

La théorie de l'espace de Poincaré

Philippe Nabonnand¹

1) Introduction

La thèse essentielle du conventionalisme géométrique de Poincaré est bien connue : les axiomes de la géométrie ne sont ni synthétiques a priori, ni empiriques ; ils sont des conventions. Cette thèse implique que la question de la vérité en géométrie n'a pas de sens. On peut seulement poser celle de la commodité des géométries. Poincaré soutient une ligne philosophique médiane entre criticisme et empirisme. Il refuse à la fois la doctrine kantienne selon laquelle les axiomes de la géométrie sont synthétiques a priori et les thèses empiristes.

Pour Poincaré, l'étude de la géométrie n'est que l'étude d'un groupe (de transformations). Dire que la géométrie euclidienne est la plus commode signifie que parmi les groupes possibles, celui constitué par les transformations de la géométrie euclidienne correspond le mieux à notre expérience et en particulier au mouvement des corps solides naturels.

Comme Lie, je crois que la notion plus ou moins inconsciente du groupe continu est la seule base logique de notre géométrie. Comme Helmholtz, je crois que l'observation des mouvements des corps solides en est l'origine psychologique. Mais je ne fais pas pour cela dériver la géométrie de l'expérience; loin de là. Les expériences sur les solides n'ont été que l'occasion qui, parmi tous les groupes continus dont nous aurions pu faire une géométrie, nous a fait choisir le groupe euclidien, non comme le seul vrai, mais comme le plus commode. [Poincaré 1901, 127]

Poincaré n'exclut pas que d'autres expériences pourraient nous amener à adopter une autre géométrie. Ainsi, il imagine un monde dont les habitants seraient guidés vers la géométrie non euclidienne [Poincaré 1902, 88-91]. Poincaré insiste très clairement sur le fait qu'il ne s'agit pas de différences qualitatives des sensations (les sensations n'ont aucun caractère spatial chez Poincaré). Il décrit un processus d'acquisition de la spatialité à partir d'association et de succession de sensations et montre que c'est le choix de ces associations et successions qui conduit à concevoir des géométries différentes et non pas une quelconque différence qualitative des sensations.

La notion de l'espace ne peut donc faire partie intégrante d'aucune de nos sensations prise isolément. C'est seulement quand nous observons l'ordre dans lequel ces sensations se succèdent que cette notion peut prendre naissance. Or s'il est absurde de supposer que nous puissions imaginer des sensations différentes de nos sensations normales, nous pouvons au contraire avec quelque effort imaginer une succession de sensations, pareilles individuellement à nos sensations normales, mais se succédant dans un ordre anormal. Nous pouvons imaginer que ces sensations suivent d'autres lois et par exemple qu'elles s'ordonnent, non conformément à la structure du groupe euclidien, mais conformément à la structure d'un autre groupe. Des êtres qui éprouveraient nos sensations normales dans un ordre anormal, créeraient une géométrie différente de la nôtre. [Ibid, 127-128]

L'épistémologie de Poincaré est adossée à une genèse psycho-physiologique de la géométrie qui utilise intensivement la théorie des groupes de transformations (au sens de Lie). Lorsqu'il rend

¹¹ Université de Nancy-Archives Poincaré.

compte de ses travaux philosophiques dans l'analyse de ses travaux scientifiques [1901], Poincaré insiste sur les deux moments de sa réflexion sur la théorie de l'espace et sur leur complémentarité.

Je me suis demandé quel est le véritable caractère des vérités géométriques et en particulier du postulat d'Euclide. [...] J'ai recherché également à analyser l'origine psychologique de la notion d'espace. [Poincaré 1901, 127]

La genèse psycho-physiologique de l'espace vient appuyer son conventionnalisme et s'inscrit dans ce que l'on pourrait appeler un antiréalisme spatial radical : non seulement, l'espace n'a aucune réalité externe, mais il n'est pas non plus le produit d'une forme de notre sensibilité. Dans un premier temps [1898], Poincaré fait dériver toutes les propriétés de l'espace de l'étude du groupe des déplacements vers lequel nous guident nos expériences motrices. Un peu plus tard, il est amené à réviser sa théorie et à défendre l'idée qu'une notion première d'espace liée à notre expérience tactile précède la genèse et l'étude du groupe des déplacements.

