tout en fixant complètement (=encastrement) les deux extrémités inférieure et supérieure du segment artériel. Dans tout le problème, on fera l'hypothèse que les forces de volume et l'accélération sont négligées.



1. Exprimer les **conditions aux limites** sur les surfaces intérieure et extérieure de l'échantillon. (/2)

2. Exprimer les **conditions aux limites** sur les surfaces inférieure et supérieure (encastrées). (/1)

3. On considère que sous l'application de la pression, **dans le tiers central** de l'échantillon, le champ de déplacement est indépendant de z et on a par conséquent $\underline{u}(r, \theta, z) = u_r(r) \underline{e}_r$. **Justifier** cette hypothèse par des considérations physiques. (/1)

4. Pour ce champ de déplacement, calculer le **tenseur gradient de la transformation**. (/2)

5. Les matériaux qui constituent les tissus biologiques sont essentiellement constitués d'eau, et par conséquent très peu compressibles. On fait donc l'hypothèse qu'il n'y a **aucune variation de volume** durant la transformation. Déterminer l'équation qui doit alors être satisfaite par $u_r(r, z)$. (/1)

5. On se place désormais dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, qui peut être considérée comme acceptable tant que la pression appliquée est petite. Calculer dans ce cas le **tenseur des déformations linéarisé**. (/1)

6. En général, à quelle condition peut-on appliquer la **loi de Hooke** ?

(/1)

7. On considère que cette condition est remplie. Calculer le tenseur des **contraintes de Cauchy**. (/1)

8. En considérant **l'équilibre** du milieu, montrer que le champ de déplacements doit satisfaire

l'équation différentielle $r^2 u_r'' + r u_r' - u_r = 0$ avec $u_r' = \frac{du_r}{dr}$ (/2)

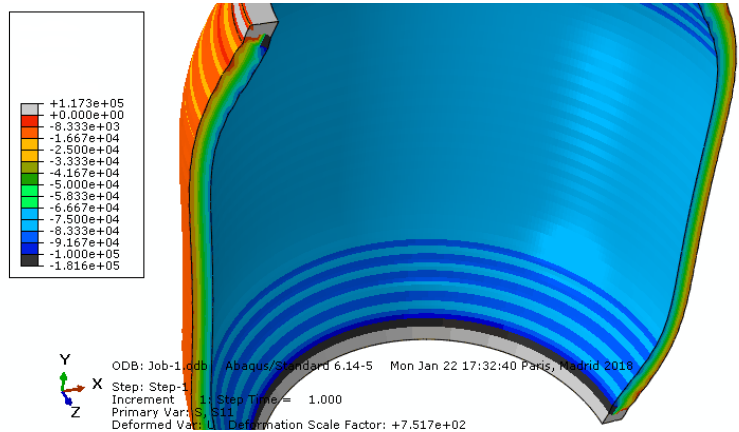
9. Un champ de déplacement de la forme $u_r = Ar + B/r$ est solution de l'équation précédente. Ecrire les **conditions** permettant de trouver les constantes A et B (sans faire les calculs) (/1)

10. Compléter les légendes suivantes, dans lesquelles il manque la **quantité** représentée et l'**unité**. (/2)

Choix possibles pour la quantité : u_r , u_z , u_θ , $\sigma_{r\theta}$, σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$

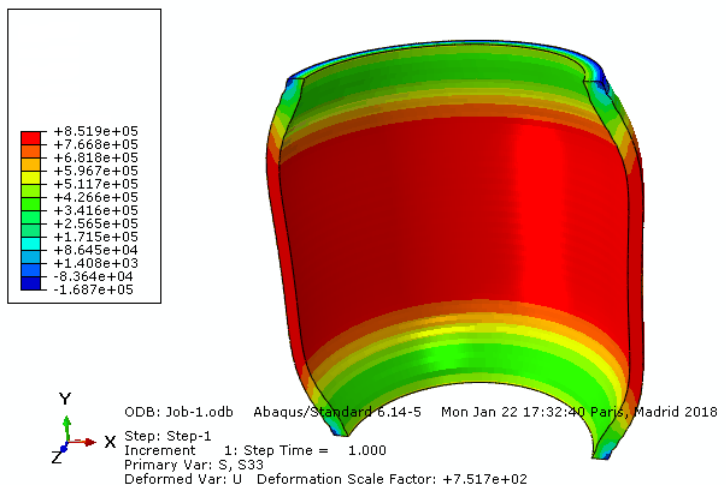
Quantité :

