

Le filtrage passif et ses limites

Pré-requis : (L1 - UE13 -polycopié)

- Savoir faire des mesures de tension (ou courant) en régime continu et/ou alternatif à l'aide d'un multimètre ou d'un oscilloscope.
- Connaître les caractéristiques des signaux dépendant du temps (période, fréquence, déphasage entre deux signaux)
- Revoir le traitement complexe des grandeurs sinusoïdales - notion d'impédance

Bibliographie :

- Guide pratique de l'électronique, par R. Bourgeron, Editions Hachette
- Electrocinétique et électronique, par Bertin et Faroux, Editions Dunod (coll. J'intègre)
- <http://perso.wanadoo.fr/f6crp/elec/index.htm>

A) Partie théorique

1) Introduction :

Dans bien des cas, une expérience de physique consiste au final à extraire un signal électrique et le caractériser (dépendance en temps, en fréquence d'une tension ou d'un courant électrique...). Ceci suppose d'avoir des connaissances à la fois théoriques et expérimentales en électricité et en électronique. C'est le rôle du module de mesures physiques apparaissant en L₁, L₂ et L₃ depuis la réforme LMD. Ce module de deuxième année suppose donc que les notions abordées dans le module mesures physiques de L₁ sont assimilées même si le but de cette 1^{ère} séance est en outre de revoir certaines notions fondamentales comme la caractérisation d'un signal dépendant du temps à l'oscilloscope et la notion de filtrage des signaux électriques.

On abordera dans cette séance la notion de filtrage passif. Un filtre est vu ici comme un quadripôle dans lequel entre un signal $V_e(\omega)$ à une pulsation ω et sort un signal $V_s(\omega)$ à la même fréquence mais atténué d'un facteur qui dépend de ω .



Fig. 1 : représentation schématique d'un filtre

On se limitera à l'étude des filtres passifs ayant une structure en pont diviseur. Nous verrons en particulier que le comportement d'un tel circuit dépend fortement de la présence ou non d'un circuit en amont et/ou en aval.

2) Notion de filtre passif :

Il sera utile de revoir ici la séance 4 du module MPI de 1^{ère} année

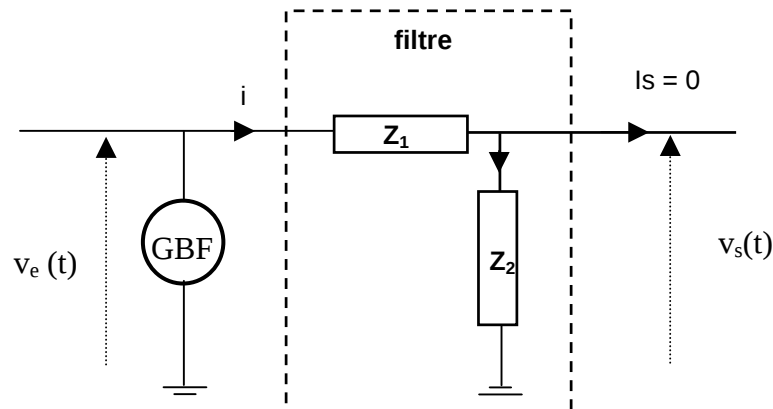


Fig. 2 : filtre passif avec une structure en pont diviseur

$V_e(t)$ est une tension sinusoïdale appliquée à l'entrée et délivrée par un GBF et $V_s(t)$ la tension obtenue à la sortie. Les deux tensions s'écriront en notation trigonométrique $V_e(t) = V_e \sin(\omega t)$ et $V_s(t) = V_s \sin(\omega t + \varphi)$. Les éléments Z_1 et Z_2 sont ici des

En utilisant la notation complexe (notée $\underline{v}_e$) on peut écrire :

$$\underline{v}_e(t) = V_e e^{j\omega t} \quad \underline{v}_s(t) = V_s e^{j(\omega t + \varphi)}$$

On définit la **fonction de transfert du filtre $H(j\omega)$** (ou transmittance $\underline{T}$) telle que :

$$\underline{T} = H(j\omega) = \frac{\underline{v}_s(t)}{\underline{v}_e(t)} = \frac{V_s}{V_e} e^{j\Phi}$$

Φ est le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée ; c'est l'argument du nombre complexe $\underline{v}_s / \underline{v}_e$.