2) L'espace sensible et les déplacements

Selon Poincaré – et en cela il suit les résultats de la physiologie naissante du 19^e siècle – une sensation n'est que l'excitation d'un nerf. Les sensations n'ont donc par elles-mêmes aucun caractère géométrique et spatial. La notion d'espace est le résultat d'une élaboration intellectuelle dans laquelle l'expérience (et c'est son seul rôle) fournit à l'esprit les occasions d'exercer les capacités innées qui vont être nécessaires au processus de construction. Poincaré suppose une catégorie de l'entendement qu'il nomme « espace sensible » ou « espace représentatif » dont la fonction est de classer les sensations et de permettre la comparaison qualitative des sensations de même espèce :

Cette catégorie (l'espace sensible) doit-elle être regardée comme une « forme de notre sensibilité » ? Non, si l'on entend par là que nos sensations, considérées individuellement, ne pourrait pas exister sans elle. Elle ne nous devient nécessaire que pour comparer nos sensations, pour raisonner sur nos sensations. Elle est donc plutôt une forme de notre entendement.

Voilà donc la première catégorie à laquelle nos sensations sont rapportées. On peut se la représenter comme composée d'un grand nombre de systèmes absolument indépendants les uns des autres. De plus, elle nous permet seulement de comparer entre des sensations de même espèce et non de les mesurer, de percevoir qu'une sensation est plus grande qu'une autre sensation, mais non qu'elle est deux fois plus grande ou trois fois plus grande. [Poincaré 1898, 6]

Poincaré souligne la grande différence qu'il y a entre la catégorie « brute » qu'est l'espace sensible et l'espace géométrique. Ainsi, les espaces associés aux sensations relevant de nos sens visuel ou tactile et qui étaient au centre des discussions entre physiologistes ([Delbœuf 1877], [Dunan 1888a et b], [Ferré 1885], [de la Rive 1889]), n'ont pas les mêmes propriétés d'infinité, d'homogénéité ou d'isotropie, ni pour certains le même nombre de dimensions que l'espace géométrique. Poincaré va développer une théorie génétique qui rendra compte du passage de l'espace sensible à l'espace géométrique. Dans cette théorie, suivant en cela certains physiologistes dont T. Ribot [1879] ou E. Gley [1885], Poincaré privilégie les successions de sensations musculaires et l'espace moteur. Dans l'espace sensible, les successions et les variations de sensations s'organisent ; en particulier, deux types de changements de sensation apparaissent :

1° Les premiers sont indépendants de notre volonté et ne sont pas accompagnés de sensations musculaires. Ce sont des changements externes, pour ainsi dire.

2° Les autres sont volontaires et accompagnés de sensations musculaires. Nous pouvons les appeler les changements internes. [Poincaré 1898, 9]

Ces deux types de changements peuvent être liés par la relation de correction : un changement externe peut être corrigé par un changement interne si ce dernier « rétablit nos impressions primitives » antérieures au changement externe. Poincaré distingue donc parmi les changements externe ceux « qui sont susceptibles d'être corrigés par un changement interne » qu'il appelle les déplacements et ceux qui ne le sont pas qu'il dénomme les changements d'état. La classe des déplacements est celle à partir de laquelle va se constituer nos repères géométriques et notre perception spatiale. La détermination de cette classe est une condition nécessaire à la possibilité de la géométrie :

Un être qui ne pourrait pas se mouvoir serait incapable de faire cette distinction [entre déplacement et changement d'état]. Un tel être, par conséquent, ne pourrait jamais créer la géométrie, -- même si ses sensations étaient variables et même si les objets qui l'entourent étaient mobiles. [Poincaré 1898, 9]

Poincaré poursuit sa reconstruction de la genèse de l'espace en montrant comment notre esprit, une fois délimitée la classe des déplacements, aborde la question de l'égalité entre deux déplacements ; il utilise pour cela la relation qui donne la définition des déplacements et pose que deux déplacements sont égaux s'ils sont compensés par le même changement interne ; il prétend réunir en une même classe les changements externes corrigés par le même changement interne, supposant en cela que la relation « être corrigé par le même changement interne » est transitive, ce qui n'est pas le cas. En effet, les changements externes γ_1 et γ_2 peuvent être corrigés par le changement interne τ , les changements externes γ_2 et γ_3 peuvent être corrigés par le changement interne τ' sans pouvoir conclure que les changements externes γ_1 et γ_3 peuvent être corrigés par un même changement interne. La théorie de Poincaré n'est pas réellement affectée par cette objection, il suffit de remplacer la relation « être corrigé par le même changement interne » par la relation transitive associée, c'est-à-dire considérer que deux changements externes γ et χ sont identiques si et seulement si il existe une suite (finie) de changements externes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ telle que :

$$\gamma = \gamma_1 ; \chi = \gamma_n ; \gamma_i \text{ et } \gamma_{i+1} \text{ sont corrigés par le même changement interne.}$$

