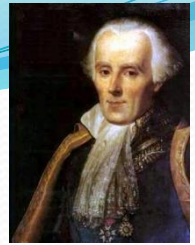


Filtrage



Filtrage des signaux analogiques

Transformation de Laplace



La transformée de Fourier de $s(t)$ qui a pour expression : $S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$

- est une transformation adaptée aux régimes harmoniques
- n'existe que si cette intégrale est convergente et que la fonction est intégrable dans L^2 .

Dans le cas contraire, on peut forcer cette intégrale en la modifiant à devenir convergente en multipliant $s(t)$ par $e^{-\sigma t}$ avec $\sigma > 0$

σ : est appelé rayon de convergence.

On définit alors la fréquence complexe 'p' telle que : $p = \sigma + j2\pi f$ et $\omega = 2\pi f$

Les signaux physiques satisfont le principe de causalité:

→ Ils ne peuvent pas exister avant la cause qui leur a donné naissance

→ Ils commencent à un instant déterminé, souvent, on choisit cet instant comme origine des temps x ($t < 0$) = 0

On peut définir alors la Transformée de Laplace de $x(t)$:

$$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt$$

Filtrage des signaux analogiques

Transformation de Laplace

Lorsqu'un signal est causal et à énergie finie, la transformée de Fourier et la transformée de Laplace coïncident (en régime harmonique et permanent):

$$X(\omega)=TF(x(t)) \text{ si } x(t<0)=0$$

La modélisation d'un signal déterministe est rendue causale par l'échelon unité d'Heaviside $u(t)$ tel que :

$$x_c(t)=u(t).x(t)$$

$$u(t)=1 \text{ pour } t \geq 0$$

$$u(t)=0 \text{ pour } t < 0$$

La transformée de Fourier permet l'étude des régimes harmoniques

La transformée de Laplace est un outil important dans l'étude des régimes transitoires et particulièrement pour l'étude de la réponse impulsionnelle des filtres.

Évaluer une fonction de Laplace en 'p' en remplaçant 'p' par 'j ω ' correspond à prendre sa réponse fréquentielle dite aussi « **réponse harmonique** »

Propriétés de la Transformée de Laplace

Pour une fonction $s(t)$ tel que $s(t)=0$ pour $t<0$ alors: $S(f)=L(s(t))_{p=j2\pi f}$

Linéarité	$ax(t)+by(t)$	$aX(p)+bY(p)$
Homothétie	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X(\frac{p}{a})$ avec $a \in \mathbb{R}$
Translation	$x(t-\tau)$	$X(p)e^{-p\tau}$
Dérivation	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$p^n X(p) - \left[p^{n-1}x(0) + \sum_{i=2}^n p^{n-i} \left(\frac{d^{i-1}x(t)}{dt^{i-1}} \right)_{t=0+} \right]$
Intégration	$\int_0^t x(t)dt$	$\frac{1}{p}X(p)$
Transformée d'une fonction périodique	$x(t)$ de période T	$\frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T x(t).e^{-pt}dt$
Convolution	$x(t)*y(t)$	$X(p).Y(p)$
	$x(t).y(t)$	$X(p)*Y(p)$

Transformée de Laplace

Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

$$x(0)=\lim_{p \rightarrow \infty} [p.X(p)]$$

$$x(\infty)=\lim_{p \rightarrow 0} [p.X(p)]$$

Exemples de transformées de Laplace :

$$e^{at} \rightarrow \frac{1}{p-a}$$

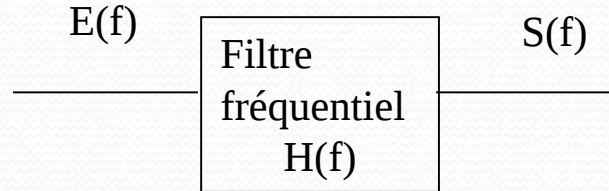
$$\sin(at) \rightarrow \frac{a}{p^2-a^2}$$

$$\cos(at) \rightarrow \frac{p}{p^2-a^2}$$

Filtrage

Un filtre fréquentiel est un dispositif de traitement du signal destiné à modifier le spectre d'un signal d'entrée,

- soit en atténuant certaines zones du spectre
- soit en amplifiant sélectivement d'autres zones.



$$\sum_m a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} = \sum_n b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} \Leftrightarrow \sum_m a_m p^m E(p) = \sum_n b_n p^n S(p)$$

Le filtre linéaire et invariant par translation est défini par:

- sa réponse impulsionnelle $h(t)$
- ou sa fonction de transfert $H(j\omega)$ transformée de Fourier en régime harmonique
- ou de $H(p)$ transformée de Laplace de $h(t)$ → études des régimes transitoires

Filtre Linéaire = Système Linéaire et invariant par translation

$$\sum_m a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} = \sum_n b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} \Leftrightarrow \sum_m a_m p^m E(p) = \sum_n b_n p^n S(p)$$

La réponse $s(t)$ d'un tel filtre à un signal d'entrée $e(t)$ est donnée par

En temporel : $s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau$

En régime harmonique par : $S(f) = E(f) \cdot H(f)$

En régime harmonique et transitoire : $S(p) = E(p) \cdot H(p)$

Pour être réalisable un filtre analogique doit être causal

→ sa réponse impulsionnelle doit être causale et réelle.

→ sa fonction de transfert est complexe et à symétrie hermitique :

$$h(t) = h^*(t); \quad H(-\omega) = H^*(\omega) \rightarrow |H(\omega)|^2 = H(\omega) H(-\omega)$$

Le module de $H(j\omega)$ doit vérifier la relation de Paley-Wiener

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |H(\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < +\infty$$

Mise en cascade de plusieurs filtres

Soit n filtres caractérisés par leur réponse impulsionnelle $h_i(t)$ et leur fonction de transfert $H_i(p)$ en cascade, la réponse impulsionnelle globale peut être fournie par :

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) * h_3(t) \dots * h_n(t)$$

La fonction de transfert du système est souvent beaucoup plus facile à calculer :

$$H(p) = \prod_{i=1}^n H_i(p)$$

Remarque : Cette formule ne peut s'appliquer que si la structure du filtre i ne produit aucune influence sur les filtres $i-1$ et $i+1$
→ si les impédances d'entrées des filtres (quadripôles) sont infinies et leurs impédances de sortie nulles

Décomposition en éléments simples

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i (p)^i}{\sum_{j=0}^n b_j (p)^j} \quad \text{'n' est appelé ordre du système}$$

Tous les polynômes à coefficients réels peuvent être factorisés en un produit de polynômes du premier ordre (à racines réelles) et du deuxième ordre (à racines complexes conjuguées).

La fonction de transfert générale d'un système sous la forme dite 'de Laplace' se présente de la manière suivante:

$$H(p) = \frac{c_m (p - z_1)(p - z_2)(p - z_3) \cdots (p - z_m)}{d_n (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3) \cdots (p - p_n)}$$

La fonction de transfert peut se mettre sous la forme: $H(p) = |H(p)| e^{j \arg(H(p))}$

$$|H(p)| = \left| \frac{c_m}{d_n} \right| \frac{\prod_k |p - z_k|}{\prod_l |p - p_l|} \quad \text{Et} \quad \arg(H(p)) = \sum_m \arg((p - z_k)) - \sum_n \arg((p - p_k))$$

Filtrage et Stabilité

Un filtre est dit 'stable' si à tout signal d'entrée borné correspond un signal de sortie lui même borné

Un filtre étant un système convolutif, il en résulte que la stabilité sera assurée si la réponse impulsionnelle du filtre est absolument intégrable c'est à dire si :

$$\int_0^{+\infty} |h(t)| dt \text{ existe}$$

Remarque : Il existe d'autres critères de stabilité : stabilité asymptotique ou la stabilité au sens de Lyapounov....

La condition précédente peut être remplacée par une autre portant sur les pôles de la fonction de transfert.

Supposons que $H(p)$ ne possède que des pôles simples $p_1, p_2, \dots, p_n$

Si on décompose $H(p)$ en éléments simples puis que l'on calcule $h(t)$ on obtient une expression de la forme:

$$H(p) = \prod_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{p - \beta_k} \xrightarrow{\text{Transformée Laplace inverse}} h(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\beta_k t}$$

Pour que la stabilité soit assurée il faut que tous les termes exponentiels soient décroissants
→ les pôles doivent posséder une partie réelle négative ie $\beta_k < 0$ (plan gauche du plan complexe) { polynôme de Hurwitz)

Filtrage et Stabilité

Un filtre est dit 'stable' si à tout signal d'entrée borné correspond un signal de sortie lui même borné

$$\int_0^{+\infty} |h(t)| dt \text{ existe}$$

La condition précédente peut être remplacée par une autre portant sur les pôles de la fonction de transfert.

Supposons que $H(p)$ ne possède que des pôles simples $p_1, p_2, \dots, p_n$

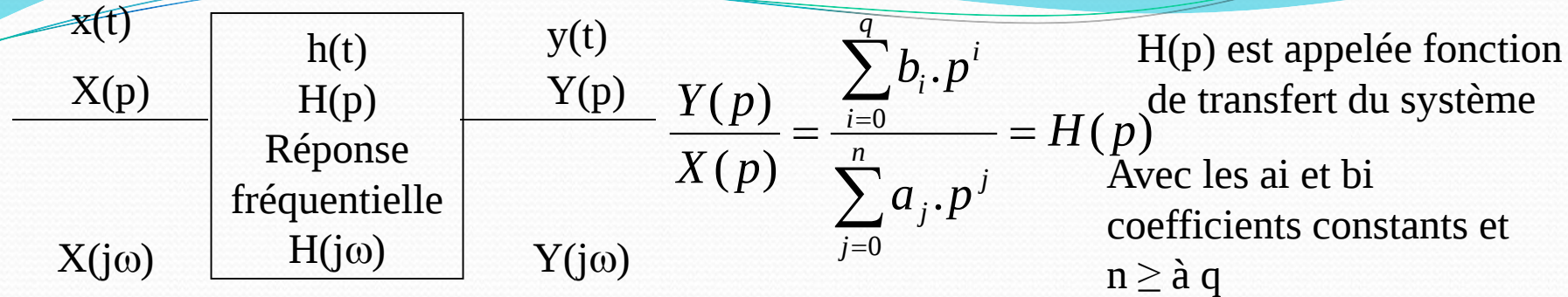
Si on décompose $H(p)$ en éléments simples puis que l'on calcule $h(t)$ on obtient une expression de la forme:

$$H(p) = \prod_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{p - \beta_k} \xrightarrow{\text{Transformée Laplace inverse}} h(t) = \prod_{k=1}^n \alpha_k e^{\beta_k t}$$

Pour que la stabilité soit assurée il faut que tous les termes exponentiels soient décroissants

→ les pôles doivent posséder une partie réelle négative ie $\beta_k < 0$ (plan gauche du plan complexe) { polynôme de Hurwitz)

Fonction de transfert d'un filtre



Toutes fonctions de transfert de filtres réalisables d'ordre n peuvent se mettre sous la forme:

$$H(p) = K_1 \frac{(p-z_1)(p-z_2) \cdots (p-z_q)}{(p-p_1)(p-p_2) \cdots (p-p_n)}$$

- Les z_i sont les zéros de $H(p)$
- Les p_i sont les pôles de $H(p)$

La réponse en amplitude

Électronique

$$G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$$

Automatique

$$G = \log |H(j\omega)|$$

L'échelle des fréquences $f = \frac{\omega}{2\pi}$ est présentée en échelle logarithmique $\text{Log}(f)$

La réponse en phase

$$\varphi = \arg(H(j\omega))$$

Fonction de transfert d'un filtre

$$H(p) = K_1 \frac{(p-z_1)(p-z_2) \cdots (p-z_q)}{(p-p_1)(p-p_2) \cdots (p-p_n)}$$

Si les pôles et les zéros sont réels

→ En régime harmonique, la fonction de transfert peut se mettre sous cette forme:

$$H(j\omega) = K \frac{(1-j\frac{\omega}{\omega_{z1}})(1-j\frac{\omega}{\omega_{z2}}) \cdots (1-j\frac{\omega}{\omega_{zq}})}{(1-j\frac{\omega}{\omega_{p1}})(1-j\frac{\omega}{\omega_{p2}}) \cdots (1-j\frac{\omega}{\omega_{pn}})}$$

avec $\omega_{p1} < \omega_{p2} < \omega_{pn}$ et $\omega_{pn} < \omega_{z1} < \omega_{z2} < \omega_{zq}$

$$\begin{aligned} \text{Log}|H(j\omega)| &= \text{Log} \left| K \frac{(1-j\frac{\omega}{\omega_{z1}})(1-j\frac{\omega}{\omega_{z2}}) \cdots (1-j\frac{\omega}{\omega_{zq}})}{(1-j\frac{\omega}{\omega_{p1}})(1-j\frac{\omega}{\omega_{p2}}) \cdots (1-j\frac{\omega}{\omega_{pn}})} \right| \\ \text{Log}|H(j\omega)| &= \text{Log} K + \sum_{j=1}^q \text{Log} \left| 1-j\frac{\omega}{\omega_{zj}} \right| - \sum_{i=1}^n \text{Log} \left| 1-j\frac{\omega}{\omega_{pi}} \right| \end{aligned}$$

K est appelé gain statique ($f=\omega=0$)

Fonction de transfert d'un filtre

Diagramme de Bode

$$H(j\omega) = K \frac{(1 - j\frac{\omega}{\omega_{z1}})(1 - j\frac{\omega}{\omega_{z2}}) \cdots (1 - j\frac{\omega}{\omega_{zq}})}{(1 - j\frac{\omega}{\omega_{p1}})(1 - j\frac{\omega}{\omega_{p2}}) \cdots (1 - j\frac{\omega}{\omega_{pn}})}$$

$$\text{Log}|H(j\omega)| = \text{Log}K + \sum_{j=1}^q \text{Log}\left|1 - j\frac{\omega}{\omega_{zj}}\right| - \sum_{i=1}^n \text{Log}\left|1 - j\frac{\omega}{\omega_{pi}}\right|$$

Le diagramme de Bode = représentation du module et de la phase de $H(j\omega)$ en fonction de $\text{Log}\omega$

Le diagramme asymptotique:

Dans la bande passante: $f \rightarrow 0$ $\text{Log}|H(j\omega)| = \text{Log}K$ $\phi(H(0)) = 0$

On considère que pour les fréquences telles que: $f < f_{zj}$ ou $f < f_{pi}$

$$\text{Log}\left|1 - j\frac{\omega}{\omega_{pi}}\right| \approx \text{Log}|1| = 0$$

Dans la bande coupée: pour $f \geq f_{pi}$

$$\text{Log}\left|1 - j\frac{\omega}{\omega_{pi}}\right| \approx \text{Log}\left|j\frac{\omega}{\omega_{pi}}\right| = \text{Log}\left(\frac{\omega}{\omega_{pi}}\right) \quad \phi(H(j\omega_{pi})) = \frac{\pi}{2}$$

Fonction de transfert d'un filtre

Diagramme de Bode

$$\text{Log}|H(j\omega)| = \text{Log}K + \sum_{j=1}^q \text{Log}\left|1 - j\frac{\omega}{\omega_{zj}}\right| - \sum_{i=1}^n \text{Log}\left|1 - j\frac{\omega}{\omega_{pi}}\right|$$

avec $\omega_{p1} < \omega_{p2} \dots < \omega_{pn} < \omega_{z1} < \omega_{z2} \dots < \omega_{zq}$

$$f \in [0, f_{p1}] \Rightarrow \text{Log}|H(j\omega)| = \text{Log}K \quad \phi(H(0)) = 0$$

$$f \in]f_{p1}, f_{p2}] \Rightarrow \text{Log}|H(j\omega)| = \text{Log}K - \text{Log}\left(\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right) \quad \phi(H(j\omega_{pi})) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f \in]f_{p2}, f_{p3}] \Rightarrow \text{Log}|H(j\omega)| = \text{Log}K - \text{Log}\left(\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right) - \text{Log}\left(\frac{\omega}{\omega_{p2}}\right)$$

$$\phi(H(j\omega_{pi})) = -\pi$$

Etc...

