

Pourquoi Poincaré revient-il en 1903 sur la question de la dimension de l'espace ?

« Poincaré 1903 », lecteur de « Poincaré 1898 »

Les deux voies du conventionalisme de Poincaré

- La question de l'espace – le conventionnalisme géométrique
- La question des hypothèses en physique – le conventionalisme physique

Les deux moments du conventionalisme géométrique

- Le statut des axiomes de la géométrie – apparition du mot « convention »
- Une psycho-genèse de la géométrie et de l'espace – deux références : S. Lie et H. Helmholtz.



Jules Henri Poincaré



Sophus Lie



Hermann von Helmholtz

Une chronologie des contributions de Poincaré liées à la question philosophique de l'espace

- 1887 Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie (*RSMF*)
- 1891 Les géométries non euclidiennes (*RSPA*)
- 1892 Sur les géométries non euclidiennes (*RSPA*)
- 1895 L'espace et la géométrie (*RMM*)
- 1897 Réponse à quelques critiques (*RMM*)
- 1898 *On the foundations of geometry (Monist)* – trad. fr. 1921.
- 1899 Des fondements de la géométrie ; à propos d'un livre de M. Russell (*RMM*)
- 1900 Sur les principes de la géométrie ; réponse à M. Russell (*RMM*)
- 1900 Note in *Traité de géométrie* de Rouché-Comberousse
- 1902 Les fondements de la géométrie (*BSM & JS*)

- 1903 L'espace et ses trois dimensions (I) (*RMM*)
- 1912 Pourquoi l'espace a trois dimensions ? (*RMM*)
- 1912 L'espace et le temps (*Scientia*)
- +
- 1902 *L'espace*, deuxième partie de *La Science et l'hypothèse* (1902), chapitre III, les géométries non euclidiennes, chapitre IV, l'espace et la géométrie, chapitre V, l'expérience et la géométrie.
- 1905 Chapitre III, La notion d'espace et chapitre IV, L'espace et ses trois dimensions de *La Valeur de la science* (1905).
- 1913 Chapitre II, L'espace et le temps et chapitre III, Pourquoi l'espace a trois dimensions de *Dernières pensées* (1913).

Pour mémoire, les thèses essentielles du conventionalisme géométrique de Poincaré concernant le statut des axiomes de la géométrie

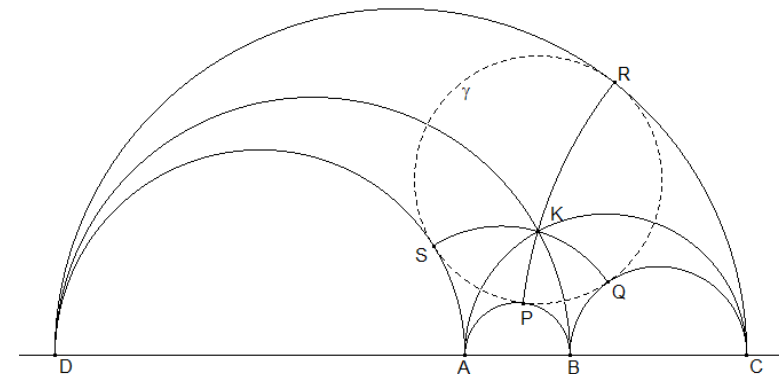
- Les axiomes de la géométrie ne sont ni des « jugements synthétiques a priori », ni des « vérités expérimentales » mais des *conventions* :
« Notre choix, parmi toutes les conventions possibles, est guidé par des faits expérimentaux ; mais il reste libre et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction. » [Poincaré 1902 – *La Science et l'hypothèse*]
- L'étude de la géométrie n'est que l'étude d'un groupe (de transformations).
- La géométrie euclidienne est la plus *commode* pour rapporter nos sensations et les phénomènes physiques :
« Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être plus *commode*. » [Poincaré 1902 – *La Science et l'hypothèse*]