On peut développer la même théorie pour les changements internes qui corrigent un changement externe ; on appellera aussi déplacement un changement interne qui corrige un changement externe et on considérera que deux tels changements sont identiques s'ils sont dans la même classe d'équivalence de la relation transitive associée à la relation « corriger le même changement externe ».² Poincaré réunit alors les deux relations et obtient une classification de l'ensemble des

² On notera que Poincaré prend soin à éviter toute circularité : en effet, on pourrait objecter à ce raisonnement que pour identifier deux changements externes qui sont des déplacements, il faut déjà pouvoir identifier les changements internes ; or Poincaré précise bien que le critère d'identification de deux changements internes est l'identité des sensations musculaires qu'ils provoquent :

Mais comment puis-je savoir que les deux changements internes [...] doivent être considérés comme identiques ? Tout simplement parce qu'ils ont provoqué les mêmes sensations musculaires ; et pour cela je n'ai pas besoin de connaître d'avance la géométrie et de me représenter les mouvements de mon corps dans l'espace géométrique. [Poincaré 1898, 9]

déplacements;³ il en conclut que puisque cette classification « nous amène [...] à reconnaître l'identité de deux déplacements », un déplacement peut être itéré et « c'est cette circonstance qui introduit le nombre et permet la mesure là où régnait auparavant la pure qualité »⁴.

Poincaré répond à l'objection qui pourrait être faite à son raisonnement, à savoir que l'expérience ne fournit aucun cas de compensation rigoureuse, en soulignant que la classification des déplacements qu'il obtient n'est pas une « donnée brute » de l'expérience mais nécessite au contraire une « opération active de l'esprit », en particulier l'adoption de conventions :

Cette opération consiste à identifier deux changements parce qu'ils possèdent un caractère commun, et cela malgré qu'ils ne le possèdent pas exactement. Néanmoins, le fait même que l'esprit ait l'occasion d'accomplir cette opération est dû à l'expérience, car l'expérience seule peut lui apprendre que la compensation s'est approximativement produite. [Poincaré 1898, 10]

3) Le groupe de déplacements

Poincaré envisage alors la possibilité de combiner plusieurs déplacements. Si A et B sont des déplacements et sont donc compensés par deux déplacements A' et B' , il est clair que la combinaison $A + B$ de A et B sera compensée par $B' + A'$. La composition de déplacements est donc interne ce que Poincaré traduit par l'affirmation⁵ :

Donc ce changement résultant est par définition un déplacement, ce qui revient à dire que l'ensemble des déplacements forme un groupe. [Poincaré 1898, 10]

Poincaré revient sur le caractère approximatif des compensations et insiste sur les conventions nécessaires pour pouvoir considérer que les déplacements forment un groupe de transformations. L'adoption de ces conventions résulte de la mise en œuvre de capacités de notre esprit ; en ce sens, l'affirmation que les déplacements forment un groupe n'est pas « le résultat d'un raisonnement a priori », et n'est pas non plus une vérité expérimentale car les lois de la géométrie ne peuvent être approximatives. Poincaré en profite pour justifier dans le cadre de la genèse de la géométrie son conventionalisme géométrique. Etant le résultat d'une succession de décisions conventionnelles, les propriétés du groupe des déplacements et par conséquent les lois de la géométrie ne sont donc ni des vérités *a priori*, ni des vérités expérimentales :

En résumé, les lois en question ne nous sont pas imposées par la nature, mais sont imposées par nous à la nature. Mais si nous les imposons à la nature, c'est parce qu'elle nous permet de le faire. Si elle offrait trop de résistance, nous chercherions dans notre arsenal une autre forme qui serait pour elle plus acceptable. [Poincaré 1898, 12]

³ La classe des changements externes $\mathcal{D}_1$ qui sont corrigés par un changement interne est subdivisée en une partition $\mathcal{P}_1$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}_1$ (la relation transitive obtenue à partir de la relation « être corrigé par un même changement interne »). La classe des changements internes $\mathcal{D}_2$ qui corrigent un changement externe est subdivisée en une partition $\mathcal{P}_2$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}_2$ (la relation transitive obtenue à partir de la relation « corriger un même changement externe »). La classe des déplacements est obtenue en réunissant les deux classes disjointes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Cette nouvelle classe $\mathcal{D}$ est subdivisée en une partition $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ qui détermine une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. A partir de ce moment, Poincaré travaille avec l'ensemble quotient $\mathcal{D}/\mathcal{R}$.