$H(j\omega)$ est une fonction complexe dont le module correspond au gain en tension G_V du filtre :

$$G_V = V_S / V_E = |H(j\omega)|$$

Pour des raisons pratiques, On définit le gain en décibel g_{dB} (dB) sous la forme du logarithme suivant :

$$g_{dB} = 20 \log_{10} G_V \text{ (dB)}$$

Exemple : Si $G_V = 2$ -----> $g_V = 6 \text{ dB}$
 Si $G_V = 10$ -----> $g_V = 20 \text{ dB}$

3) calcul de la fonction de transfert : (à savoir faire absolument pour des cas simples)

Dans le circuit, circule le courant i . On peut donc écrire :

$$\underline{V_e} = \underline{i} \cdot (\underline{Z_1} + \underline{Z_2}) \quad \text{et} \quad \underline{V_s} = \underline{i} \cdot (\underline{Z_2}) = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} \underline{V_e}$$

Par suite on a donc la fonction de transfert qui s'exprime comme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$$

V_s est donc une fraction de la tension V_e , prélevée aux bornes de Z_2 . On reconnaît bien ici les propriétés d'un diviseur de tension où Z_1 et Z_2 sont des impédances quelconques, pouvant contenir des résistances, des condensateurs ou des bobines.

Attention : on a considéré dans le calcul ci-dessus que le courant de sortie i_s était nul. Cela revient à considérer que le filtre fonctionne en sortie ouverte, c'est à dire qu'il est monté en amont d'une impédance infinie.

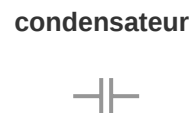
On rappelle que pour les trois composants élémentaires d'un circuit, les impédances complexes sont :



$$\underline{Z_L} = jL\omega$$



$$\underline{Z_R} = R$$



$$\underline{Z_C} = \frac{-j}{C\omega}$$

4) Ordre d'un filtre :

On appelle filtre du 1^{er} ordre, un filtre dont la fonction de transfert peut se mettre sous sa forme la plus réduite comme un rapport de polynômes d'ordre 1 en ω .

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{B_1\omega + B_0}{A_1\omega + A_0}$$

On appelle alors filtre du second ordre un filtre dont la fonction de transfert s'écrit sous sa forme la plus réduite :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{B_2\omega^2 + B_1\omega + B_0}{A_2\omega^2 + A_1\omega + A_0}$$

Nous reviendrons plus loin sur les propriétés spécifiques des filtres d'ordre 1 et 2.

5) Exemples de filtres et définitions :

On peut représenter de façon schématique les diagrammes de Bode de quelques filtres que l'on supposera idéaux. Nous rappelons que le diagramme de Bode représente le gain en dB du filtre en fonction de $\text{Log}(\omega)$.