Le modèle de Poincaré et le « dictionnaire »

Considérons un certain plan que j'appellerai fondamental et construisons une sorte de dictionnaire, en faisant correspondre chacun à chacun une double suite de termes écrits dans deux colonnes, de la même façon que se correspondent dans les dictionnaires ordinaires les mots de deux langues dont la signification est la même :

<i>Espace.</i>	Portion de l'espace située au-dessus du plan fondamental.
<i>Plan.</i>	Sphère coupant orthogonalement le plan fondamental.
<i>Droite.</i>	Cercle coupant orthogonalement le plan fondamental.
<i>Sphère.</i>	Sphère.
<i>Cercle.</i>	Cercle.
<i>Angle.</i>	Angle.
<i>Distance de deux points.</i>	Logarithme du rapport anharmonique de ces deux points et des intersections du plan fondamental avec un cercle passant par ces deux points et le coupant orthogonalement.
etc...	etc...

Prenons ensuite les théorèmes de Lowatchewski et traduisions-les à l'aide de ce dictionnaire comme nous traduirions un texte allemand à l'aide d'un dictionnaire allemand-français. *Nous obtiendrons ainsi des théorèmes de la géométrie ordinaire.*



Deux moments de la réflexion de Poincaré sur la théorie de l'espace :

- Une réflexion de caractère philosophique sur le statut des axiomes de la géométrie
- Une théorie psycho-physio-logico-mathématique de la genèse de la géométrie et de l'espace

« Je me suis demandé quel est le véritable caractère des vérités géométriques et en particulier du *postulatum* d'Euclide. [...] J'ai recherché également à analyser l'origine psychologique de la notion d'espace. » [Poincaré 1901, *Analyse de ses travaux*]

Une genèse en deux moments

- Un premier moment essentiellement psycho-physiologique : notre expérience suscite notre capacité innée à former des groupes.
« L'ensemble des déplacements forme un groupe ». [Poincaré 1898, Des Fondements de la géométrie]
« Ce qui est l'objet de la géométrie, c'est l'étude d'un « groupe » particulier ; mais le concept général de groupe préexiste dans notre esprit au moins en puissance. Il s'impose à nous , non comme une forme de notre sensibilité, mais comme une forme de notre entendement. » [Poincaré 1902, *La Science et l'hypothèse*]
- Un second moment mathématique – La question du choix du groupe.
La déduction des éléments géométriques (point, droite, plans), de la notion d'espace et de ses propriétés à partir de la seule notion de groupe.

« Comme Lie, je crois que la notion plus ou moins inconsciente du groupe continu est la seule base logique de notre géométrie. Comme Helmholtz, je crois que l'observation des mouvements des corps solides en est l'origine psychologique. Mais je ne fais pas pour cela dériver la géométrie de l'expérience ; loin de là. Les expériences sur les solides n'ont été que l'occasion qui, parmi tous les groupes continus dont nous aurions pu faire une géométrie, nous a fait choisir le groupe euclidien, non comme le seul vrai, mais comme le plus commode. » [Poincaré 1901, Analyse de ses travaux]

Une première catégorie – L'espace représentatif (ou sensible)

- Les sensations n'ont par elles-mêmes, aucun caractère de spatialité, ni de direction. Une thèse sur laquelle Poincaré ne reviendra jamais :

« J'écarterai d'abord l'idée d'un prétendu sens de l'espace qui nous ferait localiser nos sensations dans un espace tout fait, dont la notion préexisterait à toute expérience, et qui avant toute expérience aurait toutes les propriétés de l'espace du géomètre. Qu'est-ce en effet que ce prétendu sens de l'espace ? »
[Poincaré 1912]