⁴ [Poincaré 1898, 10].

⁵ A la fin du 19^e siècle, la notion de groupe se réduit à celle de groupe de transformations (discrètes ou continues). La définition se réduit la plupart du temps à poser que la loi de composition est interne.

L'étude des propriétés du groupe des déplacements s'effectue de la même manière ; l'expérience suggère à l'esprit, au prix d'un certain nombre d'approximations et de conventions, de conférer au groupe des déplacements des propriétés de structure qui vont permettre de le déterminer ; comme le terme de groupe ne désigne que les groupe de transformations, Poincaré distingue, à la suite de Lie, les propriétés qui concernent la structure de l'ensemble des transformations constituant le groupe de celles qui regardent l'ensemble sur lequel opèrent les transformations ; Poincaré nomme les premières, *propriétés formelles*, et qualifie d'*isomorphes*, en reprenant les dénominations de Lie, les groupes qui ont mêmes propriétés formelles :

Les propriétés dites formelles sont celles qui sont communes à tous les groupes isomorphes. Si je dis, par exemple, que telle ou telle opération répétée trois fois est équivalente à telle ou telle répétée quatre fois, j'ai énoncé une propriété une propriété formelle, entièrement indépendante de la qualité. De telles propriétés formelles sont susceptibles d'être étudiées mathématiquement. On doit donc les énoncer sous forme de propositions rigoureuses. D'un autre côté, les expériences en question ne peuvent jamais être le véritable fondement de ces propositions. Nous avons en nous, en puissance, un certain nombre de modèles de groupes et l'expérience nous aide seulement à découvrir lequel de ces modèles s'écarte le moins de la réalité. [Poincaré 1898, 13]

La première discussion concerne la question de la continuité du groupe. Poincaré reprend les considérations qu'il avait développées dans son article sur *le continu mathématique* [1893]. Il distingue deux notions de continu : le continu physique et le continu mathématique. Parmi les itérations d'un déplacement extrêmement petit D , il peut arriver que nous puissions distinguer $9D$ et $11D$, alors que $9D$ et $10D$, et $10D$ et $11D$ restent indiscernables. Poincaré traduit cette situation par la formule dite du continu physique :

$$9D = 10D, 10D = 11D, 9D < 11D.$$

Cette formule répugne selon Poincaré à notre raison et nous préférons remplacer le continu physique, pourtant fidèle à notre expérience, par le continu mathématique plus conforme à notre esprit. La discussion n'est pour autant pas encore complètement terminée, car il faut distinguer un continu mathématique (du premier ordre) qui correspond à l'idée de divisibilité indéfinie des transformations⁶ et le continu mathématique (du second ordre) proprement dit. Poincaré justifie le choix de la dernière solution pour des raisons de compatibilité avec les autres propriétés du groupe « que nous connaissons par d'autres expériences ». La discussion se poursuit par l'étude de la structure du groupe des déplacements. L'expérience des mouvements des corps solides – les corps qui sont susceptibles de déplacements -- nous conduit à reconnaître les déplacements qui conservent certaines sensations (qui seront, plus tard lorsque la géométrie sera construite par notre esprit, interprétées comme correspondant à l'existence d'un point fixe⁷) :

L'ensemble des déplacements qui conservent ainsi un système donné de sensations forme évidemment un sous-groupe que nous pouvons appeler sous-groupe rotatif.

⁶ Ce continu est modelé sur l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

⁷ A ce stade de la genèse, nous ne savons même pas ce qu'est un point. Notre expérience ne concerne que des sensations et des successions de sensations. L'apprentissage s'opère en sélectionnant certaines successions de sensations qui se répètent et à partir desquelles nous opérons des choix parmi les groupes possibles.