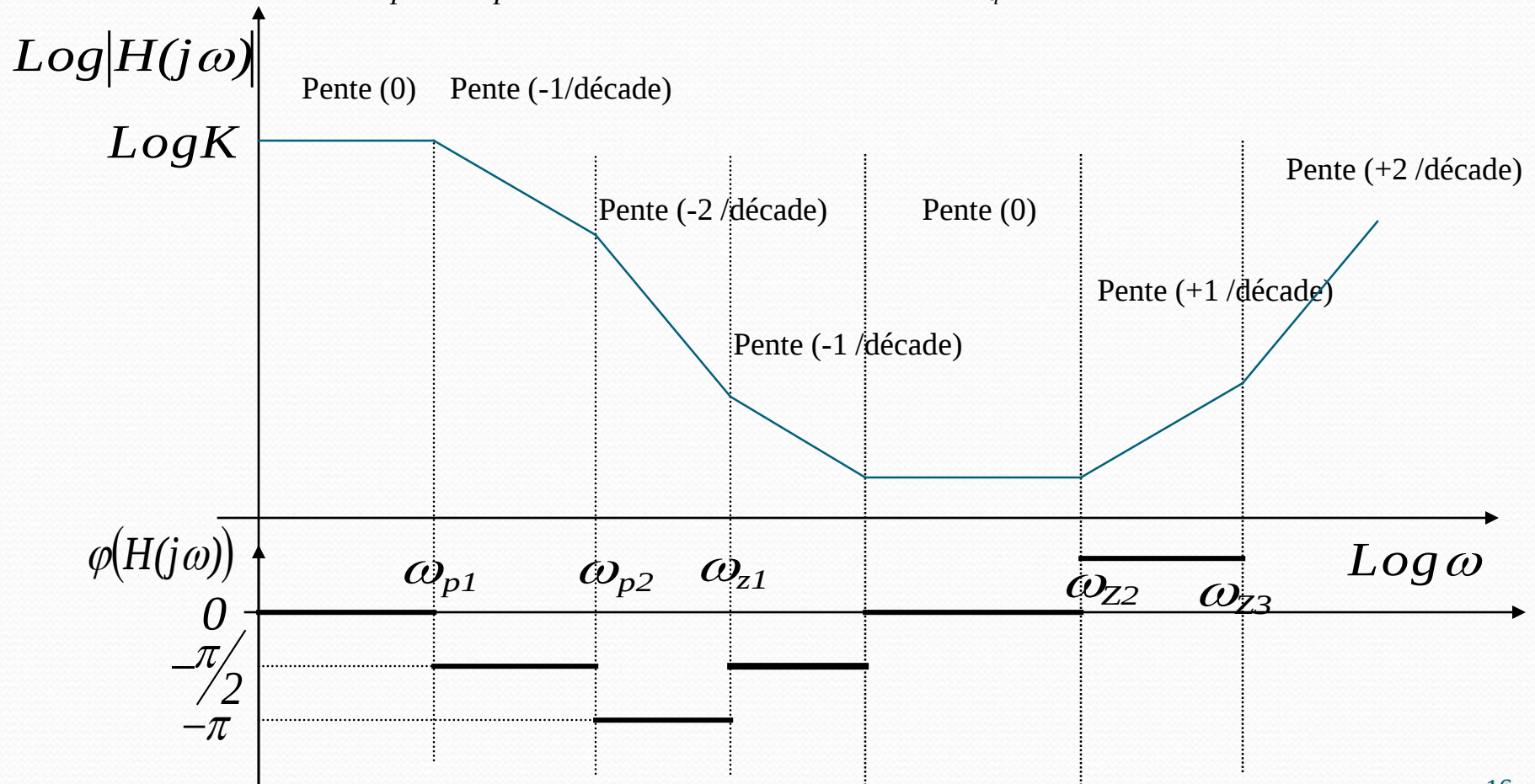
Fonction de transfert d'un filtre

Diagramme de Bode

$$\text{Log}|H(j\omega)| = \text{Log}K + \sum_{j=1}^q \text{Log}\left|1 - j\frac{\omega}{\omega_{zj}}\right| - \sum_{i=1}^n \text{Log}\left|1 - j\frac{\omega}{\omega_{pi}}\right|$$

avec

$$\omega_{p1} < \omega_{p2} \dots < \omega_{pn} < \omega_{z1} < \omega_{z2} \dots < \omega_{zq}$$



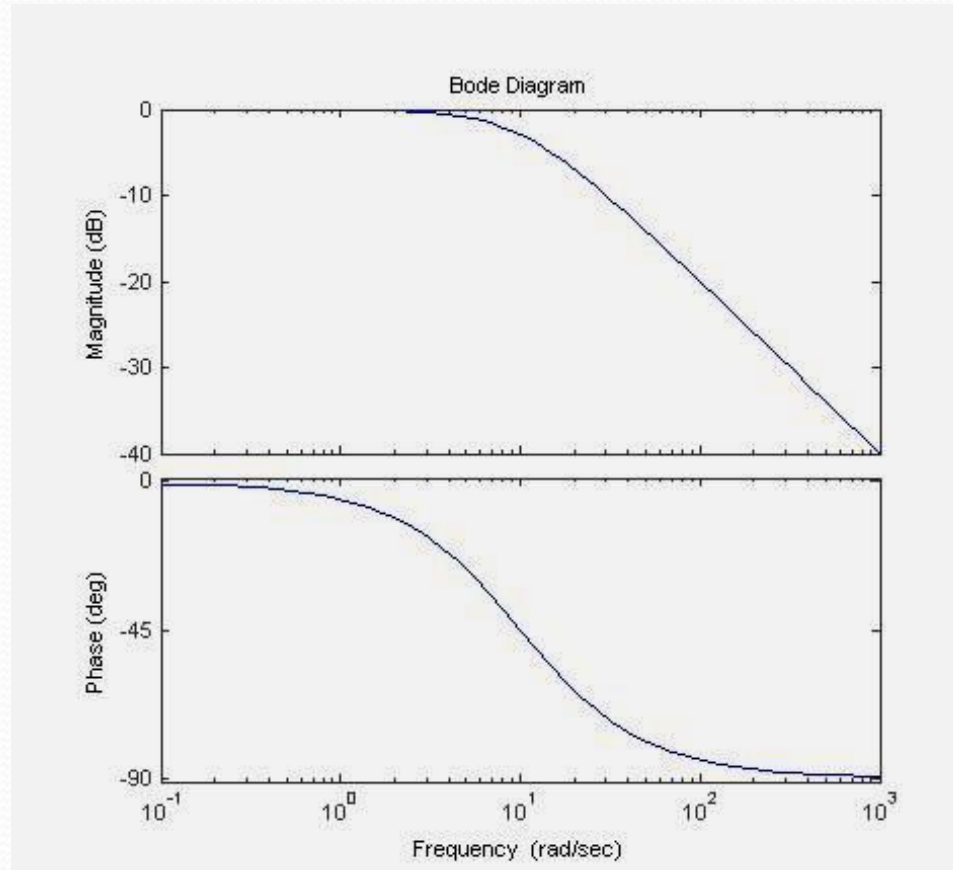
Fonction de transfert d'un filtre

Diagramme de Bode

Pour le module de la fonction de transfert

→ la pente de l'asymptote générée par un polynôme simple au dénominateur (pôle) est donc de -1 /décade ou -20dB/décade et le déphasage est de $-\pi/2$

→ la pente de l'asymptote générée par un polynôme simple au numérateur (zéros) est donc de $+1$ /décade ou $+20\text{dB/décade}$ et le déphasage est de $+\pi/2$



Filtre du 1^{er} ordre : n=1

Fonction de transfert :

$$\frac{y}{x} = \frac{\sum_{i=0}^q b_i \cdot p^i}{\sum_{j=0}^1 a_j \cdot p^j} = H(p) \text{ avec } q \leq 1$$

1er ordre Passe bas

En régime Harmonique :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{K}{1 + j\omega\tau_0} \text{ avec } \tau_0 = \frac{1}{\omega_0}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega\tau_0)^2}} \text{ avec } \varphi = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0}$$

Pour le diagramme de Bode :

$$G = 20 \text{Log} |H(j\omega)| = 20 \text{Log} \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

et $\varphi = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0}$

Filtre du 1^{er} ordre passe bas: n=1

BODE

$$G=20\text{Log}|H(j\omega)|=20\text{Log}\frac{K}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Diagramme asymptotique

Si $\omega \ll \omega_0$ $G \approx 20\text{Log}K \rightarrow$ La courbe admet une asymptote horizontale d'ordonnée $20 \text{ Log } K$

Lorsque $\omega \gg \omega_0 \rightarrow G \approx 20\text{Log}K - 20\text{Log}\frac{\omega}{\omega_0}$

Pente

$$\omega_1 \quad G1 \approx 20\text{Log}K - 20\text{Log}\frac{\omega_1}{\omega_0}$$

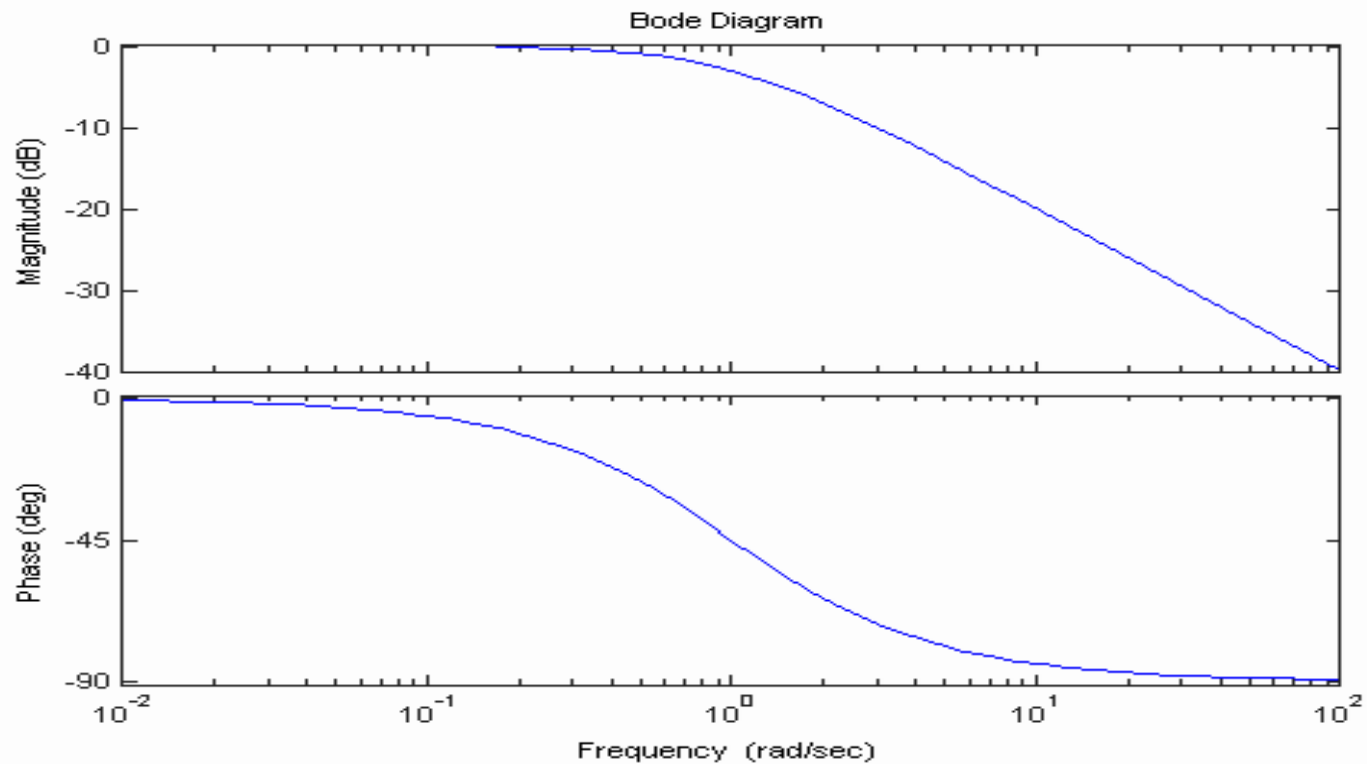
$$\omega_2 = 10\omega_1 \quad G2 \approx 20\text{Log}K - 20\text{Log}\frac{10\omega_1}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow \text{Pente en dB/décade} = \frac{G2 - G1}{\text{Log}10\omega_1 - \text{Log}\omega_1} = G2 - G1 = -20\text{Log}10 = -20\text{dB/décade}$$

Filtre du 1^{er} ordre Passe Bas : $n=1$

BODE

$K=1$ et $\omega_0=1\text{rad/s}$ et $\tau_0=1\text{s}$



Réponse d'un filtre du 1^{er} ordre à une entrée $x(t)$ connue

Réponse temporelle

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{K}{1 + j\omega\tau_o} \text{ avec } \tau_o = \frac{1}{\omega_0}$$

Si l'entrée n'est pas en régime harmonique $\rightarrow$ étude du régime transitoire

$$H(p) = \frac{K}{1 + p\tau_o} = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

Réponse impulsionnelle: $x(t) \rightarrow \delta(t)$

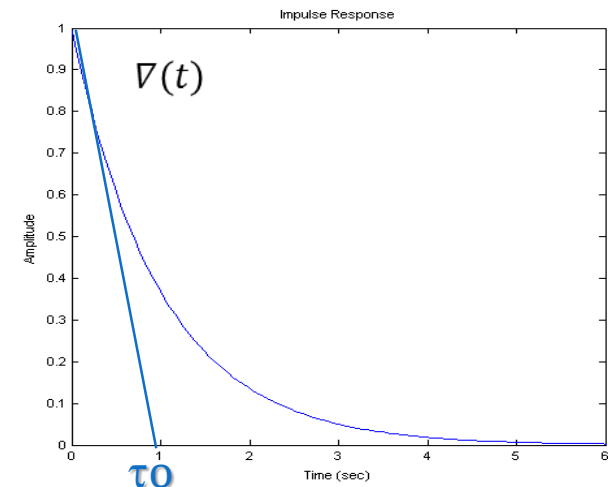
- Soit résoudre l'équation différentielle $y(t) + \tau_o \frac{dy(t)}{dt} = Kx(t)$

Soit passer par la transformée inverse de Laplace

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = \delta(t) \xLeftrightarrow{TL} X(p) = 1 \\ e^{-\alpha t} \xLeftrightarrow{TL} \frac{1}{p + \alpha} \end{array} \right\} \begin{array}{l} Y(p) = \frac{K}{1 + p\tau_o} \\ y(t) = \frac{K}{\tau_o} e^{-\frac{t}{\tau_o}} \end{array}$$

Équation de la tangente à l'origine:

$$\nabla(t) = \frac{K}{\tau} - \frac{K}{\tau^2} t$$

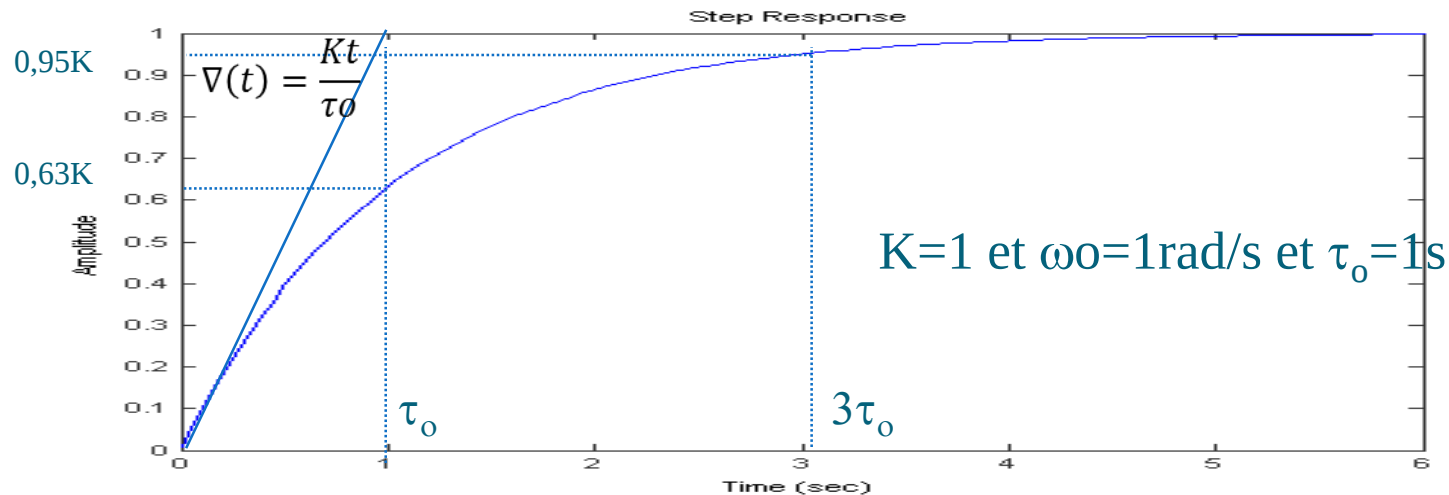


$K=1$ et $\omega_0=1\text{rad/s}$ et $\tau_o=1\text{s}$

Réponse d'un filtre du 1^{er} ordre à une entrée x(t) connue

Réponse indicielle: $x(t) \rightarrow u(t)$ = échelon

$$\left. \begin{array}{l} x(t)=u(t) \xLeftrightarrow{\text{TL}} X(p)=\frac{1}{p} \\ e^{-\alpha t} \xLeftrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{p+\alpha} \end{array} \right\} \begin{array}{l} y(p)=\frac{K}{p(1+\tau_0 p)}=\frac{K}{p}-\frac{K\tau_0}{1+\tau_0 p} \\ y(t)=K(1-e^{-\frac{t}{\tau_0}}) \end{array}$$