Et Poincaré poursuit

Quand nous voulons savoir si un animal le possède, quelle expérience faisons-nous ? Nous plaçons dans son voisinage des objets qu'il convoite, et nous regardons s'il sait faire sans tâtonnement les mouvements qui lui permettent de les atteindre. Et comment voyons-nous que les autres hommes sont doués de ce précieux sens de l'espace ? c'est parce qu'eux aussi, ils sont capables de contracter leurs muscles à propos pour atteindre les objets dont la présence leur

est révélée par certaines sensations. Qu'y a-t-il de plus quand nous constatons le sens de l'espace dans notre propre conscience ? Ici, encore, en présence de sensations variées, nous savons que nous pourrions faire des mouvements qui nous permettraient d'atteindre les objets que nous regardons comme la cause de ces sensations, et par là d'agir sur ces sensations, les faire disparaître ou les rendre plus intenses ; la seule différence c'est que pour le savoir, nous n'avons pas besoin de faire effectivement ces mouvements, il nous suffit de nous les représenter. Ce sens de l'espace que l'intelligence serait impuissante à exprimer, ne pourrait être que je ne sais quelle force qui résiderait dans le tréfonds de l'inconscient, et alors cette force ne pourrait nous être connue que par les actes qu'elle provoque ; et ces actes ce sont précisément les mouvements dont je viens de parler. Le sens de l'espace se réduit donc à une association constante entre certaines sensations et, certains mouvements, ou à la représentation de ces mouvements. (Est-il besoin, afin d'éviter une équivoque sans cesse renaissante, malgré mes explications réitérées, de répéter une fois de plus que j'entends par là non la représentation de ces mouvements dans l'espace, mais la représentation des sensations qui les accompagnent ?)

- L'espace représentatif est le cadre dans lequel nous rangeons et classons qualitativement nos sensations

« Voilà donc la première catégorie [l'espace représentatif] à laquelle nos sensations sont rapportées. On peut se la représenter comme composée d'un grand nombre de systèmes absolument indépendants les uns des autres. De plus, elle nous permet seulement de comparer entre elles des sensations de même espèce et non de les mesurer, de percevoir qu'une sensation est plus grande qu'une autre sensation, mais qu'elle est deux fois plus grande ou trois fois plus grande. » [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

- Ne pas confondre l'espace représentatif et l'espace géométrique.

« Voyons donc comment nous pourrions nous élever de cette catégorie brute [...] à l'espace géométrique. » [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

- Nos représentations qui ne peuvent être que des reproductions de nos sensations se rangent dans l'espace représentatif. L'espace géométrique est la catégorie de l'entendement avec laquelle nous raisonnons spatialement :

« Nous ne nous représentons pas les corps extérieurs dans l'espace géométrique, mais nous raisonnons sur ces corps, comme s'ils étaient situés dans l'espace géométrique. »
[Poincaré 1902, *La Science et l'hypothèse*]

- Localiser un objet,

« cela signifie simplement que nous nous représentons les mouvements qu'il faut faire pour atteindre qu'il faut faire pour atteindre cet objet ; et qu'on ne nous dise pas que pour se représenter ces mouvements, [...], la notion d'espace [géométrique] doit, [...], préexister.

Quand je dis que nous nous représentons ces mouvements, je veux seulement dire que nous nous représentons les sensations musculaires qui les accompagnent et qui n'ont aucun caractère géométrique, qui par conséquent n'impliquent nullement la préexistence de la notion d'espace [géométrique]. » [Poincaré 1902, *La Science et l'hypothèse*]

Les déplacements

- *Changements externes* (non-accompagnés de sensations musculaires/*Changements internes* (volontaires et accompagnés de sensations musculaires))
- Certains changements externes peuvent être corrigés par un changement interne, ce sont les *déplacements*. (Les autres sont les changements d'état)

« Parmi les objets qui nous entourent, il y en a qui nous éprouvent fréquemment des déplacements susceptibles d'être ainsi corrigés par un mouvement *corrélatif* de notre propre corps, ce sont les *corps solides* » [Poincaré 1902, *La Science et l'hypothèse*]