Telle est la conclusion que nous tirons de l'expérience. Il est inutile de faire ressortir combien l'expérience est grossière et combien d'autre part la conclusion est précise. L'expérience ne peut donc pas nous imposer la conclusion, mais elle suffit à nous la suggérer. Elle suffit à montrer que, de tous les groupes dont la notion préexiste en nous, les seuls que nous puissions adopter en vue d'y rapporter nos sensations sont ceux qui contiennent un tel sous-groupe. [Poincaré 1898, 17]

Poincaré fait ici implicitement référence à la théorie de Lie des groupes continus de transformations et à leur classification : nous sommes amenés par l'expérience à ne retenir que les groupes qui contiennent des groupes de rotations. Poincaré poursuit en affirmant que « *par de nouvelles expériences, toujours très grossières* », nous sommes amenés à la notion de faisceau rotatif (rotations autour d'un axe fixe) et que toute rotation « *peut être décomposée en trois autres, appartenant respectivement à trois faisceaux rotatifs donnés* ». Il conclut alors qu'« *avec ces propositions, nous sommes en mesure [...] de limiter notre choix à un choix entre la géométrie d'Euclide et celles de Lobatchewsky ou de Riemann* ».

Pour arriver à cette conclusion, Poincaré se sert en fait (sans la citer) d'une connaissance très précise de la classification de Lie des groupes de transformations à 6 paramètres de $\mathbb{R}^3$ qui admettent un unique invariant significatif entre deux points. Ainsi, Lie montre qu'il ne peut y avoir que 11 tels groupes de transformations qui peuvent être infinitésimalement décrits comme suit :

1. $p, q, r, xq - yp, yr - zq, zp - xr$
2. $p, q, r, xq - yp, yr - zq, zp + xr$
3. $p + xU, q + yU, r + zU, xq - yp, yr - zq, zp - xr$
4. $p - xU, q - yU, r - zU, xq - yp, yr - zq, zp - xr$
5. $p - xU, q - yU, r + zU, xq - yp, yr + zq, zp + xr$
6. $p, q, xp + yq + cr, yp - xq + r, (x^2 - y^2)p + 2xyq + 2(cx - y)r, 2xyp + (y^2 - x^2)q + 2(x + cy)r$
7. $p, q, xp + yq + r, yp - xq, (x^2 - y^2)p + 2xyq + 2xr, 2xyp + (y^2 - x^2)q + 2yr$
8. $p, q, xq + r, yq + cr, x^2p + 2xr, y^2p + 2cxr \quad (c \neq 0)$
9. $p, q, xq + r, x^2q + 2xr, xp + yq + cr, x^2p + 2xyq + 2(y + cx)r$
10. $p - yr, q + xr, r, xq, xp - yq, yp$
11. $p, q, r, xp + yr, 2xp + yq, x^2p + xyq + \frac{1}{2}y^2r \quad (U = xp + yq + zr)$

[Lie 1893, 433-434]⁸

⁸ p désigne la transformation infinitésimale associée à $\partial/\partial x$, q désigne la transformation infinitésimale associée à $\partial/\partial y$, r désigne la transformation infinitésimale associée à $\partial/\partial z$.

Les seuls groupes possédant trois sous-groupes de rotations autour d'un axe, $xq - yp$, $yr - zq$, $zp - xr$, sont les groupes 1), 3) et 4) qui correspondent aux géométries euclidienne, hyperbolique et elliptique.

L'expérience nous suggère une propriété supplémentaire du groupe qui nous amène à choisir le groupe euclidien :

Pour aller plus loin, nous avons besoin d'une nouvelle proposition qui prenne la place du postulatum des parallèles. La proposition qui en tiendra lieu sera l'affirmation de l'existence d'un sous-groupe invariant dont tous les déplacements sont échangeables et qui est formé de toutes les translations. C'est là ce qui détermine notre choix en faveur de la géométrie d'Euclide, parce que le groupe qui correspond à la géométrie de Lobatchewsky ne contient pas un tel sous groupe invariant. [Poincaré 1898, 34]

Parmi les trois sous-groupes retenus, le seul qui possède un sous-groupe commutatif conjugué de translations est le premier, celui qui correspond à la géométrie euclidienne.⁹

4) La genèse de l'espace et la question de la dimension de l'espace

Les éléments géométriques dérivent de la structure de groupe : la notion de point est déduite de l'existence des sous-groupes de rotations et des expériences qui nous les font découvrir. Les déplacements correspondent à des changements de sensations et nous faisons l'expérience de l'existence des sous-groupes en remarquant que les déplacements d'un même sous-groupe conservent certains complexes de sensations.