Unité :

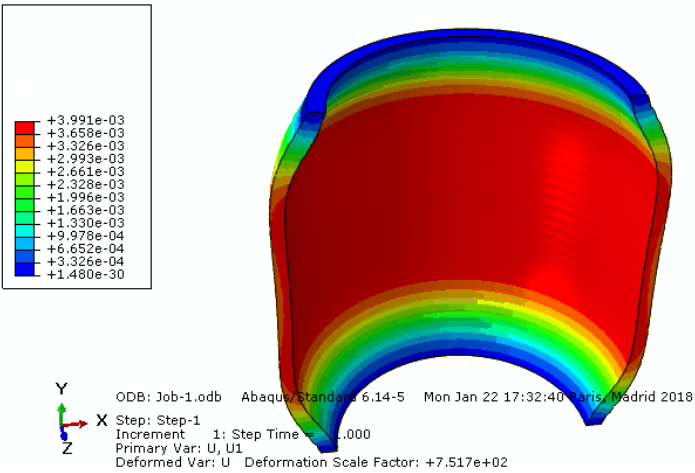


Quantité :

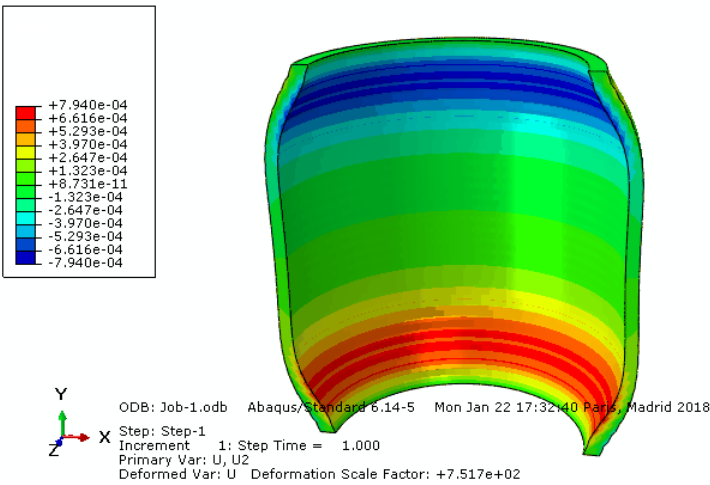
Unité :



Quantité :
Unité :

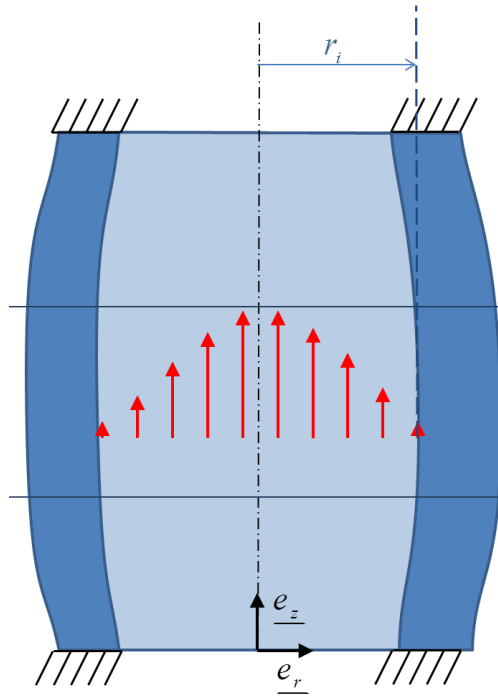


Quantité :
Unité :



Problème #2 : Artère soumise à la pression sanguine et à une circulation de fluide (/5)

On maintient l'essai précédent, en faisant **dorénavant circuler un fluide newtonien** permettant de mettre l'artère sous pression. On considère l'écoulement établi.