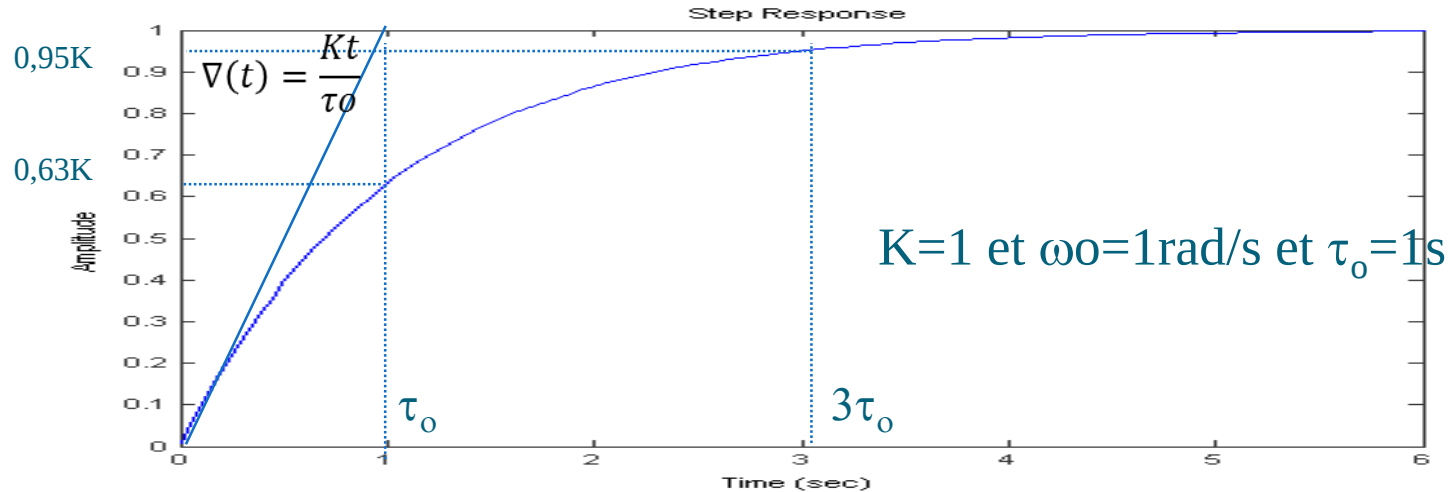


Pente à l'origine : $y'(0_+) = \frac{K}{\tau_0}$ à $t=\tau_0 \rightarrow 63\%$ de l'échelon est atteint

$\rightarrow$ C'est une méthode d'identification d'un 1er ordre

Réponse d'un filtre du 1^{er} ordre à une entrée $x(t)$ connue

Réponse indicielle: $x(t) \rightarrow u(t)=\text{échelon}$



à $t=\tau_0 \rightarrow 63\%$ de l'échelon est atteint

On note le temps de réponse à 5% : $tr = -\ln(0,05)\tau_0 \sim 3\tau_0$

Filtre du 2^{me} ordre : n=2

Fonction de transfert d'un filtre de 2nd ordre

$$\frac{Y}{X} = \frac{\sum_{i=0}^2 b_i \cdot p^i}{\sum_{j=0}^2 a_j \cdot p^j} = H(p) = \frac{b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2}{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}$$

b0	b1	b2	Coefficients Numérateur
b0	0	0	Passe Bas
0	0	b2	Passe Haut
0	b1	0	Passe Bande

Filtre passe bas de second ordre

Toute fonction de transfert d'un filtre polynomial passe bas de second ordre peut se mettre sous la forme:

$$H(p) = \frac{K}{1 + 2\xi \cdot \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

ω_0 est la pulsation propre

ξ est le coefficient d'amortissement

K le gain statique

On appelle Q coefficient de qualité tel que : $Q = \frac{1}{2\xi}$.

Décomposition en éléments simples de $H(p)$: Le dénominateur est un polynôme du second degré en p ($j\omega$) $\rightarrow$ en régime harmonique trois cas se présentent selon le discriminant:

$$\Delta = \frac{4\xi^2}{\omega_0^2} - \frac{4}{\omega_0^2} = \frac{4}{\omega_0^2}(\xi^2 - 1)$$

1. $\xi > 1 \rightarrow 2$ pôles réels négatifs
2. $\xi = 1 \rightarrow 1$ pôle double réel négatif
3. $\xi < 1 \rightarrow 2$ pôles complexes conjugués à partie réelle < 0

$$\Delta = \frac{4}{\omega_0^2}(\xi^2 - 1)$$

Filtre passe bas de second ordre

Transfert

1^{er} cas : $\xi > 1$ régime apériodique

Le dénominateur possède 2 racines réelles. La fonction de transfert est alors décomposable en deux facteurs du premier ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = K \frac{1}{1 + \tau_1 p} \cdot \frac{1}{1 + \tau_2 p}$$

En régime harmonique:
$$H(j\omega) = K \frac{1}{1 + \tau_1 j\omega} \cdot \frac{1}{1 + \tau_2 j\omega} = K \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_2}}$$

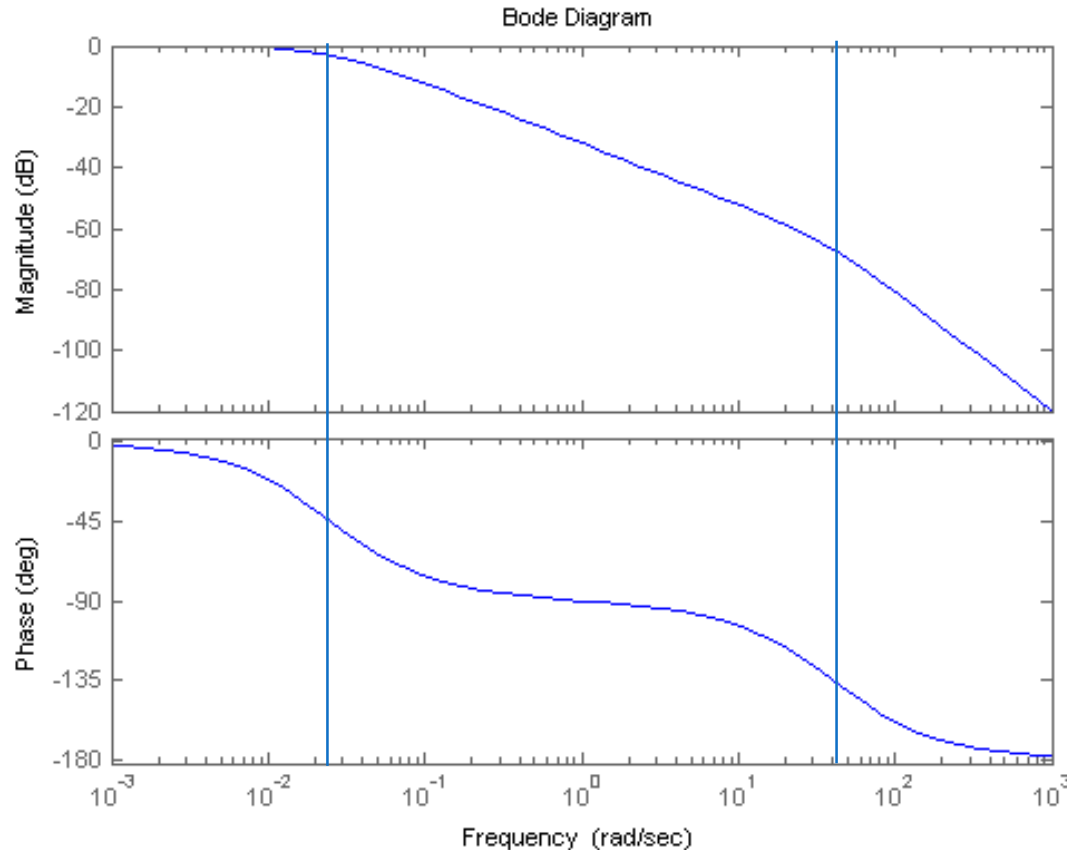
avec $\omega_1 = \omega_0 \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$ et $\omega_2 = \omega_0 \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$

Remarque : $\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$ et pour $\omega = \omega_0$ $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Filtre passe bas de second ordre à pôles réels

$K=1$ et $\omega_0=1\text{rad/s}$ et $\xi=20$

→ $\omega_1=0.025\text{rad/s}$ et $\omega_2=40\text{rad/s}$



→ Cela revient à la mise en cascade de 2 filtres du 1^{er} ordre

Filtre passe bas de second ordre à pôles complexes conjugués

2^{eme} cas : $\xi < 1$ système à faible amortissement –régime oscillant
Le dénominateur possède 2 racines complexes conjugués.

$$\Delta = \frac{4}{\omega_0^2}(\xi^2 - 1)$$

$$\Delta = \frac{4\xi^2}{\omega_0^2} - \frac{4}{\omega_0^2} = \frac{4}{\omega_0^2}(\xi^2 - 1)$$

$$p = \xi \omega_0 \pm j \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

La fonction de transfert est:

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\varphi(j\omega) = -\text{artg} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$$

Filtre passe bas de second ordre

$$|H(p)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad \varphi = -\operatorname{artg} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$$

Diagramme asymptotique

Si $\omega \ll \omega_0$ $G \approx 20 \operatorname{Log} K \rightarrow$ La courbe admet une asymptote horizontale d'ordonnée $20 \operatorname{Log} K$

Asymptote oblique: Pente avec $\omega_0 \ll \omega_1$ et on pose $\omega_2 = 10\omega_1$

$$\frac{G(\omega_2) - G(\omega_1)}{\operatorname{Log} \omega_2 - \operatorname{Log} \omega_1} = 20 \operatorname{Log} \frac{K}{\left(10 \frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2} - 20 \operatorname{Log} \frac{K}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2} = -20 \operatorname{Log} 100 = -40 \operatorname{dB} / \text{décade}$$

Généralisation : *Pente $\approx -20.n \operatorname{dB} / \text{décade}$*

avec $n = \text{ordre du filtre}$

Filtre passe bas de second ordre

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_o^2}}}$$

$$\frac{d|H(p)|}{d\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)} = 2K \frac{\omega}{\omega_o} \frac{2\xi^2 - 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_o^2}\right]^{3/2}}$$

En dehors de $\omega=0$ la dérivée ne peut s'annuler que si

$$2\xi^2 - 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 = 0$$

Donc la courbe ne présente de maximum que si

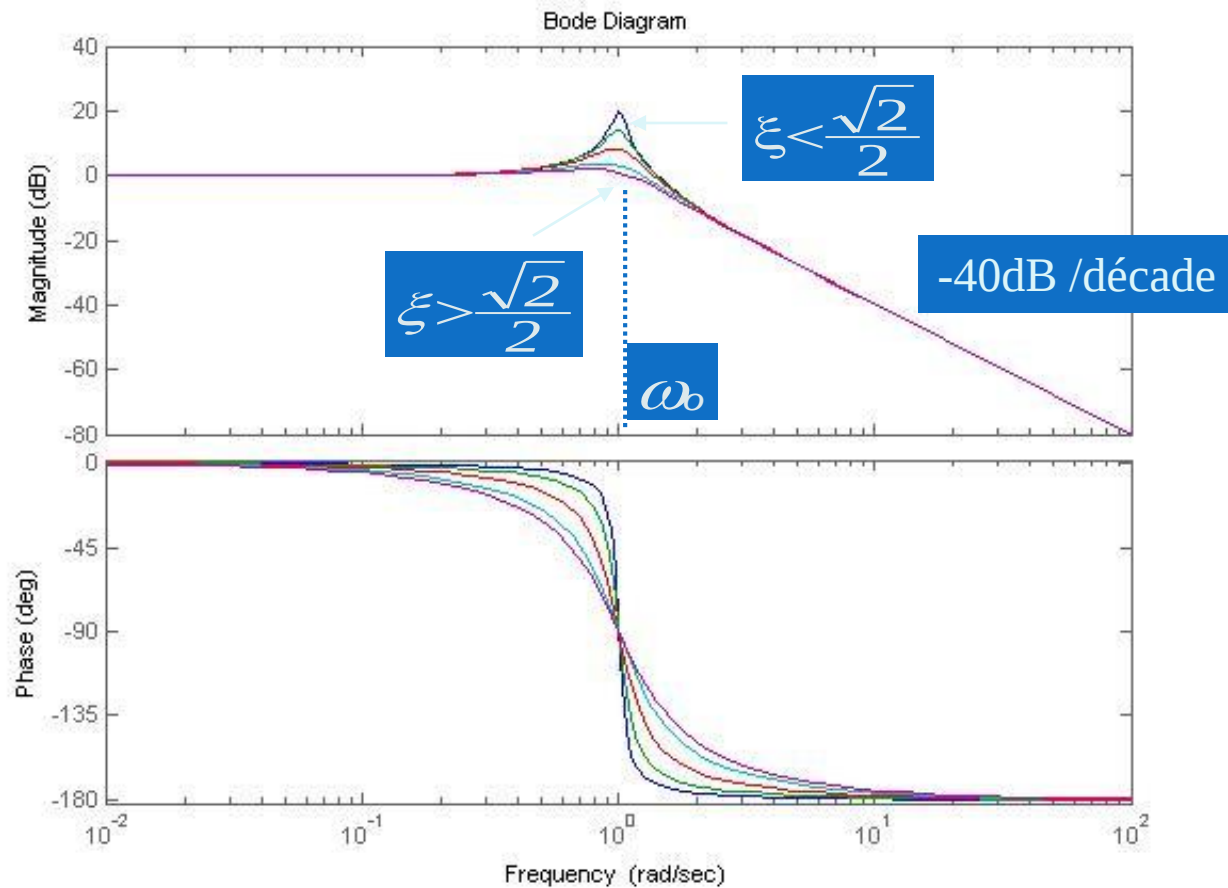
$$2\xi^2 - 1 < 0$$

$$\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Réponse Filtre passe bas de second ordre

Les coordonnées du maximum sont telles que:

$$\left(\frac{\omega_M}{\omega_o} = \sqrt{1-2\xi^2}, \quad |H_M| = \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$

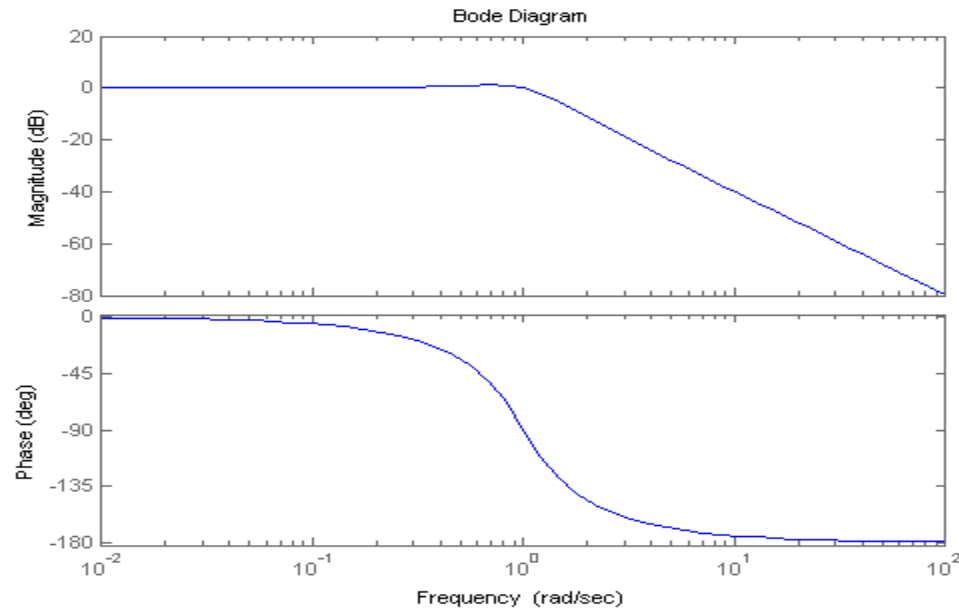


Filtre passe bas de second ordre

Transfert

3^{eme} cas : $\xi=1$ Régime critique
Les 2 racines sont confondues

$$H(p) = \frac{K}{1 + 2\xi \cdot \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{K}{\left[1 + \frac{p}{\omega_0}\right]^2}$$