Précisément grâce à cette circonstance que les déplacements qui conservent certains éléments sont les mêmes que ceux qui conservent certains autres éléments. Nous convenons alors de remplacer tous ces éléments qui sont conservés par les mêmes déplacements par un seul élément qui n'a qu'une valeur purement schématique. [Poincaré 1898, 19]

Le fait que les déplacements possèdent une structure de groupe entraîne que l'espace associé est homogène et isotrope. La continuité de l'espace résulte aussi de celle du groupe. L'étude de la géométrie et des propriétés de l'espace se réduit à celle de la structure et des propriétés du groupe des déplacements. Poincaré décrit l'étude d'un groupe comme l'étude de ses propriétés formelles et expliquera que deux groupes isomorphes, c'est-à-dire ayant mêmes propriétés formelles¹⁰, ont même ordre et peuvent opérer sur des espaces de dimensions différentes. Ainsi, le groupe des déplacements opère sur l'espace sensible qui est de dimension très grande et son étude est difficile. Heureusement, le problème se simplifie «en remplaçant le groupe qui nous est donné, avec sa forme et sa matière, par un autre groupe isomorphe¹¹ dont la matière est plus simple» [1898, 36]¹². Le

⁹ Il est clair que Poincaré connaissait la théorie des groupes de transformations de Lie, mais la lecture de son article publié dans *the Monist*, montre que sa connaissance des travaux de Lie est en fait très précise.

¹⁰ Poincaré définit la notion d'isomorphie de deux groupes par l'identité de leurs propriétés formelles :

Il arrive parfois que deux groupes contiennent des opérations qui sont entièrement différentes quant à leur nature, et que néanmoins ces opérations se combinent suivant les mêmes lois. Nous disons alors que les deux groupes sont isomorphes. [Poincaré 1898, 22]

¹¹ On voit ici que Poincaré, qui distinguait pourtant explicitement les propriétés formelles d'un groupe de celles liées à son action, concevait, lui aussi, la notion de groupe uniquement comme 'groupe de transformations'.

¹² Poincaré désigne par 'matière' d'un groupe, l'ensemble sur lequel il opère.

passage à ce groupe opérant sur un espace de dimension moindre s'effectue en reconnaissant les sous-groupes qui conservent certains éléments, c'est-à-dire en définissant les points de l'espace.

Cette définition est critiquée par Couturat [1896]. Il demande à Poincaré ce que signifie l'expression, «Certains déplacements ont un caractère commun : on dit qu'ils laissent fixe un point de l'espace» et y voit deux interprétations possibles :

En résumé, ou bien ce caractère commun à tous les déplacements du sous-groupe consiste à avoir un point fixe, et alors la définition implique le défini ; ou bien c'est un caractère purement analytique, et alors c'est arbitrairement qu'on lui attribue un sens géométrique, en postulant précisément que l'espace a trois dimensions. [Couturat 1896, 660]

Pour répondre à cette objection, Poincaré est obligé d'«employer le langage mathématique». Il ne dispose que de la notion de groupes de transformations au sens de Lie. Mais, nous avons vu que, contrairement à Couturat, il fait la différence entre les propriétés formelles, c'est-à-dire les «propriétés communes à tous les groupes isomorphes» [1898, 23] et celles plus contingentes liées à l'ensemble sur lequel opère le groupe¹³. Donc, nous connaissons un groupe G auquel nous rapportons les déplacements, mais «nous pouvons prendre comme 'groupe normal' au lieu de G , un groupe quelconque isomorphe à G » [1897, 66].

Il reste à poser la question de savoir quel groupe choisir parmi tous les groupes isomorphes à G . De par la capacité de notre entendement à former des groupes, nous connaissons les propriétés formelles du groupe G . «La plus importante des propriétés formelles d'un groupe est l'existence des sous-groupes». Poincaré distingue trois catégories de sous-groupes d'ordre 3, 2 ou 1 ; il faut entendre ici les sous-groupes g_1 (d'ordre 3) constitués de rotations autour d'un point, les sous-groupes g_2 (d'ordre 2) constitués de vissages autour d'un axe et les sous-groupes de rotations g_3 (d'ordre 1) constitués par les rotations autour d'un axe. Il considère l'action des transformations qui sont dans la terminologie moderne appelées 'automorphismes intérieurs' de G sur ces trois ensembles. Il conclut sans démonstration que dans le premier cas, la dimension de l'espace obtenu est 3, dans le second 4 et dans le dernier 5. Sachant que l'ordre de G est 6, ce résultat est certes assez intuitif mais on peut tenter de donner une reconstruction en langage moderne de l'argument de Poincaré:

Le groupe affine euclidien G peut être défini comme le produit semi-direct $\mathbf{R}^3 \rtimes_{\alpha} O(3)$ où α est l'action canonique de $O(3)$ sur $\mathbf{R}^3$. Un élément de G est donc décrit comme un couple (v, f) $v \in \mathbf{R}^3, f \in O(3)$, la loi du groupe s'écrivant :

$$(v, f)(w, g) = (fw + v, fg).$$

Soit g_1 un sous-groupe de rotations autour d'un point w . Nous pouvons définir g_1 :

$$\varphi \in g_1 \Leftrightarrow \{\varphi = (v, f) / f \in O(3), v = w - fw\}.$$

¹³ Poincaré illustre son propos par l'exemple du groupe du cube :

Ainsi considérons les différentes manières dont un cube peut être superposé à lui-même. Les sommets peuvent être échangés l'un avec l'autre comme peuvent l'être aussi les faces et les arêtes ; d'où résultent trois groupes de permutations qui sont évidemment isomorphes entre eux ; mais leur degré peut être huit, six ou douze, puisqu'il y a huit sommets, six faces et douze arêtes. [Poincaré 1898, 34-35]

Un élément de g_1 est défini par la donnée de f . Chaque sous-groupe g_1 de rotations autour d'un point est isomorphe à $O(3)$. g_1 est donc défini par la donnée de w et l'ensemble des g_1 est donc de dimension 3.

Soit $\psi = (u, g)$. On a :

$$\psi\phi\psi^{-1} = (u + gw - gfg^{-1}(u + gw), gfg^{-1}).$$

L'action de G sur les sous-groupes de rotations autour d'un point est donc analogue à l'action canonique de G sur $\mathbf{R}^3$.

Soit g_2 un sous-groupe de vissages autour d'un axe de vecteur directeur w et passant par v . Nous pouvons définir g_2 :

$$\phi \in g_2 \Leftrightarrow \{\phi = (v - fv + \lambda w, f) / f \in O(3), w = fw, \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Un élément de g_2 est défini par la donnée de f et de λ . Comme les éléments de $O(3)$ qui vérifie la condition $w = f(w)$ constitue un groupe isomorphe à $O(2)$, g_2 est un groupe d'ordre 2. L'ensemble des g_2 peut être décrit comme l'ensemble quotient $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 / \mathfrak{R}$ où $\mathfrak{R}$ est la relation d'équivalence :

$$(v, w) \mathfrak{R} (v', w') \text{ si et seulement } v - v' = \mu w \text{ et } w' = \rho w, \quad \mu \in \mathbf{R}, \rho \in \mathbf{R}.$$

L'ensemble des sous-groupes de vissages est de dimension 4. Soit $\psi = (u, g)$. On a :

$$\psi\phi\psi^{-1} = (u + gv - gfg^{-1}(u + gv) + \lambda gw, gfg^{-1}).$$

Cette action est évidemment compatible avec la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ et on obtient l'action de G sur l'ensemble des droites affines de $\mathbf{R}^3$.

Soit g_3 un sous-groupe de rotations autour d'un axe de direction w et passant par v . Nous pouvons définir g_3 :

$$\phi \in g_3 \Leftrightarrow \{\phi = (v - fv, f) / f \in O(3), w = fw\}.$$

Un élément de g_3 est défini par la donnée de f . Pour les mêmes raisons que dans le cas précédent, g_3 est un groupe d'ordre 1 isomorphe à $O(2)$. L'ensemble des g_3 peut être décrit comme $P^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^3$ et est de dimension 5. Soit $\psi = (u, g)$. On a :

$$\psi\phi\psi^{-1} = (u + gv - gfg^{-1}(u + gv), gfg^{-1}).$$

Sur la composante $P^2(\mathbf{R})$, l'action de G est identique à celle de $O(3)$ vu comme un sous-groupe du groupe projectif et sur la composante en $\mathbf{R}^3$, l'action de G est l'action canonique.

Il termine en affirmant que l'on choisit le premier cas car c'est celui qui donne le moins grand nombre de dimensions (critère de simplicité) et pour des raisons d'ordre expérimental.