« Un être qui ne pourrait pas se mouvoir serait incapable de faire cette distinction. Un tel être, par conséquent, ne pourrait jamais créer la géométrie, même si ses sensations étaient variables et même si les objets qui l'entourent étaient mobiles. » [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

Le groupe des déplacements

« La classification nous amène en outre à reconnaître l'identité de deux déplacements et il en résulte qu'un déplacement peut être *répété* deux ou plusieurs fois. C'est cette circonstance qui introduit le nombre et permet la mesure là où régnait la pure quantité. » [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

- Possibilité de combiner les déplacements

« [...] nous sommes libres de regarder l'*ensemble* des deux changements A suivi de B comme un seul changement [...]. Les mathématiciens expriment cela en disant que l'*ensemble des déplacements forme un groupe*. S'il n'en était pas ainsi il n'y aurait pas de géométrie » [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

- Lois obtenues par un raisonnement *a priori* ? par expérience ?

Nécessité de la compensation pour obtenir cette loi et nécessité qu'elle ne soit pas approximative. Donc, ni donnée par un raisonnement *a priori* ni par expérience.

Des conventions

« Les lois en question ne nous sont pas imposées par la nature, mais sont imposées par nous à la nature. Mais si nous les imposons à la nature, c'est parce qu'elle nous permet de le faire. Si elle offrait trop de résistance, nous chercherions dans notre arsenal une autre forme qui serait pour elle plus acceptable. » [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

- Imposition à la nature des compensations et des lois par une opération active de notre esprit au moyen d'éléments conventionnels.

« Quand l'expérience nous apprend qu'un certain phénomène ne correspond pas du tout aux lois indiquées, nous l'effaçons de la liste des déplacements. Quand elle nous apprend qu'un certain changement ne leur obéit qu'approximativement, nous considérons ce changement par une convention artificielle, comme la résultante de deux autres changements. Le premier composant est regardé comme un déplacement satisfaisant rigoureusement aux lois dont je viens de parler, tandis que le second composant, qui est petit, est regardé comme une altération qualitative. » [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

Le choix du groupe

- Un choix conventionnel guidé par l'expérience
Une étude expérimentale des lois suivant lesquelles se composent les déplacements.
- Les déplacements se comportent comme un groupe de transformations d'ordre 6 (un groupe dépendant de 6 paramètres)
« L'expérience nous apprend seulement que les déplacements se comportent à peu près comme les substitutions d'un groupe d'ordre 6. Ce n'est donc pas l'expérience qui nous fournit la notion de groupe. Cette notion préexiste ou plutôt ce qui préexiste dans l'esprit c'est la puissance de former cette notion. L'expérience n'est pour nous qu'une occasion d'exercer cette puissance. Elle nous apprend que parmi tous les groupes simples que nous pouvons former, c'est un certain groupe qui s'écarte le moins de l'observation. » [Poincaré 1897, *Réponse à certaines critiques (RMM)*]

Le choix du groupe (2)

- Sous groupes rotatifs, faisceaux rotatifs, etc.

« L'ensemble des déplacements qui conservent ainsi un système donné de sensations forme évidemment un sous-groupe que nous pouvons appeler sous-groupe rotatif. Telle est la conclusion que nous tirons de l'expérience. Il est inutile de faire ressortir combien l'expérience est grossière et combien d'autre part la conclusion est précise. L'expérience ne peut donc pas nous imposer la conclusion, mais elle suffit à nous la suggérer. »

« toute rotation peut être décomposée en trois autres, appartenant respectivement à trois faisceaux rotatifs donnés. »

« [...] avec ces propositions, nous sommes en mesure [...] de limiter notre choix à un choix entre la géométrie d'Euclide, et celles de Lobatchewsky ou de Riemann. »

[Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

- Un usage intensif des théories de Lie et de sa classification des groupes de transformations de $\mathbf{R}^3$ qui admettent un unique invariant significatif entre deux points.