Filtre passe bas de second ordre

Réponse temporelle

$\omega_0=1\text{rad/s}$ et $K=1$

Réponse impulsionnelle: $x(t) \rightarrow \delta(t)$

1. $\xi > 1 \rightarrow 2$ pôles réels négatifs

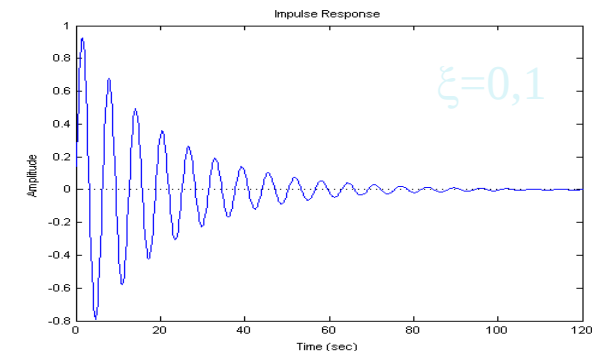
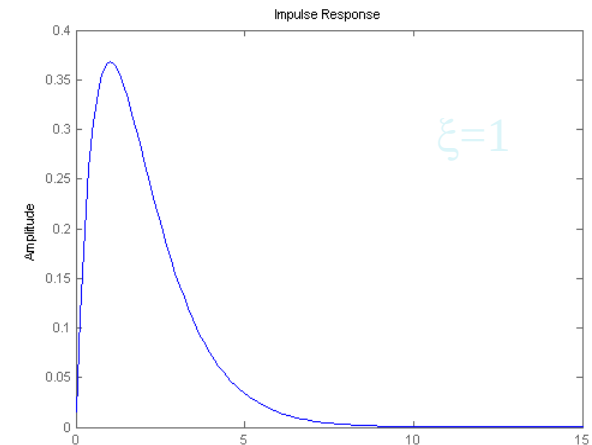
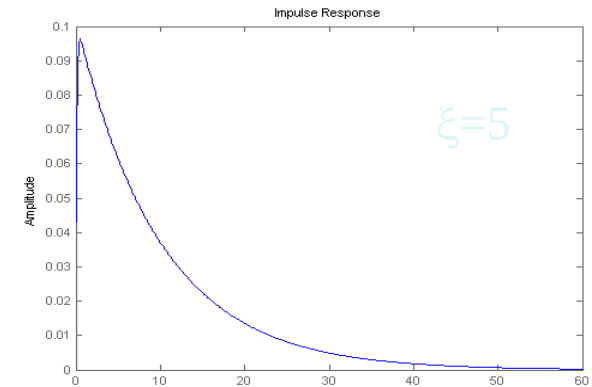
$$h(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{\xi^2-1}} \left[e^{(-1+\sqrt{\xi^2-1})\xi\omega_0 t} - e^{(-1-\sqrt{\xi^2-1})\xi\omega_0 t} \right]$$

2. $\xi = 1 \rightarrow 1$ pôle double réel négatif

$$h(t) = K\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t} u(t)$$

3. $\xi < 1 \rightarrow 2$ pôles complexes conjugués à partie réelle < 0

$$h(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\left(\left[\sqrt{1-\xi^2}\right]\omega_0 t\right)$$



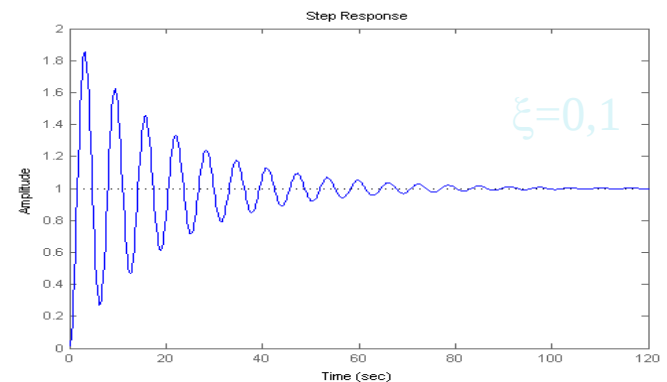
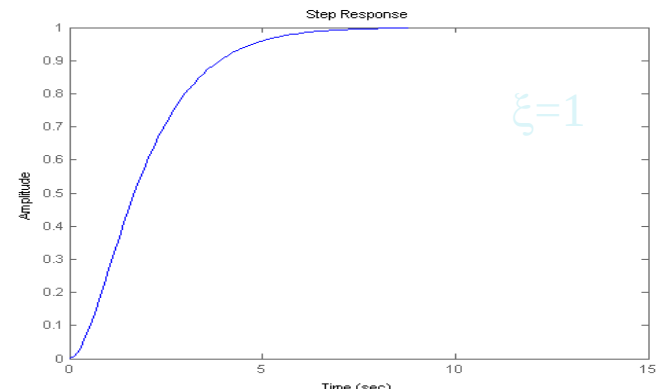
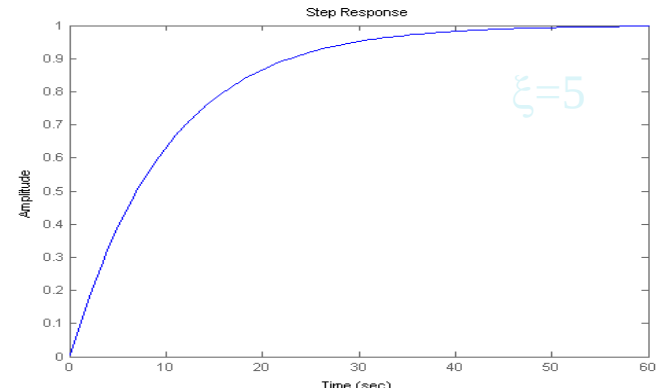
Filtre passe bas de second ordre

Réponse temporelle

$\omega_0=1\text{rad/s}$ et $K=1$

Réponse indicielle: $x(t) \rightarrow u(t)$

1. $\xi > 1 \rightarrow$ 2 pôles réels négatifs
2. $\xi = 1 \rightarrow$ 1 pôle double réel négatif
3. $\xi < 1 \rightarrow$ 2 pôles complexes conjugués à partie réelle < 0

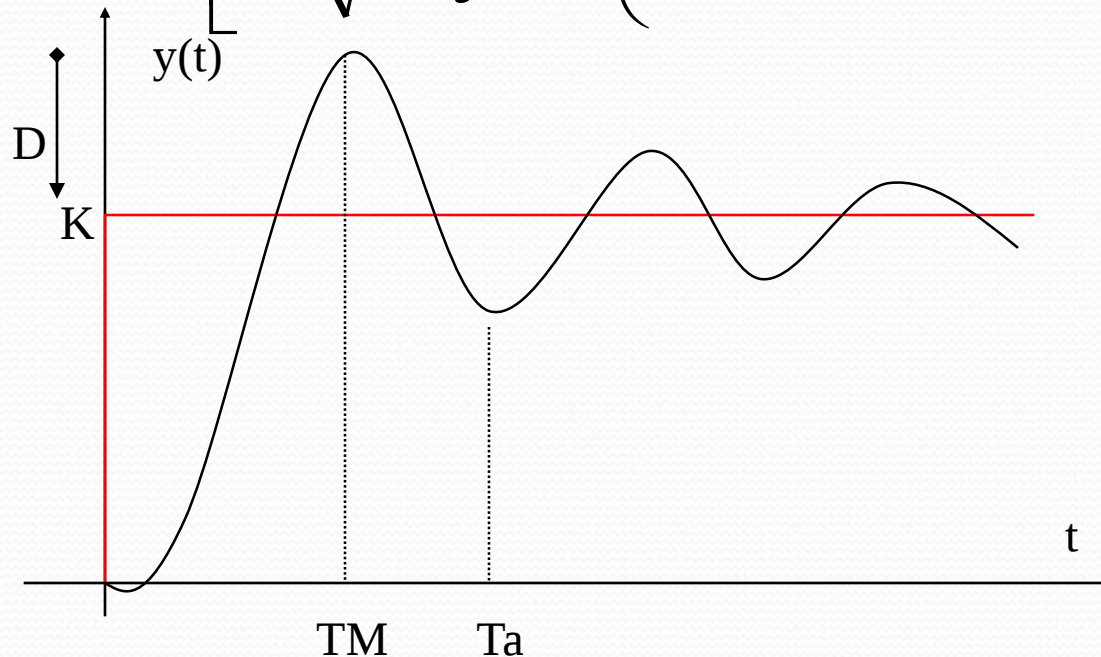


Filtre passe bas de second ordre

Réponse indicielle: $x(t) \rightarrow u(t) = \text{échelon}$

$$x(t) = u(t) \xLeftrightarrow{\text{TL}} X(p) = \frac{1}{p}$$

$$y(t) = K \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos \left(\omega_0 t \sqrt{1-\xi^2} - \text{artg} \left(\frac{3}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \right) \right]$$



$T_a =$ Pseudo période

$T_M =$ l'instant du 1er max 1er dépassement par rapport à K

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$T_M = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{T_a}{2}$$

$$D = \frac{e^{-\xi \omega_0 T_M}}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

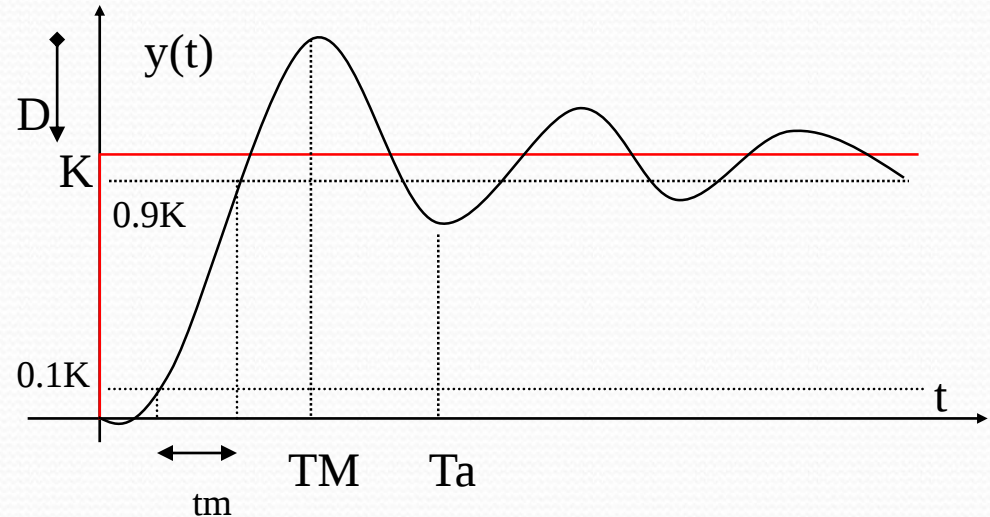
Filtre passe bas de second ordre

Réponse indicielle: $x(t) \rightarrow u(t)$ = échelon

t_m est appelé temps de montée

Pseudo période :

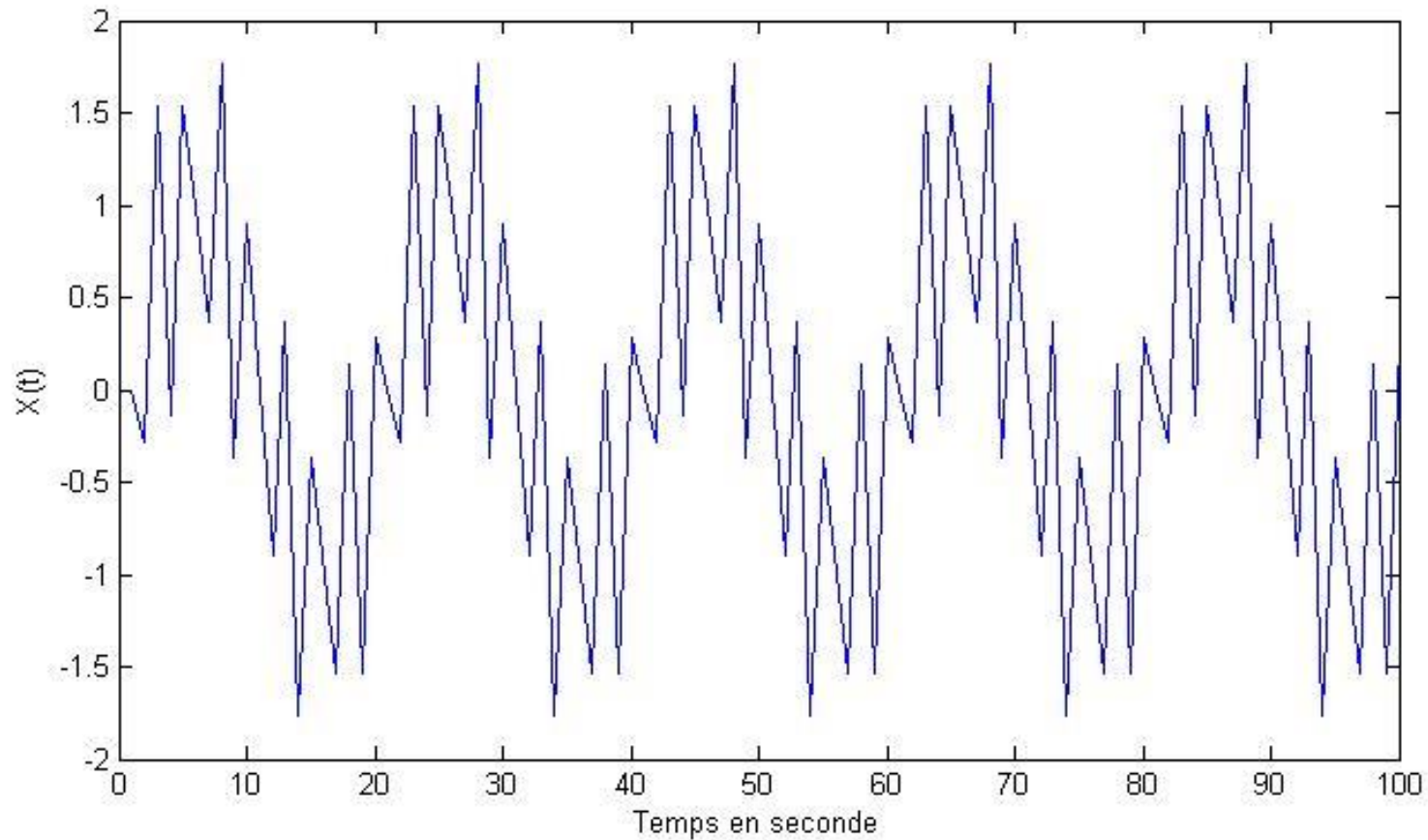
$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$



Plus la bande passante B d'un filtre est faible (ie ω_0 pour un passe bas) plus sa réponse à un échelon converge lentement vers la valeur de l'échelon $\rightarrow + t_m, TM, T_a$ sont grands

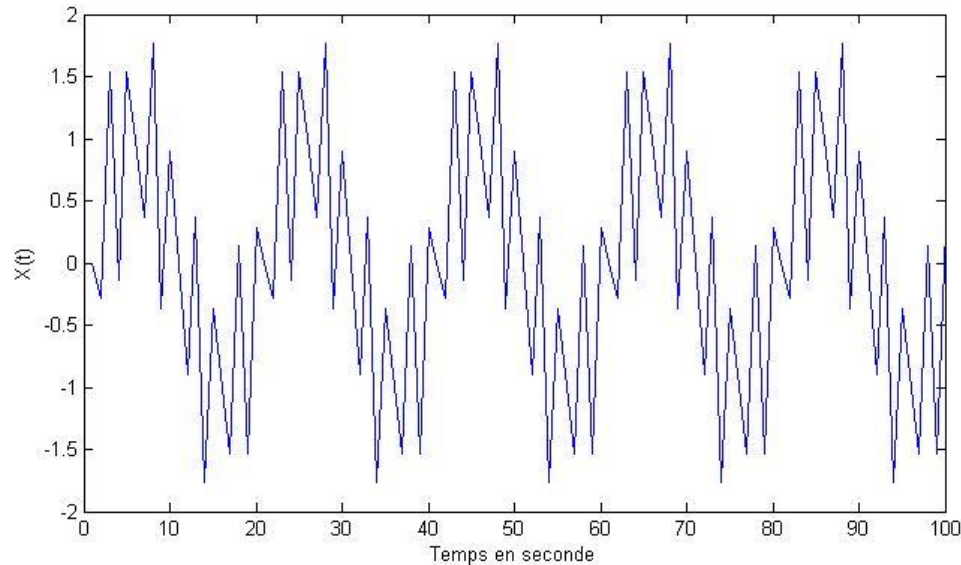
Filtre passe bas: exemple

$$X = \sin(2\pi 50t) + \sin(2\pi 600t)$$



Filtre passe bas: exemple

$$X = \sin(2\pi 50t) + \sin(2\pi 600t)$$



Hypothèse : la perturbation c'est la composante à 600 Hz

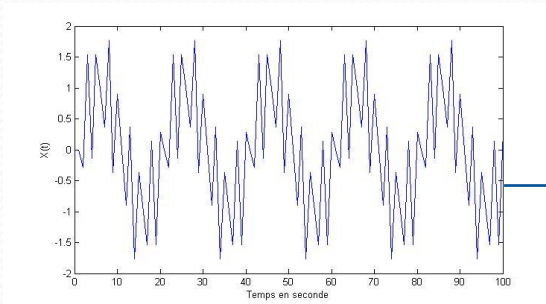
L'objectif = la supprimer

Solution: Filtre passe bas

Filtre
Passe bas

Filtre passe bas: exemple

$$X = \sin(2\pi 50t) + \sin(2\pi 600t)$$



Filtre
Passe bas

?