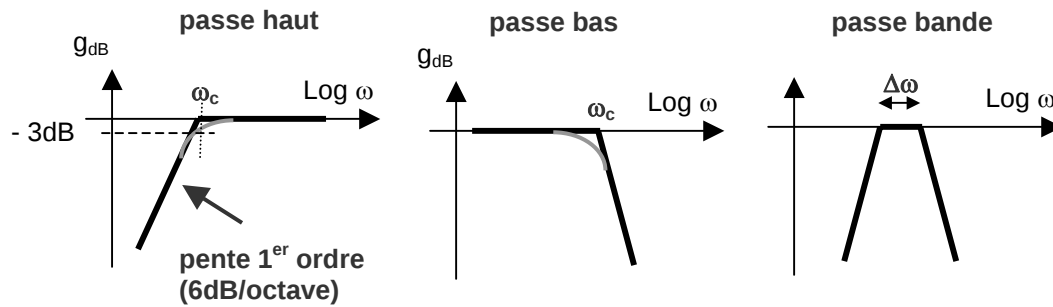


Fig. 3 : diagramme de Bode schématique de quelques filtres

Il apparaît sur les diagrammes ci dessus une pulsation particulière ω_c appelée pulsation de coupure , à partir de laquelle le signal commence à être atténué. Dans le cas de filtre réels, la cassure est moins marquée, et la fréquence (pulsation) de coupure est définie pour un affaiblissement du gain en décibel de 3 dB, c'est à dire un gain en tension G_V tel que :

$$20 \log_{10} G_V = -3 \rightarrow G_V = 1/\sqrt{2}$$

Le filtre est dit : filtre passe bas si $G_V > 1/\sqrt{2}$ pour $\omega < \omega_c$

Le filtre est dit : filtre passe haut si $G_V > 1/\sqrt{2}$ pour $\omega > \omega_c$

La valeur asymptotique de l'atténuation du filtre varie de façon linéaire dans un diagramme de Bode. On peut alors définir la « pente du filtre » qui doit être de 6 dB/octave (i.e. 20 dB/decade) pour un filtre du 1^{er} ordre et de 12 dB/octave (i.e. 40 dB/decade) pour un filtre d'ordre 2.

Exemple : Filtre RC (faire les filtres CR, LC et CL en exercice)

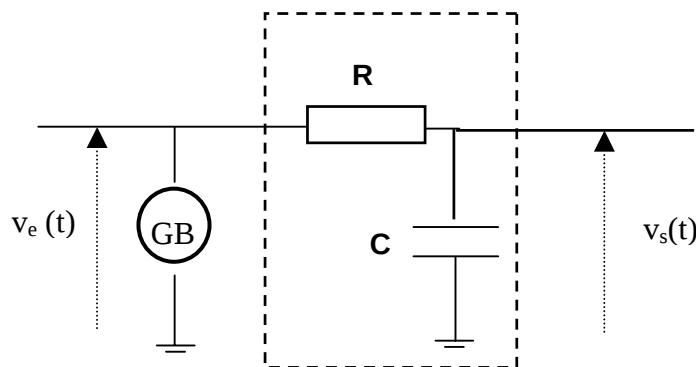


Fig. 4 : filtre RC passif du premier ordre

D'après la figure 2 on peut écrire :

$$v_e(t) = (R - j/C\omega) i(t) \quad \text{et}$$

$$\underline{v_s}(t) = (-j/C\omega) i(t) \quad \text{d'où} \quad H(j\omega) = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{-j/C\omega}{R - j/C\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \left| \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} \right| \exp(j\Phi) \quad (1)$$

$$\left| H(j\omega) \right| = \left| \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} \right| = G_v = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \tan \phi = -RC\omega \quad (2)$$

$$(\text{on peut poser } u = RC\omega \longrightarrow G_v = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}})$$

On constate que :

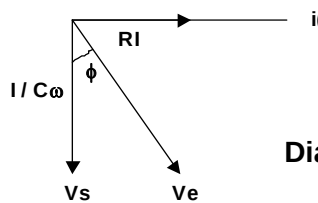
si $\omega \rightarrow 0$ $G \rightarrow 1$ la tension de sortie est identique à la tension d'entrée
 si $\omega \rightarrow \infty$ $G \rightarrow 0$ la tension de sortie est nulle