Le choix du groupe euclidien

- Une dernière propriété nous guide vers le groupe euclidien :

« Pour aller plus loin, nous avons besoin d'une nouvelle proposition qui prennent la place du *postulatum* des parallèles. La proposition qui en tiendra lieu sera l'affirmation de l'existence d'un sous-groupe invariant dont tous les déplacements sont échangeables et qui formé de toutes les translations. C'est là ce qui détermine notre choix en faveur de la géométrie d'Euclide, parce que le groupe qui correspond à la géométrie de Lobatchewsky ne contient pas un tel sous-groupe invariant. » [Poincaré 1898, Des Fondements de la géométrie]
- Le choix du groupe (de la géométrie) s'effectue en étudiant les propriétés formelles (c'est-à-dire les propriétés communes à une classe de groupes isomorphes) du groupe des déplacements sans supposer un quelconque espace géométrique.

Le Théorème de Lie. –

« Le nombre des axiomes implicitement introduits dans les démonstrations classiques est plus grand qu'il ne serait nécessaire, et il serait intéressant de le réduire au minimum. On peut se demander d'abord si cette réduction est possible, si le nombre des axiomes nécessaires et celui des géométries imaginables n'est pas infini.

Un théorème de M. Sophus Lie domine toute cette discussion. On peut l'énoncer ainsi :

Supposons qu'on admette les prémisses suivantes :

1° L'espace a n dimensions.

2° Le mouvement d'une figure invariable est possible.

3° Il faut p conditions pour déterminer la position de cette figure dans l'espace.

Le nombre de géométries compatibles avec ces prémisses sera limité. »

[Poincaré 1891, 772-3]

La classification des groupes de transformations admettant un invariant et opérant sur $\mathbf{R}^3$ [Lie-Engel 1893]

- 1. $p, q, r, xq - yp, yr - zq, zp - xr$
- 2. $p, q, r, xq - yp, yr - zq, zp + xr$
- 3. $p + xU, q + yU, r + zU, xq - yp, yr - zq, zp - xr$
- 4. $p - xU, q - yU, r - zU, xq - yp, yr - zq, zp - xr$
- 5. $p - xU, q - yU, r + zU, xq - yp, yr + zq, zp + xr$
- 6. $p, q, xp + yq + cr, yp - xq + r, (x^2 - y^2)p + 2xyq + 2(cx - y)r, 2xyp + (y^2 - x^2)q + 2(x + cy)r$
- 7. $p, q, xp + yq + r, yp - xq, (x^2 - y^2)p + 2xyq + 2xr, 2xyp + (y^2 - x^2)q + 2yr$
- 8. $p, q, xq + r, yq + cr, x^2p + 2xr, y^2p + 2cyr \quad (c \neq 0)$
- 9. $p, q, xq + r, x^2q + 2xr, xp + yq + cr, x^2p + 2xyq + 2(y + cx)r$
- 10. $p - yr, q + xr, r, xq, xp - yq, yp$
- 11. $p, q, r, xp + yr, 2xp + yq, x^2p + 2xyq + \frac{1}{2}y^2r \quad (U = xp + yq + zr)$

L'espace géométrique et ses propriétés

- Les éléments géométriques proviennent de l'étude de la structure du groupe des déplacements.
- Les sous-groupes rotatifs sont à l'origine de la notion de point.
- Les faisceaux rotatifs sont à l'origine de la notion de droites.
- Selon Poincaré, la donnée de l'espace géométrique comme *multiplicité numérique* n'est pas une nécessité.