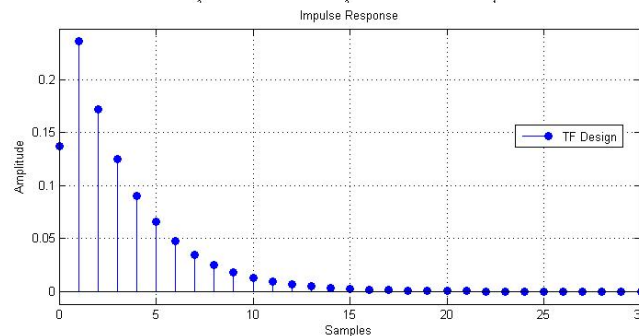
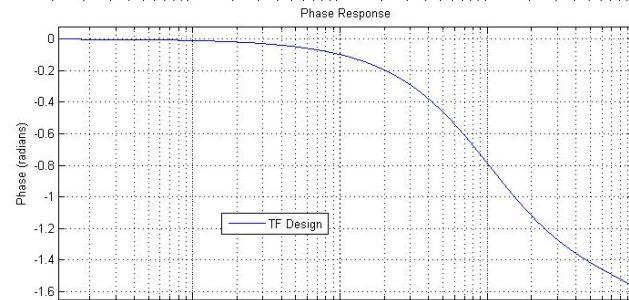
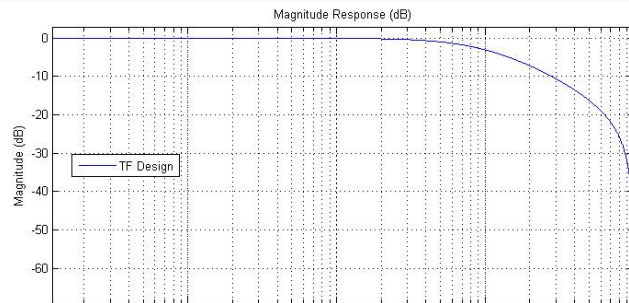
Caractéristiques du filtre Passe Bas

$F_c = 100\text{Hz}$, 1^{ier} ou 2^{eme} ordre ?

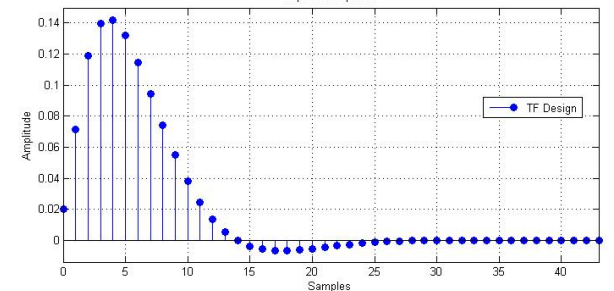
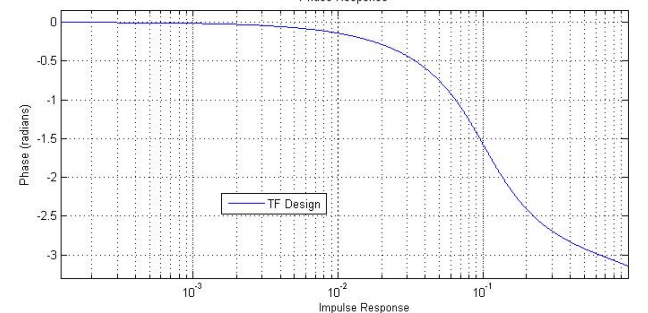
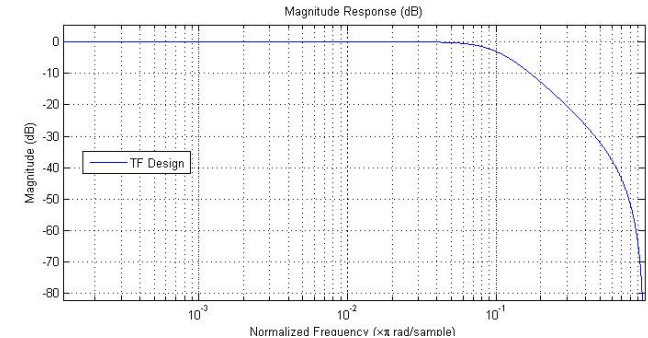
Filtre passe bas: exemple

$$X = \sin(2\pi 50t) + \sin(2\pi 600t)$$

Caractéristiques du filtre Passe Bas $F_c = 100\text{Hz}$, 1^{er} ou 2^{ème} ordre ?



1^{er} ordre

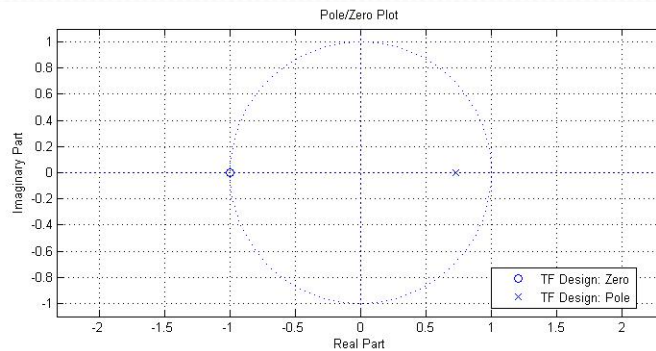
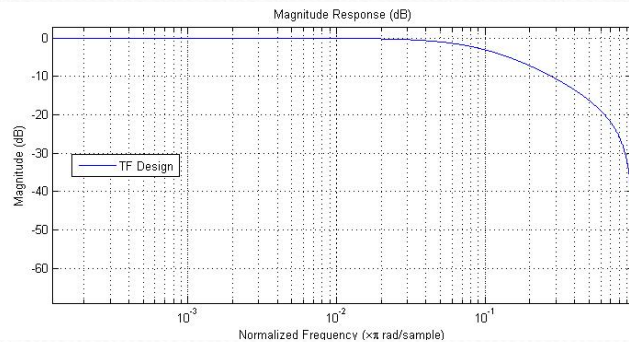


2^{ème} ordre

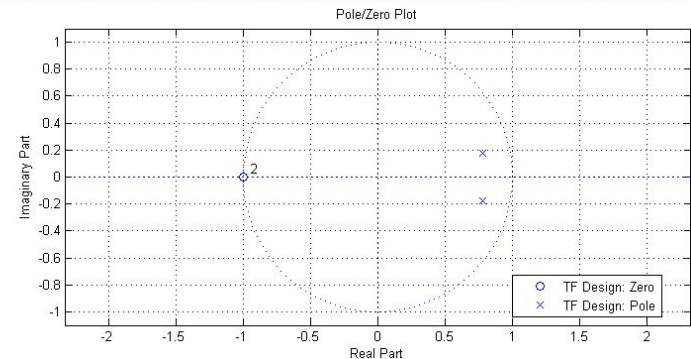
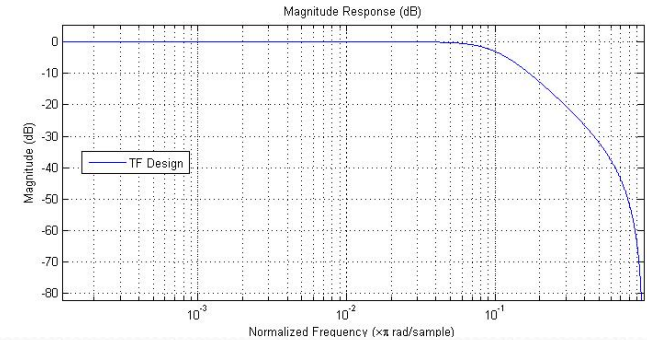
Filtre passe bas: exemple

$$X = \sin(2\pi 50t) + \sin(2\pi 600t)$$

Caractéristiques du filtre Passe Bas $F_c = 100\text{Hz}$, 1^{ier} ou 2^{eme} ordre ?



1^{ier} ordre



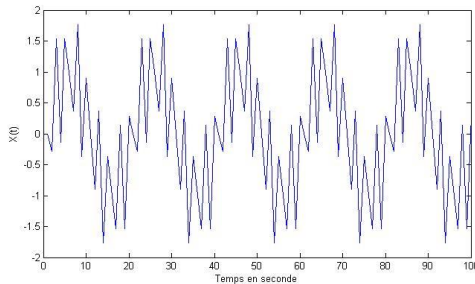
2^{eme} ordre

Filtre passe bas: exemple

$\text{bruit}^1(t)$ gaussien, moyenne nulle et $\sigma=0,5$

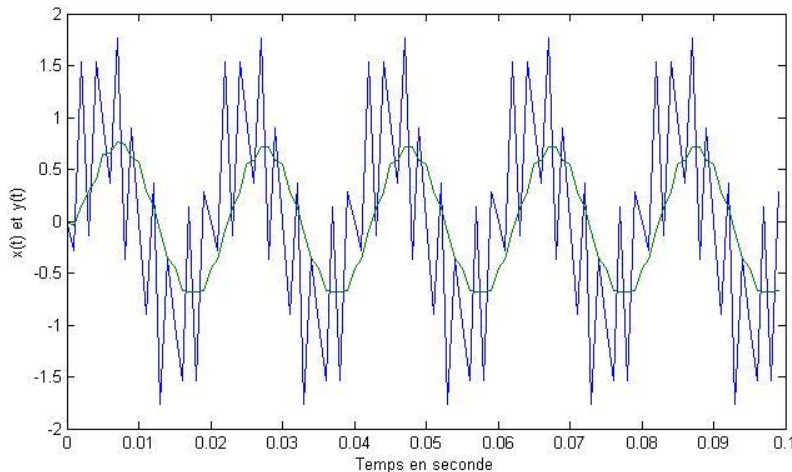
$$X = \sin(2\pi 50t) + \sin(2\pi 600t)$$

Caractéristiques du filtre Passe Bas $F_c = 100\text{Hz}$, 1^{ier} ou 2^{eme} ordre ?

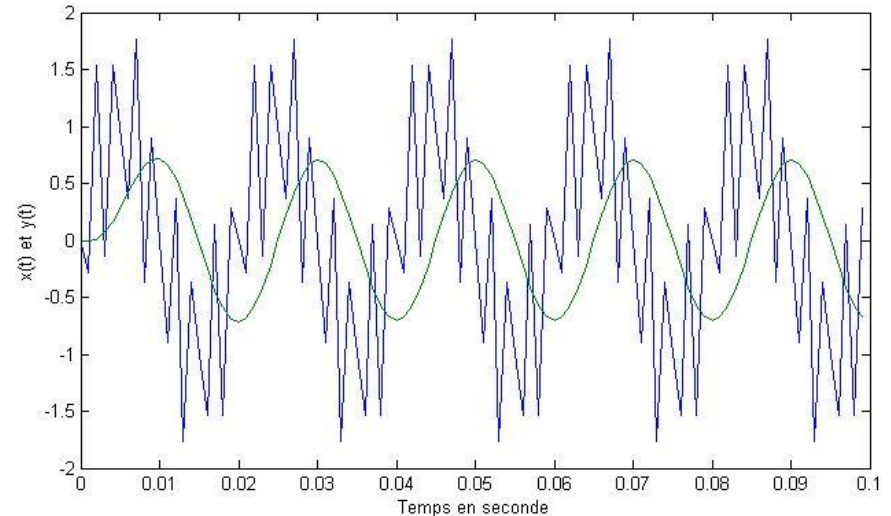


Filtre
Passe bas

?



1^{ier} ordre



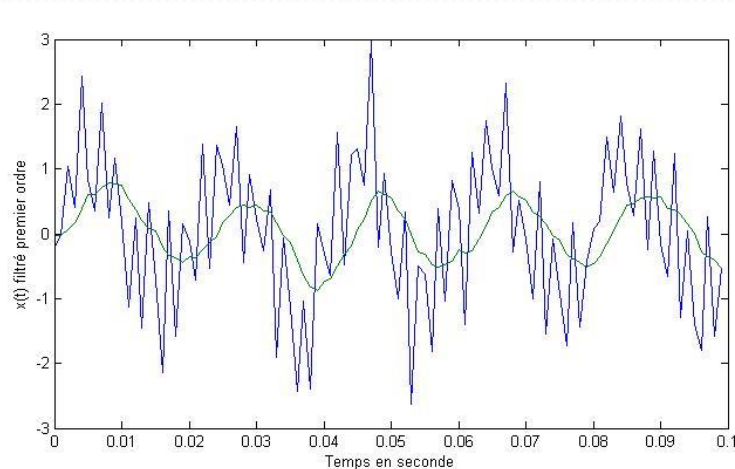
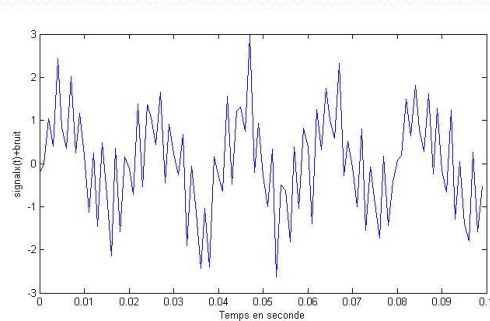
2^{eme} ordre

Filtre passe bas: exemple

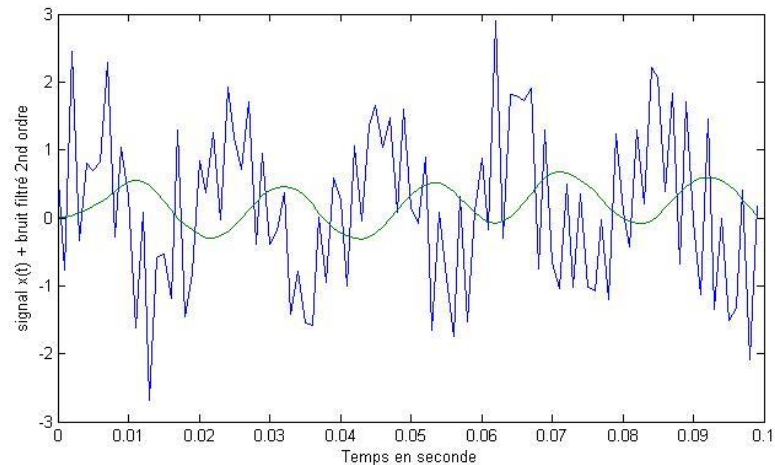
$\text{bruit}^1(t)$ gaussien, moyenne nulle et $\sigma=0,5$

$$X = \sin(2\pi 50t) + \sin(2\pi 600t) + \text{bruit}^1(t)$$

Caractéristiques du filtre Passe Bas $F_c = 100\text{Hz}$, 1^{ier} ou 2^{eme} ordre ?



