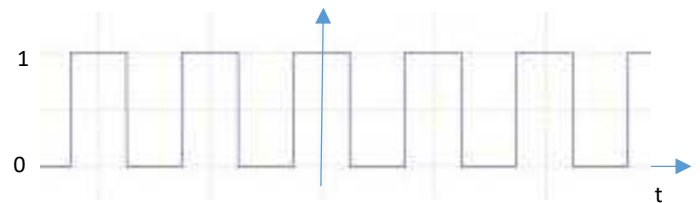


Séries de Fourier et Transformées de Fourier de quelques fonctions

EXERCICE 1.

On considère la fonction créneau suivante : sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, on a $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$

1. tracez la fonction et calculez le coefficient $a_0/2$
2. justifiez que tous les a_n sont nuls
3. Calculez l'expression des coefficients b_n .



On suppose maintenant la fonction paire suivante :

4. Montrez que le développement en série de Fourier ne contient pas de termes d'ordre n pairs :
5. En déduire de ce développement peut se mettre sous la forme

$$f_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin k \cdot \frac{\pi}{2}}{k \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot \cos k \omega_0 t$$

EXERCICE 2.

On considère les fonctions dont les développements en série de Fourier sont respectivement:

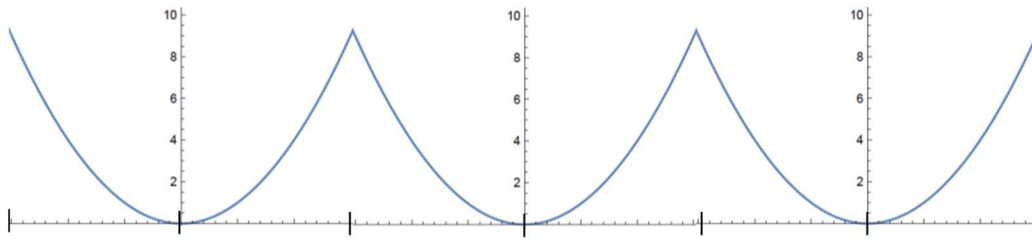
$$S_1 = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin \omega t}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\omega t)}{4n^2 - 1} \quad S_2 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\omega t)}{4n^2 - 1}$$

1. Calculez pour chaque fonction les 4 premiers termes dépendant de t. Faites un tableau des coefficients de Fourier pour S1 et S2.
2. Tracez le spectre de Fourier
3. Donnez la représentation graphique des fonctions $S_1(t)$ et $S_2(t)$. A quoi correspondent ces signaux ?
4. Quelle est la valeur moyenne de chacune des fonctions
5. Retrouvez par le calcul la valeur du premier coefficient pour S1

EXERCICE 3.

On suppose la fonction 2π périodique suivante:

$$f(x) = x^2 \text{ pour } -\pi \leq x \leq \pi$$



1. Calculez le terme constant du développement en série de Fourier

2. Montrez que la fonction peut s'écrire :
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

3. Trouvez la valeur des sommes suivantes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

EXERCICE 4 : calcul de quelques transformées de Fourier

1. transformée de Fourier de la fonction porte de largeur τ :

On considère la fonction notée $\Pi(t)$ et définie comme suit :

$$\Pi(t) = 1 \text{ pour } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}$$

Calculez de manière directe sa transformée de Fourier

$$\Pi(t) = 0 \text{ sinon}$$

Représentez cette transformée de Fourier.

2. Transformée de Fourier de la fonction triangle

On considère la fonction définie comme suit :

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } t \in [-1; 1] \\ 0 & \text{si } t \notin [-1; 1] \end{cases}$$

2.1 Calculez et représentez graphiquement la dérivée de la fonction Λ et exprimez Λ' en fonction de la fonction porte Π .

2.2 En appliquant la transformée de Fourier sur Λ' , trouvez l'expression de la transformée de Fourier de la fonction triangle.

2.3 Etablir l'expression de $TF(\Lambda)$ par un calcul direct.

2.4 Montrez $\Lambda(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$. Retrouver l'expression $TF[\Lambda(t)]$.

3. Transformée de Fourier d'une Gaussienne.

3.1 On considère la fonction gaussienne définie par : $G(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Montrez que :

$$\frac{d}{dv} TF[G(t)] = -(2\pi)^2 \cdot v \cdot TF[G(t)]$$

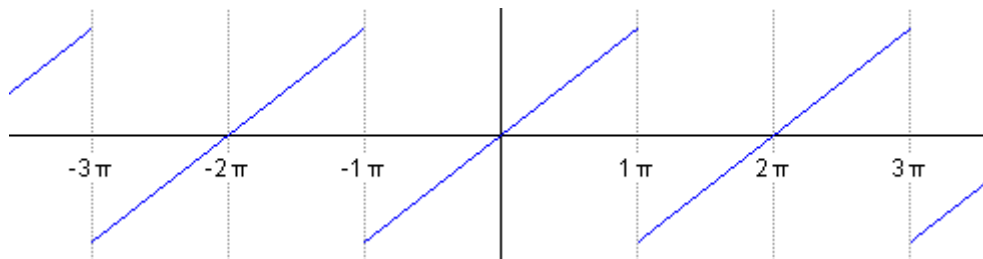
On pourra utilement utiliser la notation : $TF[G(t)] = \tilde{G}$

3.2 Etablir l'équation différentielle satisfaite par $\tilde{G}$. En déduire l'expression de la transformée de Fourier de $G(t)$

3.3 Trouvez alors l'expression de la transformée de Fourier de la fonction $G_\alpha(t) = e^{-\alpha \frac{t^2}{2}}$

4. Transformée de Fourier d'une fonction en dent de scie.

On considère la fonction suivante :



Calculez de manière directe sa transformée de Fourier