« Nous devons la théorie que je viens d'esquisser à Helmholtz et à Lie. Je ne diffère d'eux que sur un point ; [...] Comme je l'ai expliqué plus haut, nous devons distinguer dans un groupe la forme et la matière. Pour Helmholtz et Lie la matière du groupe existait avant la forme et en géométrie la matière est une *Zahlenmannigfaltigkeit* à trois dimensions. *Le nombre de dimensions est donc posé antérieurement au groupe.* Pour moi, au contraire la forme existe avant la matière. » [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

La dimension de l'espace géométrique

Même, la dimension de l'espace géométrique est conventionnelle :

- 3 catégories de sous-groupes : les sous-groupes de rotations (d'ordre 3), les vissages (d'ordre 2) et les faisceaux rotatifs (d'ordre 1)
- Selon que l'on considère l'opération (par automorphismes intérieurs) du groupe des déplacements sur ces groupes, l'espace de la géométrie sera de dimension 3, 4 ou 5.

« Ce sont là trois solutions dont chacune est possible logiquement. Nous préférons la première parce qu'elle est la plus simple et elle est la plus simple parce qu'elle est celle qui donne à l'espace le nombre le plus petit de dimensions. Mais il y a une autre raison qui recommande ce choix ; le sous-groupe rotatif attire d'abord notre attention parce qu'il conserve certaines sensations. Le sous-groupe hélicoïdal ne nous est connu que plus tard et indirectement. Le faisceau rotatif d'autre n'est lui-même qu'un sous-groupe du sous-groupe rotatif. » [Poincaré 1898, Des Fondements de la géométrie]

Cette dernière citation fait écho à ce passage de *La Science et l'Hypothèse* :

« Or la géométrie euclidienne est et restera la plus commode :

1° Parce qu'elle la plus simple ; et elle n'est pas telle seulement par suite de nos habitudes d'esprit ou de je ne sais quelle intuition directe que nous aurions de l'espace euclidien ; elle est la plus simple en soi de même qu'un polynôme du premier degré est plus simple qu'un polynôme du second degré ; les formules de la trigonométrie sphérique sont plus compliquées que celles de la trigonométrie rectiligne, et elles paraîtraient encore telles à un analyste qui en ignorerait la signification géométrique.

2° Parce qu'elle s'accorde assez bien avec les propriétés des solides naturels, ces corps dont se rapprochent nos membres et notre œil et avec lesquels nous faisons nos instruments de mesure » [Poincaré, *Science et hypothèse*, 76]

En résumé,

En 1898, l'idée centrale est celle de groupe de transformations.

Un groupe de transformations opère sur un espace. (*forme/matière*)

Poincaré insiste pour signaler que l'originalité de sa théorie réside dans le fait qu'il accorde, au contraire de ses prédécesseurs, la priorité au groupe.

Poincaré annonce qu'il échappe aussi de cette façon à une objection qui a souvent été faite à Helmholtz et à Lie :

« Mais votre groupe, objecte-on, présuppose l'espace ; pour le construire vous êtes obligés d'admettre un continu à trois dimensions. » [...]

[...] C'est seulement par l'introduction du groupe qu'ils en ont fait une grandeur mesurable, c'est-à-dire un véritable espace. Cependant l'origine de ce continu non mesurable à trois dimensions reste imparfaitement expliquée.

[Poincaré 1898, Des Fondements de la géométrie]

Un cercle vicieux

Mais en 1903, Poincaré ne reprend pas cette affirmation :

« Toutes les géométries que j'envisageais avaient ainsi un fond commun, ce continuum à trois dimensions qui étaient le même pour toutes et qui ne se différenciait que par les figures qu'on y traçait ou quand on prétendait le mesurer » [Poincaré 1903, 281]

Pourquoi ?

- La raison « officielle » :

« [...] j'ai surtout insisté sur les problèmes soulevés par la géométrie non-euclidienne, en laissant presque complètement de côté d'autres questions plus difficiles à aborder, telles que celles qui se rapportent au nombre des dimensions. » [Poincaré 1903, 281]

- De manière plus crédible, la nécessité de sauver la construction d'un cercle vicieux assez grossier. Il est difficile de justifier d'utiliser la classification des groupes de Lie opérant sur $\mathcal{R}^3$ et admettant un invariant significatif pour démontrer que l'espace est de dimension 3 et que l'on n'a pas besoin de la donnée préalable d'un espace...