1^{ier} ordre



2^{eme} ordre

Gabarit des filtres

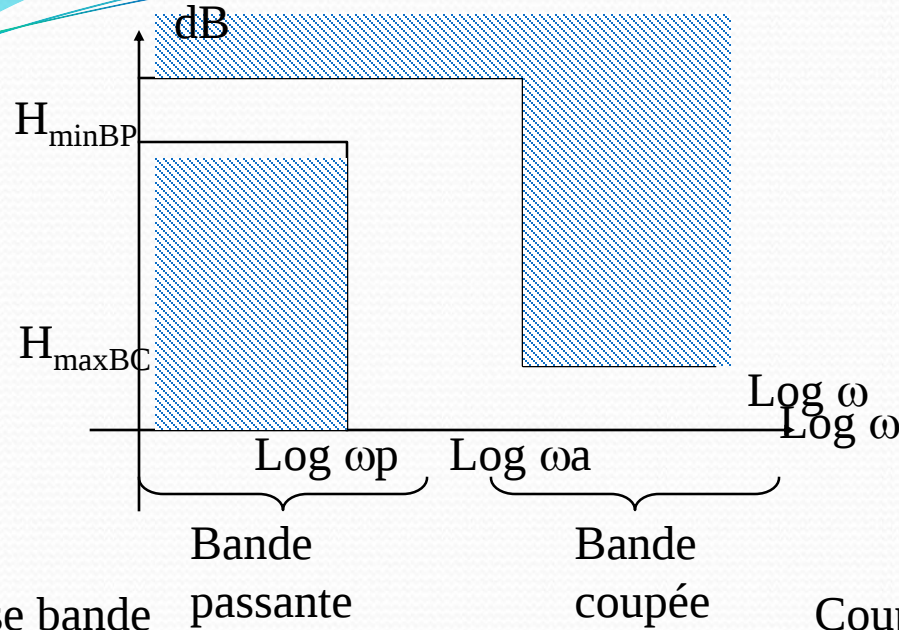
En pratique, un filtre est défini par son gabarit.

Le gabarit d'un filtre est constitué des limites de tolérance pour les différents éléments du filtre:

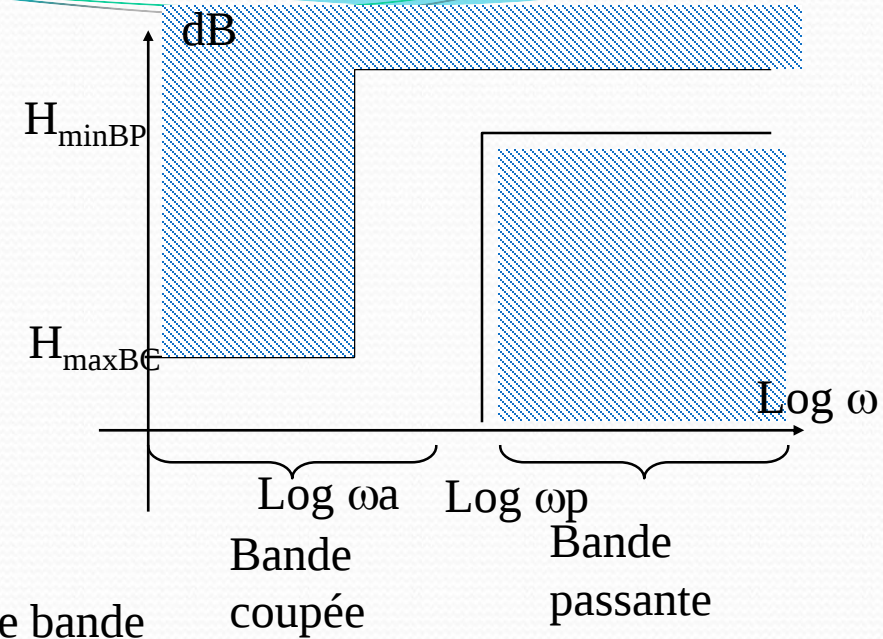
- ✓ La fréquence de coupure,
- ✓ L'atténuation dans la bande coupée, en dB,
- ✓ L'ondulation dans la bande passante, en dB,
- ✓ La largeur de la bande de transition, située entre la fréquence de coupure et la zone atténuée,

Filtre réel et gabarit

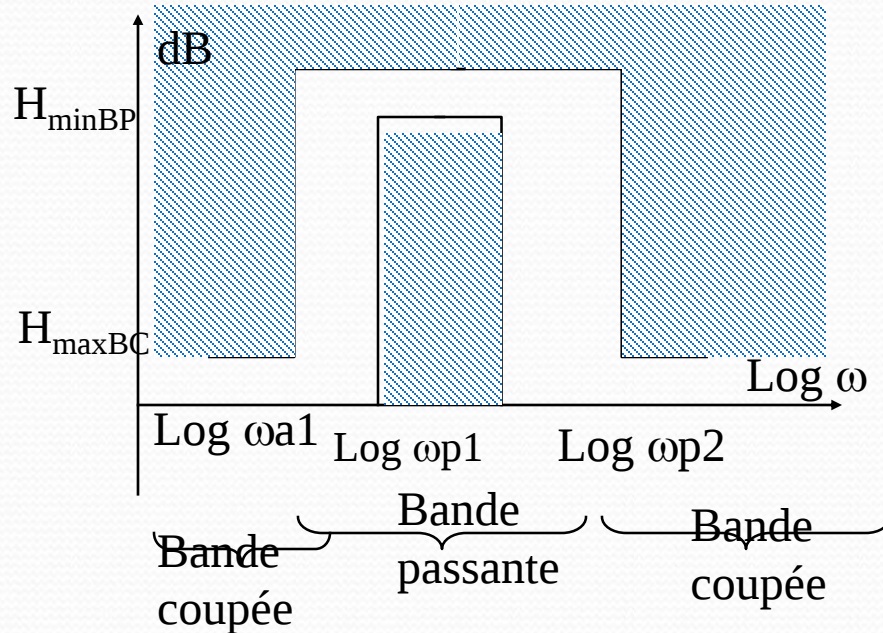
Passé bas



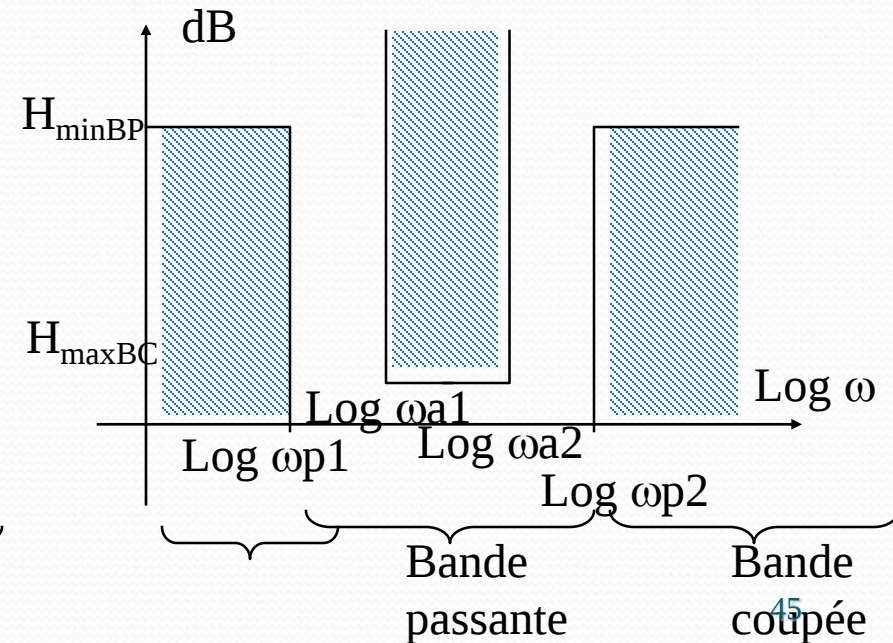
Passé haut



Passé bande



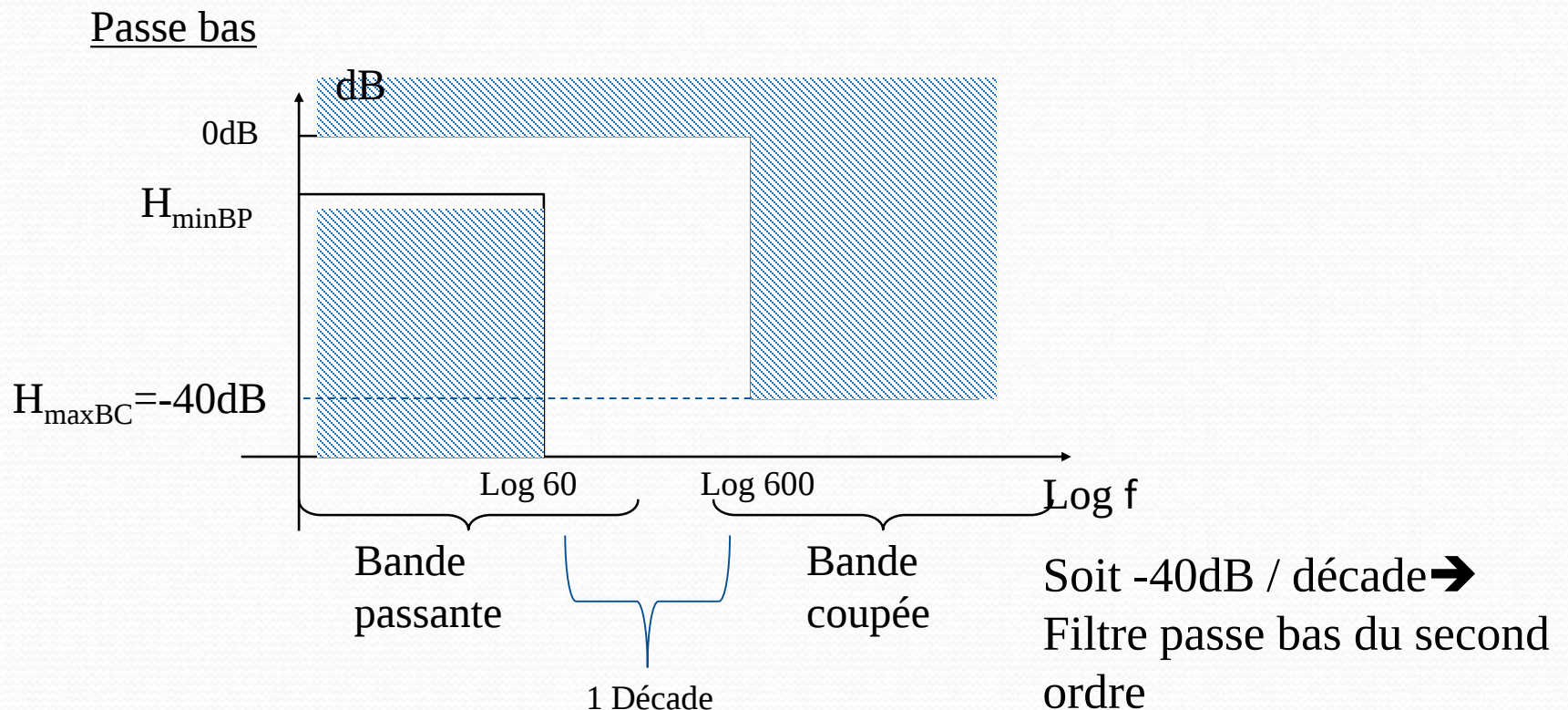
Coupe bande



Gabarit des filtres: exemple

$$X = \sin(2\pi 50t) + \sin(2\pi 600t) + \text{bruit}^1(t)$$

On souhaite conserver la composante à 50 Hz dans son intégralité et atténuer la composante à 600Hz de 40 dB



Filtres réels

Normalisation des fréquences

Toutes les courbes d'affaiblissement d'un même type de filtre peuvent être comparées en normalisant les fréquences (ou pulsation) en rapport à une fréquence caractéristique f_0 (ou en pulsation ω_0)

Pour un filtre passe-bas ou passe haut :

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ et } F = \frac{f}{f_0}$$

Pour un filtre passe-bande :

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\omega_{1p}\omega_{2p}}$$

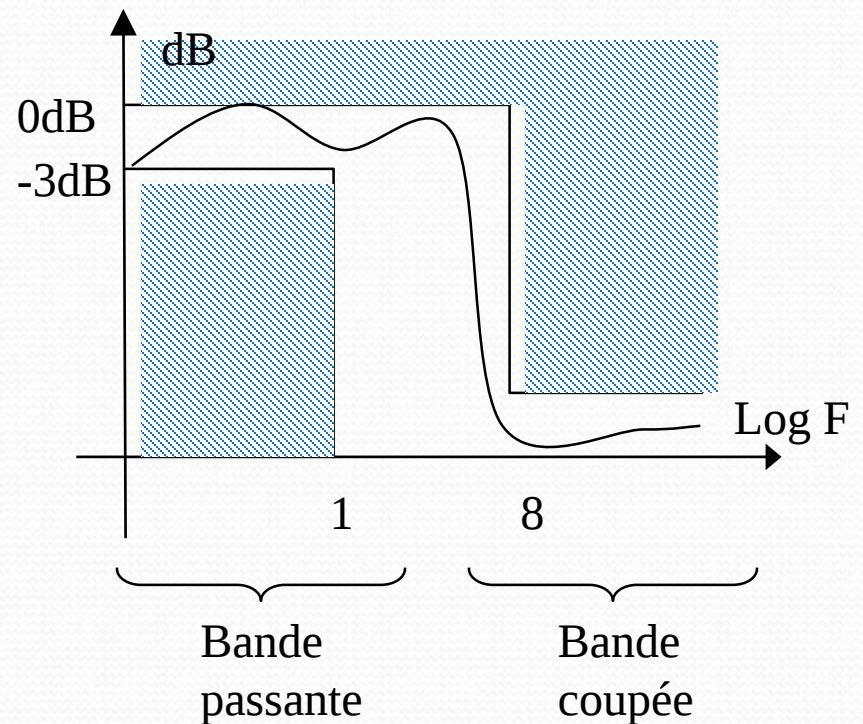
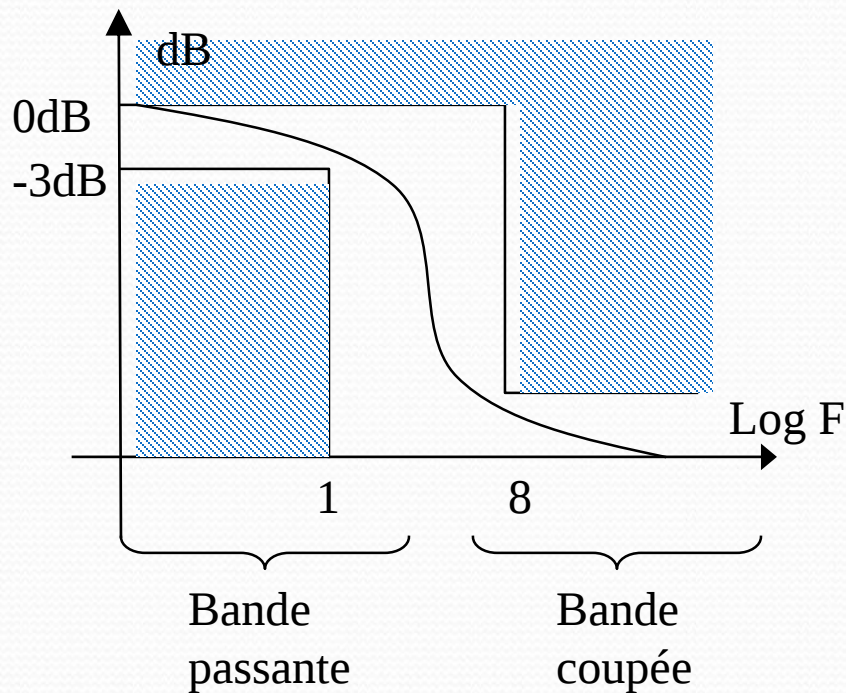
Pour un filtre réjecteur (coupe bande) :

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\omega_{1a}\omega_{2a}}$$

Polynômes et Gabarit du filtre

Cependant il est possible d'envisager plusieurs filtres différents passant par le même gabarit

Polynômes ????