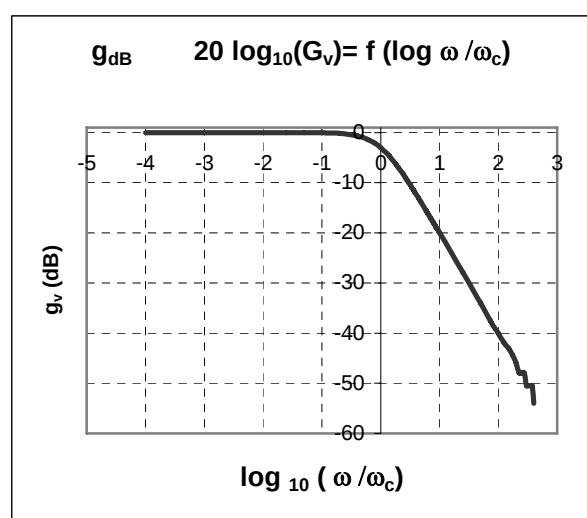
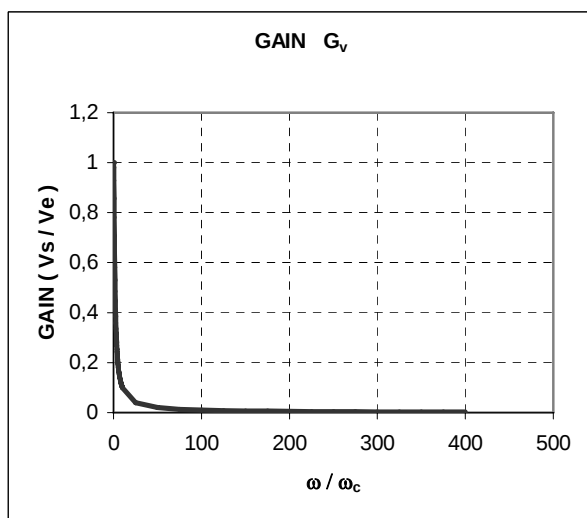
C'est un filtre passe bas.

pulsation de coupure ω_c : $g_v = 20 \log_{10} G_v = -3 \longrightarrow G_v = 1/\sqrt{2}$

Compte tenu de l'eq. (2) $\rightarrow$ $g_v = 20 \log_{10} 1 - 10 \log_{10} (1 + R^2 C^2 \omega^2) = -3$

D'où $1 + R^2 C^2 \omega^2 = 2 \rightarrow$ $\omega_c = 1 / RC$

 Diagramme de Fresnel	ω	0	ω_c	∞
	G_v	1	$1/\sqrt{2}$	0
	ϕ	0	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$



6) Cas d'un courant de sortie non nul – cascade de filtres

Il est intéressant de voir si la mise en cascade de plusieurs filtres identiques conduit à un filtrage plus efficace.

1/ Cas de deux filtres CR idéaux

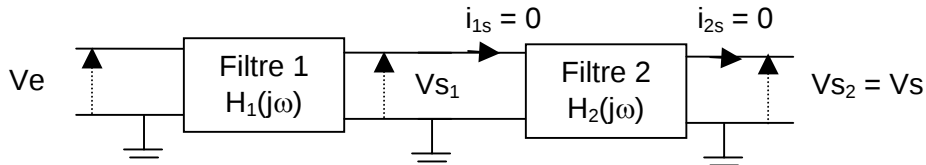


Fig. 5 : cascade de filtres supposés idéaux

Nous supposons ici que les filtres sont idéaux c'est à dire que le courant de sortie pour chaque filtre est négligeable. Dans ce cas, la fonction de transfert totale est simplement le produit des fonctions de transfert individuelles.

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) * \underline{H}_2(j\omega) = \left(\frac{1}{1 - \frac{j}{RC\omega}} \right)^2 \quad \text{et par conséquent} \quad G_V = \frac{1}{1 + \frac{1}{R^2 C^2 \omega^2}} \quad (3)$$

Ce résultat pourrait se généraliser à N filtres en cascades.