- En 1903, Poincaré continue à défendre que les axiomes géométriques sont des conventions mais admet l'existence d'un « fond commun » aux géométries euclidiennes et non-euclidiennes, un continuum amorphe.
- Une question naturelle : « Ce continuum amorphe, que notre analyse a laissé subsister, n'est-il pas une forme imposée à notre sensibilité ? Nous aurions élargi la prison dans laquelle cette sensibilité est enfermée, mais ce serait toujours une prison. » [Poincaré 1903, 285]
- Les mêmes questions que celles antérieurement posées à la géométrie euclidienne le sont concernant l'*Analysis situs* (la géométrie du continuum) :
« Peuvent-ils [les axiomes de l'*Analysis situs*] être obtenus par un raisonnement déductif ? Sont-ce des conventions déguisées ? Sont-ce des vérités expérimentales ? Sont-ils les caractères d'une forme imposées soit à notre sensibilité, soit à notre entendement ? » [Poincaré 1903, 285]

Comment sauver la construction précédente ?

- Retour sur le continu physique et introduction d'une notion de dimension topologique pour répondre à la question la plus importante de l'Analysis situs, « quand nous disons que l'espace a trois dimensions, qu'est-ce que nous voulons dire ? » [Poincaré 1903, 286]
- Les coupures (le point est de dimension 0, un continuum est de dimension n s'il est divisé par un continuum de dimension $n - 1$. NB : nécessité d'une définition de la discernabilité des éléments.
- Reprise du raisonnement précédent jusqu'aux déplacements (grosso modo la partie physiologique). La détermination des déplacements suscite deux capacités « de notre esprit » : la capacité de former des groupes et celle de former des continus. Les déplacements forment un groupe continu.

- Le continuum physique qui suscite le continu mathématique du groupe des déplacements a 6 dimensions. Le groupe est à 6 paramètres. « Il serait aisé de décrire les expériences par lesquelles nous pourrions arriver à ce résultat » [Poincaré 1903, 410]
- C'est une donnée première mais ce n'est pas suffisant pour comprendre pourquoi l'espace a trois dimensions.
- Définir la notion de point et d'identité de deux points. Un retour à la physiologie et à l'espace représentatif. Se représenter la série « de sensations musculaires qui accompagneraient les mouvements qui permettraient d'atteindre ce point » [Poincaré 1903, 293] (espace moteur). Une question, comment décider si deux séries de sensations musculaires représentent le même point ?
- On immobilise notre corps (absence de sensations musculaires), identité de certaines sensations visuelles et de certaines sensations musculaires.

- Etude de l'espace visuel ; un espace de dimension (topologique) trois (sensations rétinienne, sensations de convergence, sensations d'accomodement).
- Etude de l'espace tactile ; un espace de dimension (topologique) trois.
- Un continuum à trois dimensions sur lequel la suite du raisonnement peut se poursuivre modulo l'abandon de la discussion sur la dimension.
- Une discussion sur le caractère conventionnel de la dimension (la quatrième dimension).

« Je crois donc que si par espace on entend un continu mathématique à trois dimensions, fût-il d'ailleurs amorphe, c'est l'esprit qui le construit, mais il ne le construit pas avec rien, il lui faut des matériaux et des modèles. Ces matériaux comme ces modèles préexistent en lui. Mais il n'y a pas un modèle unique qui s'impose à lui ; il a du *choix* ; il peut choisir par exemple entre l'espace à quatre et l'espace à trois dimensions. Quel est alors le rôle de l'expérience ? C'est elle qui lui donne les indications d'après lesquelles il fait son choix. » [Poincaré 1903, 427]