Les fonctions d'approximations Filtre de Butterworth

Une infinité de fonctions de transfert peuvent satisfaire les conditions imposées par un gabarit

Objectif : Trouver la fonction de transfert de plus faible degré qui entre dans un gabarit

→ Filtre de Butterworth

Approximation du filtre de Butterworth : Filtre '*maximally flat*'

→ c'est un filtre très proche de l'asymptote horizontale (dans la bande passante)

$$H(X)H(-X) = \frac{1}{1 + (-1)^n (X)^{2n}}$$

n = ordre du filtre
 $X = j\omega/\omega_0$

Les pôles sont : $0 = 1 + (-1)^n (X)^{2n}$ $X_{n,k} = e^{j(\frac{n-1+2k}{2n})\pi}$

Dans le cadre de la stabilité des systèmes : seuls les pôles à parties réelles négatives sont conservés

Exemple pour $n=3$ $H(X) = \frac{1}{(X - X_{3,1})(X - X_{3,2})(X - X_{3,3})}$

Les fonctions d'approximations : Filtre de Chebychev

Polynôme de Chebychev $P_n(x) = \Re_{ecl} \left[x + j\sqrt{1-x^2} \right]^n$ avec $x = \frac{j\omega}{\omega_o}$

Les Polynômes de Chebychev obéissent à la relation de récurrence:

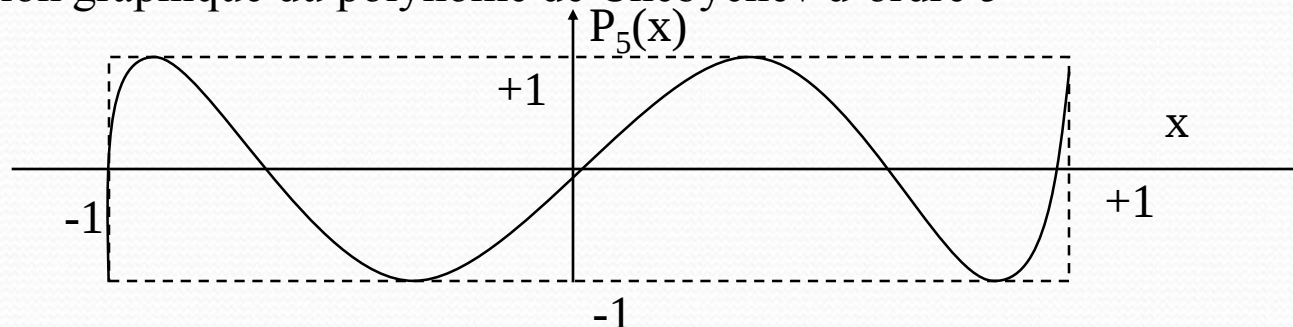
n=0	initialisation $P_0(x)=1$
n=1	initialisation $P_1(x)=x$
n=2	$P_2(x)=2x^2-1$
n=3	$P_3(x)=4x^3-3x$
n=4	$P_4(x)=8x^4-8x^2+1$

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x)$$

Autre représentation du polynôme:

$$P_n(x) = \begin{cases} \cos(n \operatorname{Arc} \cos(x)) & \text{si } x \leq 1 \\ \operatorname{ch}(n \operatorname{Argch}(x)) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Représentation graphique du polynôme de Chebychev d'ordre 5



Les fonctions d'approximations : Filtre de Chebychev

Avec les polynômes de Chebychev on peut définir un filtre de type polynomial dont la réponse est ondulatoire dans la bande passante

Filtre de Chebychev $|H(p)|^2 = H(p)H(-p) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot P_n^2(\Omega)}$

ε caractérise l'amplitude max des oscillations dans la bande passante

Dans la bande passante : - pour $\Omega = \omega/\omega_0 = 0 \rightarrow |H(p)| = 1$

- pour $\Omega = 1 \rightarrow |H(p)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$

Les pôles sont : $1 + \varepsilon^2 \cdot P_n^2(\Omega) = 0$

Les pôles de la fonction de transfert se trouvent sur une ellipse

Remarque : les filtres de Chebychev présentent un bon comportement dans la bande coupée

Les fonctions d'approximations : Filtre de Bessel

Les filtres de Bessel sont des filtres polynomiaux pour lesquels le critère d'optimisation est la régularité du temps de propagation dans la bande passante

→ Filtre à phase linéaire: la phase est une fonction linéaire de la fréquences $\tau_g = -\frac{d\phi}{d\omega}$

Si les réponses montrent une atténuation faible en bande coupée , les transitoires sont transmis dans de meilleures conditions

- absence d'oscillations
- temps de montée minimum
- temps d'établissement très court

La fonction de Bessel :
$$H(p) = e^{-p} = \frac{1}{\frac{e^{+p} + e^{-p}}{2} + \frac{e^{+p} - e^{-p}}{2}} = \frac{1}{ch(p) + sh(p)}$$

Les développements de $ch(p)$ et $sh(p)$:

$$ch(p) = ch(0) + \frac{p}{1!}sh(0) + \frac{p^2}{2!}ch(0) + \frac{p^3}{3!}sh(0) + \dots = 1 + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^4}{4!} + \dots$$

$$sh(p) = sh(0) + \frac{p}{1!}ch(0) + \frac{p^2}{2!}sh(0) + \frac{p^3}{3!}ch(0) + \dots = p + \frac{p^3}{3!} + \dots$$

Les fonctions d'approximations : Filtre de Bessel

Si on développe $cth(p)$:

$$cth(p) = \frac{ch(p)}{sh(p)} = \frac{1 + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^4}{4!} + \dots}{p + \frac{p^1}{1!} + \frac{p^3}{3!} + \dots}$$

La division polynomiale par puissances croissantes de p et permet d'écrire $cth(p)$ sous forme de fraction en **limitant** le développement à l'ordre n

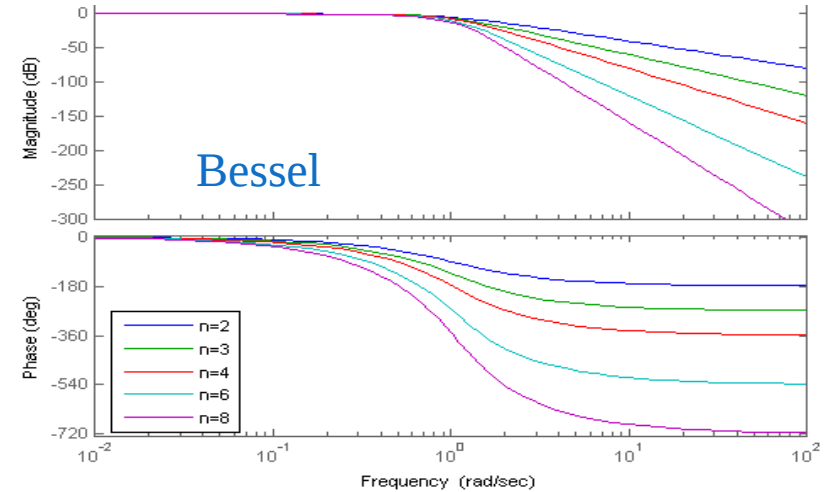
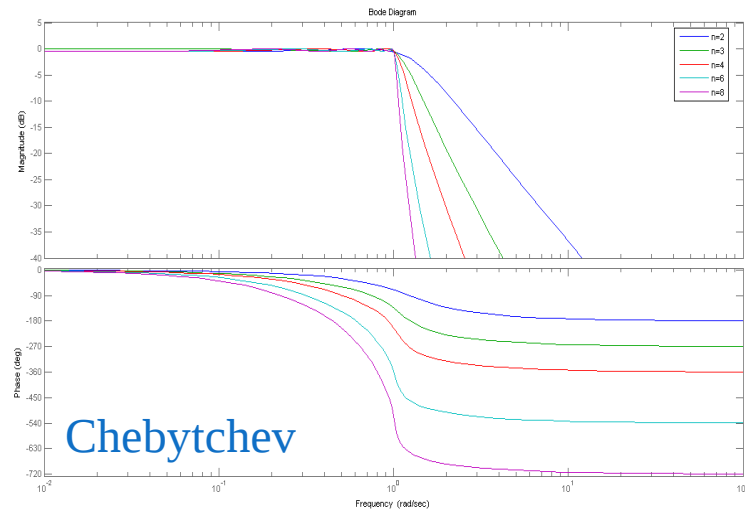
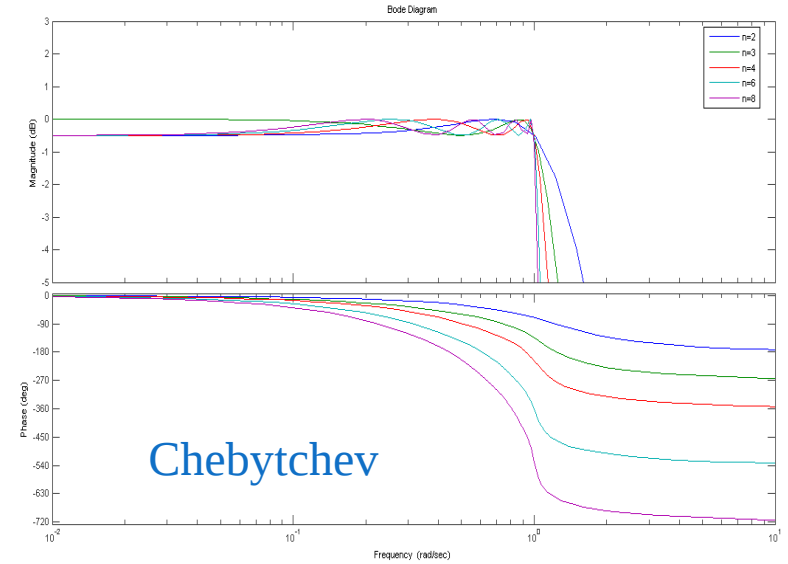
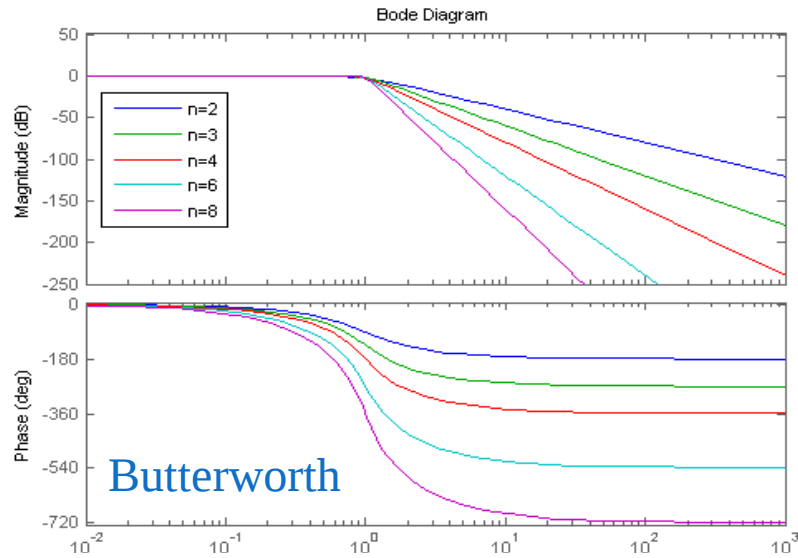
Exemple pour $n=3$ $cth(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\frac{3}{p} + \frac{1}{5}} = \frac{15 + 6p^2}{15p + p^3} = \frac{ch(p)}{sh(p)}$

$$H(p) = e^{-p} = \frac{1}{ch(p) + sh(p)}$$

$$H(p) = \frac{1}{15 + 15p + 6p^2 + p^3}$$

Il n'existe pas de méthode analytique pour déterminer l'ordre d'un polynôme de Bessel répondant aux paramètres d'un gabarit. Il faut le déterminer par approximations successives à l'aide de solveurs numériques.

Module de la fonction de transfert en fonction f pour $n=2\dots 8$



Remarque sur la Bande Passante

Exemple:

$$H(p) = \frac{K}{1 + 2\xi \cdot \frac{p}{\omega_o} + \frac{p^2}{\omega_o^2}} = \frac{K}{1 + \frac{1}{Q} \cdot \frac{p}{\omega_o} + \frac{p^2}{\omega_o^2}}$$

Avec le facteur de qualité $Q = \frac{1}{2\xi}$

$$Q = \frac{f_o}{\Delta f}$$

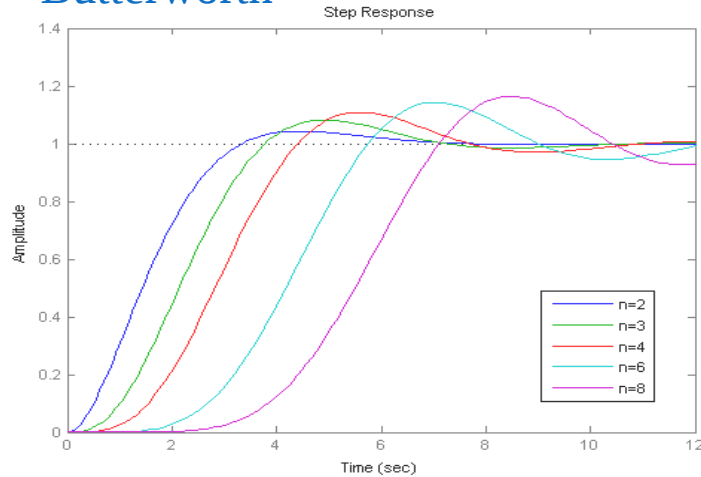
≈ 0

Selon la valeur de Q, les filtres portent des noms différents :

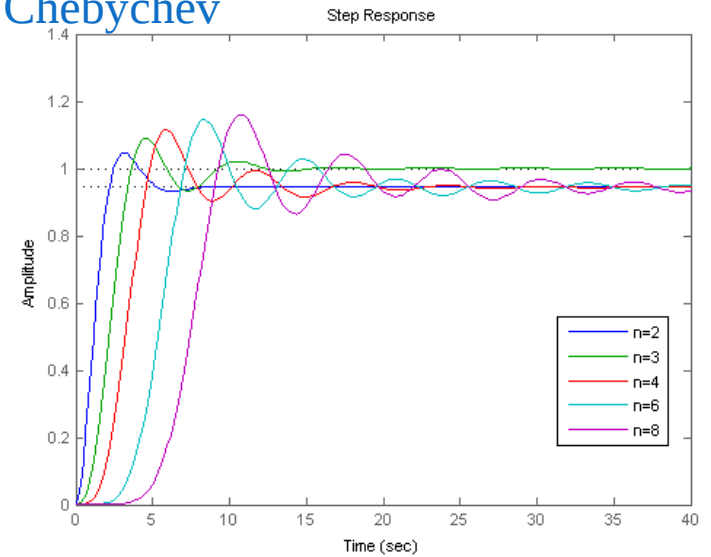
- $Q=0.707$ filtre de Butterworth
- $Q=0.577$ filtre de Bessel
- $Q=0.863$ filtre de Tchebycheff (ripple band 0.5 dB)
- $Q=1.128$ filtre de Tchebycheff (ripple band 2 dB)

Réponse à un échelon (indicielle) pour une ordre $n=2$ ou 3, 4, 6, 8

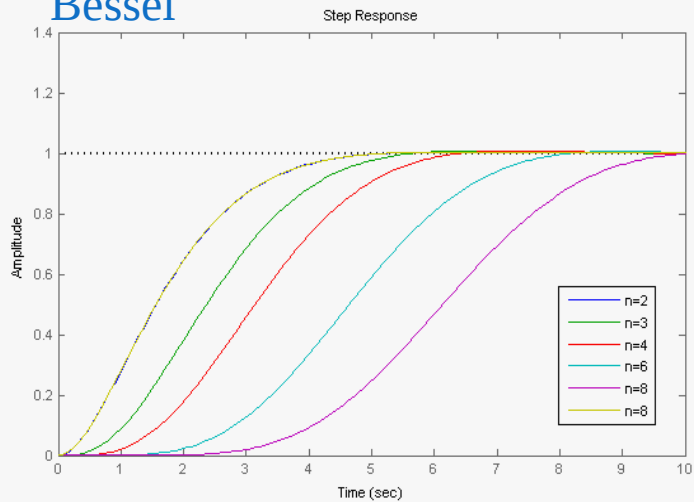
Butterworth



Chebyshev

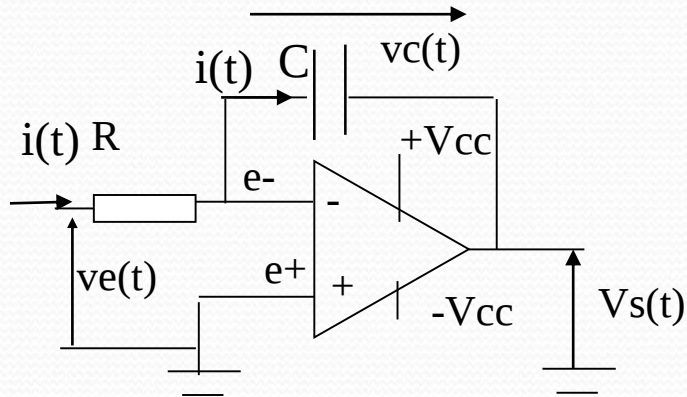


Bessel

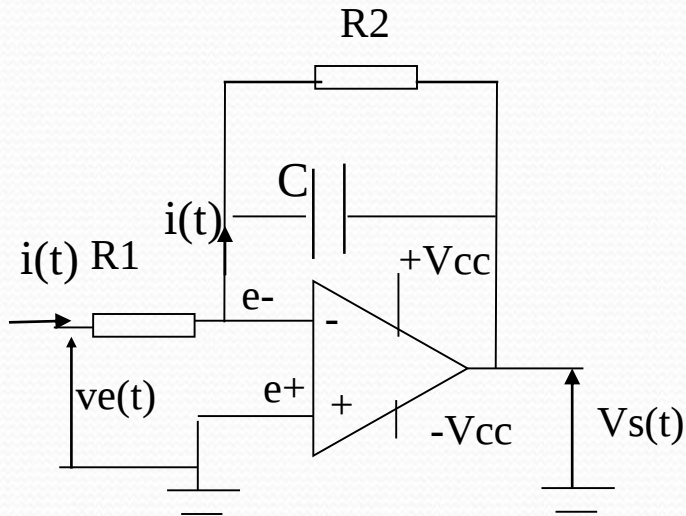


Montages élémentaires

- l'intégrateur



$$H(p) = \frac{Vs(p)}{Ve(p)} = -\frac{1}{RCp}$$

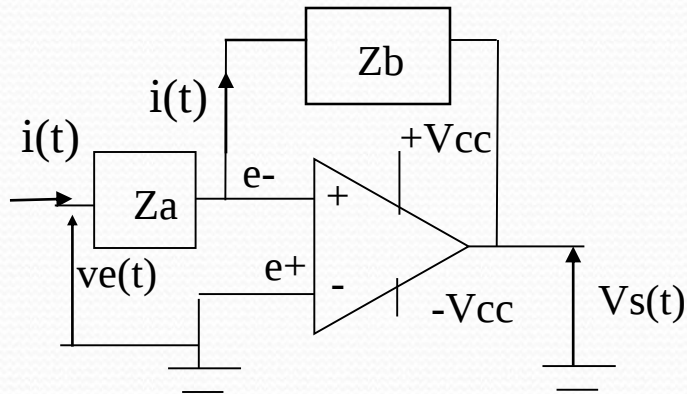


$$H(p) = \frac{Vs(p)}{Ve(p)} \Rightarrow -\frac{R2}{R1} \frac{1}{R2Cj\omega + 1}$$