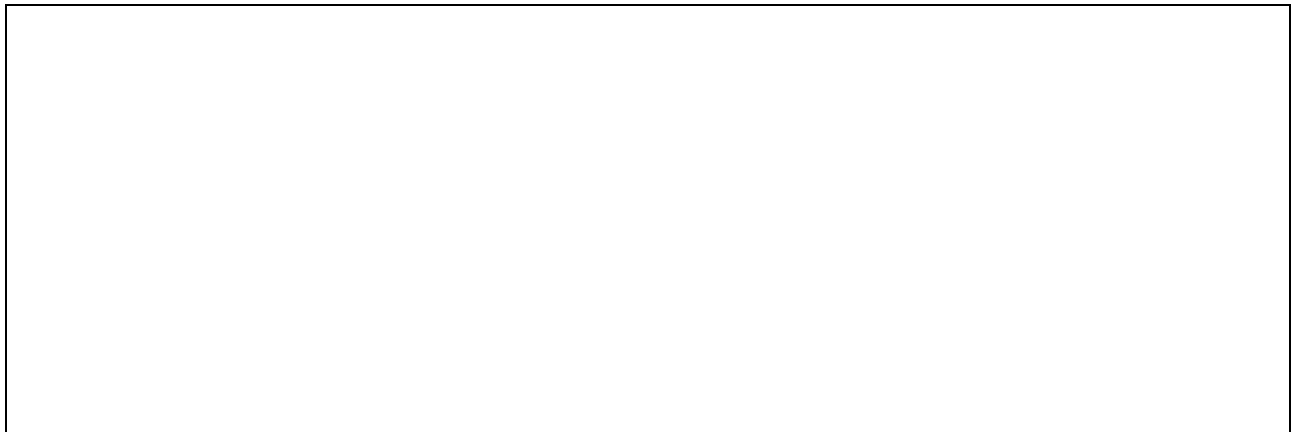
10. On considère que les champs de pression et de vitesse sont de la forme $p = p(r, z)$ et $\underline{v} = v_z(r)\underline{e}_z$ respectivement. A l'aide de **l'équation de Navier-Stokes**, écrire les équations différentielles qui régissent le champ de pression $p = p(r, z)$ et de vitesse $\underline{v} = v_z(r)\underline{e}_z$ dans le tiers central de l'échantillon. (/2)



10. On considère que le champ de vitesse à l'intérieur de ce fluide est de la forme suivante (écoulement de **Poiseuille** en régime établi):

$$\underline{v}(r, \theta, z, t) = v_z(r) \underline{e}_z = v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{r_i^2} \right) \underline{e}_z$$

Dans cette équation, on note r_i le rayon interne du segment artériel dans le tiers central de l'échantillon. Vérifier qu'un tel écoulement est **incompressible**, et que la vitesse du fluide est nulle en contact avec la paroi artérielle. (1)



11. Calculer le tenseur **taux de déformation** correspondant à ce champ de vitesses

(/1)

12. En considérant que le fluide est newtonien avec une viscosité μ , déduire de la question qui précède la **contrainte** $\underline{\underline{\sigma}}$ qui s'exerce **au niveau de la paroi interne** de l'artère lors de l'écoulement. (/1)

Conclusion (pour info)

On vient globalement d'estimer les contraintes auxquelles sont soumises les cellules qui tapissent la paroi interne d'une artère, qui s'écrivent sous la forme :

$$\left[\underline{\underline{\sigma}} \right] = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \tau \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \tau & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

où les différentes composantes ont été calculées précédemment. Ceci peut permettre notamment de mieux comprendre l'environnement dans lesquelles ces cellules évoluent, et donc de faire des hypothèses sur les mécanismes qui mènent à la thrombose artérielle (obstruction de l'artère).

Formulaire (coordonnées cylindriques)

En coordonnées cylindriques :

→ divergence d'un champ de vecteurs

$$\text{Div } \underline{T} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rT_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T_z}{\partial z}$$

→ divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2 symétrique:

$$\begin{aligned} \underline{\text{Div}} \underline{T} = & \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \right) \underline{e}_r + \\ & \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{\theta r} + T_{r\theta}) + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \right) \underline{e}_\theta + \\ & \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{zr} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \underline{e}_z \end{aligned}$$

→ gradient d'un champ de scalaires

$$\underline{\text{Grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \underline{e}_z$$

→ gradient d'un champ de vecteurs

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{T} = & \frac{\partial T_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial T_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial T_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

Loi de comportement pour un solide élastique linéaire isotrope :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{I} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{I}$$

Loi de comportement pour un fluide newtonien :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{I} + 2\mu \underline{d}$$

Equation de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\underline{\text{grad}}}(p) + \mu \underline{\Delta} \underline{v} + \rho \underline{g}$$