2/ Cas de deux filtres CR passifs réels

Dans ce cas le second filtre correspond à une impédance de sortie qui n'est pas infinie. Le courant de sortie du premier filtre n'est alors plus nul, ; il faut faire le calcul explicite :

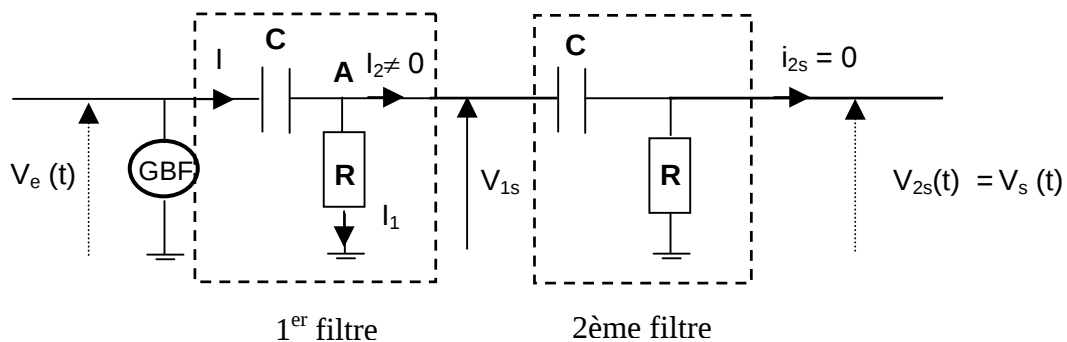


Fig. 6 : cascade de deux filtres CR passifs

En utilisant par exemple le théorème de Millmann au point A on peut écrire :

$$\frac{V_{S2}}{V_{S1}} = \frac{R.I_2}{(R - \frac{j}{C\omega}).I_2} = \frac{R}{R - \frac{j}{C\omega}} = \frac{1}{1 - \frac{j}{RC\omega}}$$

$$\frac{V_{S1}}{V_e} = \frac{R.I_1}{R.I_1 - \frac{j}{C\omega}.I} = \frac{1}{1 - \frac{j}{RC\omega} \cdot \frac{I}{I_1}} \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{\frac{V_{S2}}{V_e} = H(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{j}{RC\omega}} \times \frac{1}{1 - \frac{j}{RC\omega} \cdot (\frac{I}{I_1})}}$$

Le rapport I/I_1 peut se réécrire : $\frac{I}{I_1} = 1 + \frac{I_2}{I_1}$

On remarque alors que si I_2 est nul, on retrouve bien la fonction de transfert d'une cascade de deux filtres idéaux.

Il est intéressant d'exprimer le rapport I_1/I_2 en fonction des impédances des différents éléments du filtre :

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{1 + \frac{Z_C}{Z_R}} = \frac{1}{1 - \frac{j}{RC\omega}}$$

Attention : ce rapport dépend donc en fait de la fréquence, de par la forme de Z_C .

Le calcul du module de la fonction de transfert conduit alors à l'expression du gain de la cascade après quelques efforts

$$G_V = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{1}{R^2 C^2 \omega^2})^2 + \frac{9}{R^2 C^2 \omega^2}}}$$

On constate qu'à très basse fréquence, on retrouve le comportement d'un filtre d'ordre 2 avec une pente de 12db par octave. (vérifiez que le développement asymptotique tend vers l'expression (3)).

Conclusion:

La mise en œuvre de filtres passifs est donc adaptée si d'une part l'impédance du générateur d'entrée est faible ($< 100 \Omega$) et d'autre part si l'impédance de la charge du filtre est forte ($> 1 \text{ k}\Omega$).

Dans le cas contraire, il est nécessaire d'utiliser des filtres actifs, comportant des sources d'énergie qui permettent d'éviter de perdre la puissance débitée sur les différentes charges et éventuellement d'amplifier les signaux en plus de les filtrer. Ceci est possible en réalisant des structures de filtres plus complexes à base d'ampli Op. (voir séance 3)