- Pente de -1 ou -20dB/décade pour toutes les fréquences supérieures à $f_0 = 1/2\pi R2C$
- Amplificateur
- Plus stable

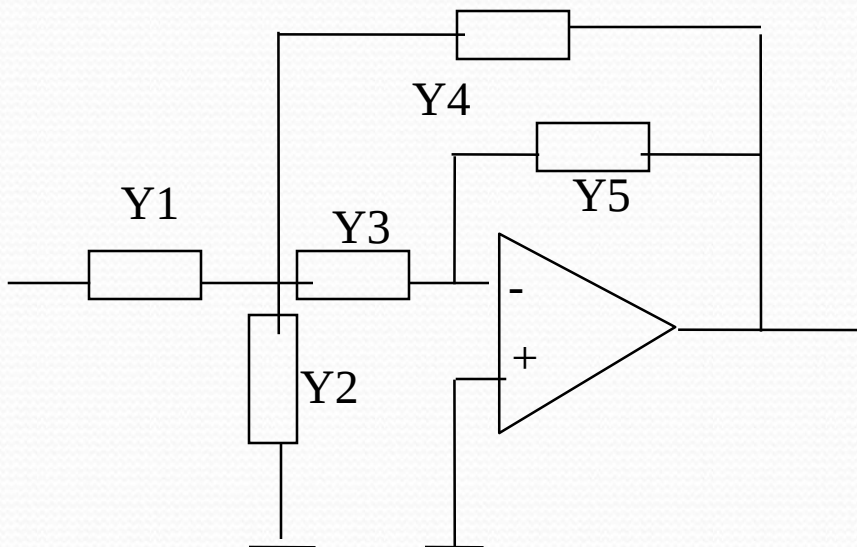
Synthèse des filtres actifs

Montages à contre réaction simple



$$H(p) = \frac{Vs(p)}{Ve(p)} = -\frac{Zb}{Za}$$

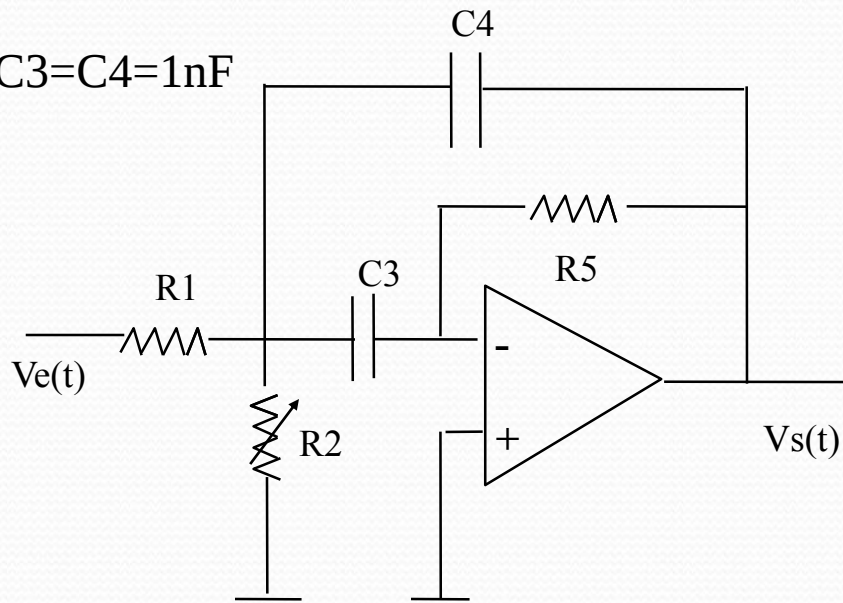
Montages à contre réaction multiple: structure de RAUCH



$$H(p) = \frac{Vs(p)}{Ve(p)} = -\frac{Y1Y3}{Y5(Y1+Y2+Y3+Y4)+Y3Y4}$$

Synthèse des filtres actifs

Exemple : Filtre passe bande à contre réaction multiple



$$K = -\frac{R5}{2R1}$$

$$\omega_o = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{R1+R2}{R1.R2.R5}}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{R1R2}{R5(R1+R2)}}$$

$$\Delta\omega = 2\xi\omega_o = \frac{2}{R5.C}$$

$$H(p) = \frac{Vs(p)}{Ve(p)} = -\frac{Y1Y3}{Y5(Y1+Y2+Y3+Y4)+Y3Y4}$$

$$Y1 = \frac{1}{R1} \quad Y2 = \frac{1}{R2} \quad Y5 = \frac{1}{R5}$$

$$Y3 = Y4 = jC\omega$$

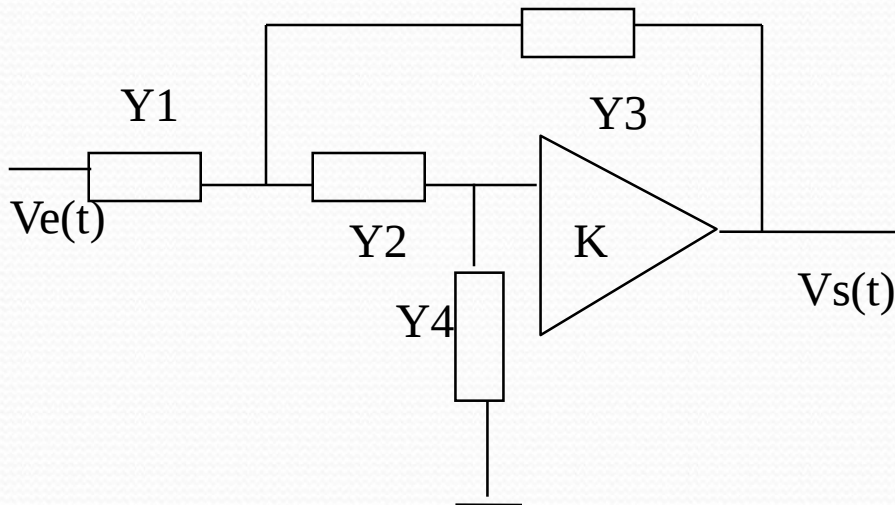
$$H(p) = -\frac{K.2\xi.\frac{p}{\omega_o}}{1+2\xi.\frac{p}{\omega_o}+\frac{p^2}{\omega_o^2}}$$

$$\Delta\omega = 2\xi\omega_o = \frac{2}{R5.C}$$

Synthèse des filtres actifs

Structure de Sallen-Key

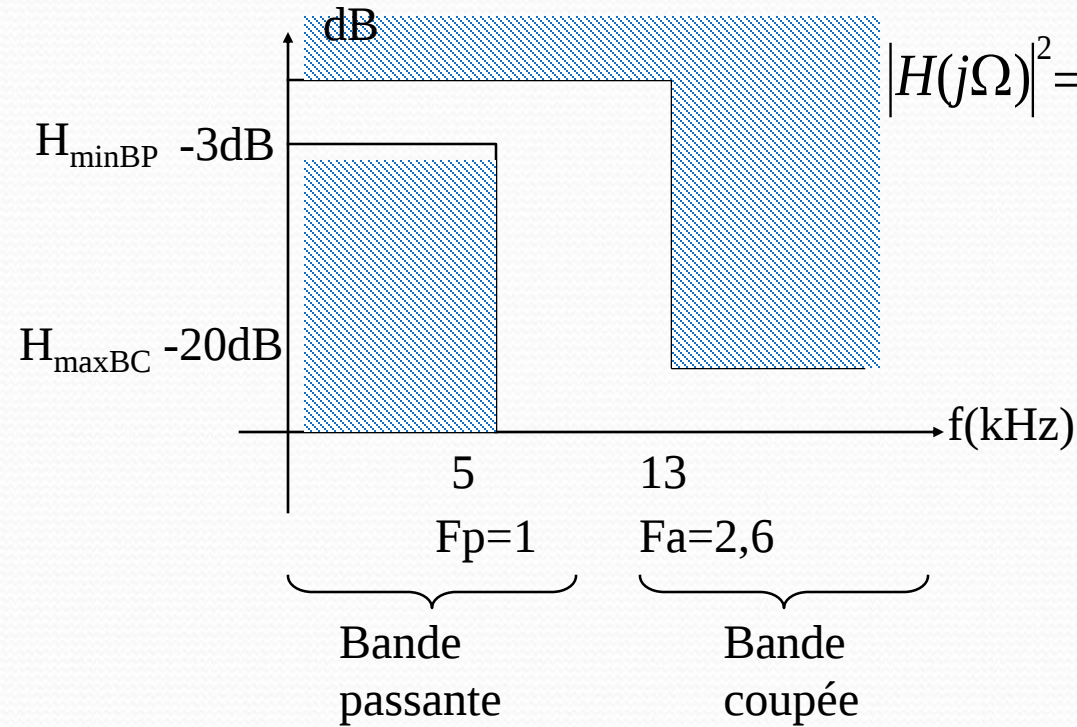
Elle nécessite peu de composants



$$H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = -K \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 Y_2 + Y_2 Y_4 + Y_2 Y_3 (1 - K) + Y_3 Y_4 + Y_1 Y_4}$$

→ Réalisation d'un filtre passe bas de Butterworth : ordre du filtre ?

Passé bas



$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = \frac{1}{1+(\Omega)^{2n}} \text{ avec } \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

La fréquence de coupure est de 5Khz

$$Ga = 20 \log |H_a(j\Omega)| = -10 \log (1 + (\Omega a)^{2n})$$

$$Gp = 20 \log |H_p(j\Omega)| = -10 \log (1 + (\Omega p)^{2n})$$



$$n \approx 2,4$$

On prendra $n=3$

→ Réalisation d'un filtre passe bas de Butterworth : Fonction de transfert du filtre n=3

$$H(p)H(-p) = \frac{1}{1 + (-1)^n \cdot (p)^{2n}} \quad n = \text{ordre du filtre} = 3$$

$$1 + (-1)^n \cdot (p)^{2n} = 0 \quad \text{Recherche des pôles de } H(p)H^*(p)$$

$$p_{n,k} = e^{j(\frac{n-1+2k}{2n})\pi} \quad \rightarrow \text{les pôles}$$

Seuls les pôles à partie réelle négative définissent $H(p)$:

$$p_{3,1} = e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad p_{3,2} = e^{j\pi} = -1 \quad p_{3,4} = e^{j\frac{4\pi}{3}}$$

Fonction de transfert du filtre $H(p)$:

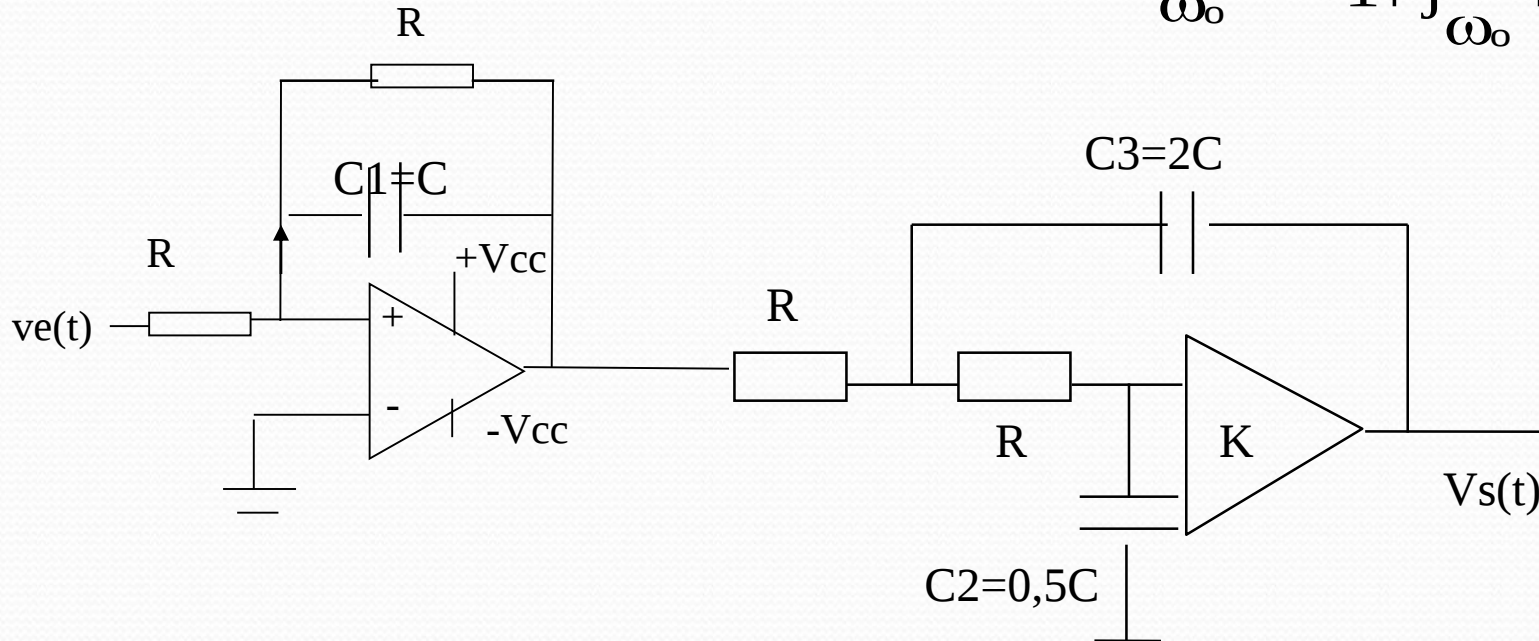
$$H(p) = \frac{1}{(p - p_{3,1})(p - p_{3,2})(p - p_{3,3})} = \frac{1}{(p+1)} \cdot \frac{1}{1 + p + p^2}$$

→ Réalisation d'un filtre passe bas de Butterworth : synthèse du filtre

$$H(p) = \frac{1}{(p+1)} \cdot \frac{1}{1+p+p^2}$$

En régime Harmonique :

$$H(j\frac{\omega}{\omega_0}) = \frac{1}{(j\frac{\omega}{\omega_0} + 1)} \cdot \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$



$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = 2\pi \cdot 5\text{KHz} \quad R = 10\text{K}\Omega \quad \text{Donc } C = 3.19\text{nF} \quad \text{on pose } C1 = \alpha C, C2 = \beta C, C3 = \chi C$$

$$H(p) = \frac{1}{\alpha\beta\gamma(RCp)^3 + \beta(\gamma + 2\alpha)(RCp)^2 + (\alpha + 2\beta)(RCp) + 1}$$

Réaliser des structures actives ou passives de filtres du 1er et du 2nd ordre