Ce sont là trois solutions dont chacune est possible logiquement. Nous préférons la première parce qu'elle est la plus simple et elle est la plus simple parce qu'elle est celle qui donne à

l'espace le nombre le plus petit de dimensions. Mais il y a une autre raison qui recommande ce choix ; le sous-groupe rotatif attire d'abord notre attention parce qu'il conserve certaines sensations. Le sous-groupe hélicoïdal ne nous est connu que plus tard et plus indirectement. Le faisceau rotatif d'autre part n'est lui-même qu'un sous-groupe du sous-groupe rotatif. [Poincaré 1898, 38]

L'important dans cette argumentation de Poincaré est donc que même la dimension de l'espace est obtenue à partir de la connaissance du groupe de transformation. On peut ainsi obtenir plusieurs espaces de différentes dimensions et donc la propriété du nombre de dimension est donc conventionnelle. On pourrait rapporter nos représentations spatiales à un espace de dimension 4 ou 5 sans changer de groupe de déplacements.

5) La révision de la théorie et le passage par l'espace de l'Analysis Situs

Une des conséquences de cette théorie soulignée par Poincaré est qu'il n'est nul besoin d'une notion première d'espace puisque celle-ci découle de l'étude des propriétés du groupe de transformations. Du point de vue [1898] de Poincaré, la géométrie précède la notion d'espace.

La position de Poincaré est complètement originale par rapport à ces prédécesseurs comme Helmholtz, Lie ou Klein qui tous présupposent l'existence d'un continuum amorphe pour développer leurs conceptions géométriques.

[...] nous devons distinguer dans un groupe la forme et la matière. Pour Helmholtz et Lie la matière du groupe existait avant la forme et en géométrie la matière est une *Zahlenmannigfaltigkeit* à trois dimensions. [...]

C'est seulement par l'introduction du groupe qu'ils en ont fait une grandeur mesurable, c'est-à-dire un véritable espace. Cependant, l'origine de ce continu non mesurable à trois dimensions reste imparfaitement expliquée. [Poincaré 1898]

Or « ce continu non mesurable à trois dimensions » est l'espace de l'*Analysis Situs* considéré plus tard, comme on le verra, par Poincaré comme la géométrie qualitative.

On comprend donc pourquoi Poincaré ne retient pas la géométrie générale de Calinon pour sa réflexion philosophique puisque celle-ci présuppose l'existence d'un espace même si celui-ci est amorphe. De plus, il est difficile de soutenir à partir de la théorie de Calinon un point de vue psychophysiologique de la genèse de la géométrie puisque celle-ci, comme le signale Calinon, n'a plus de base expérimentale. De même, Poincaré refusera les thèses (en particulier celle de Russell) qui considèrent la géométrie projective comme première par rapport aux géométries métriques dans le processus de genèse de la géométrie. Toutes ces thèses restreignent le rôle de l'expérience au choix de la géométrie métrique à partir de laquelle nous rapportons notre expérience quotidienne ou physique, une fois admis un cadre géométrique général (la géométrie générale de Calinon, la géométrie projective chez Russell) donné a priori.

Dans son texte de 1898, Poincaré propose une explication (de caractère mathématique) de la tridimensionalité de l'espace. Il constate que le groupe euclidien sélectionné après de nombreuses conventions peut être vu comme opérant sur un espace de trois, de quatre ou de cinq dimensions et que le choix de la tridimensionalité de l'espace est le résultat d'un choix conventionnel justifié par des considérations de commodité. Malheureusement, son argument est entaché de circularité car le

choix du groupe s'appuie sur des considérations fondées sur la classification des groupes de Lie opérant sur les espaces de dimensions 3 et admettant un invariant fondamental. Outre ce défaut de circularité, le raisonnement de Poincaré est lacunaire car il ne justifie pas l'utilisation qu'il fait de la classification de Lie. En 1903, Poincaré (après ses travaux sur l'Analysis Situs et sa première polémique avec Russell sur le statut des axiomes de la géométrie¹⁴) revient sur cette question dans un article intitulé « l'espace et ses trois dimensions ».

6) *L'Analysis situs comme géométrie qualitative*

Dans cet article repris dans la *Valeur de la science*, Poincaré aborde la question du statut de l'espace de l'Analysis Situs, qu'il présente comme le fond commun des espaces euclidiens et non-euclidiens. Après avoir insisté une nouvelle fois sur le fait que la géométrie euclidienne ne pouvait être une « forme imposée à notre sensibilité » puisque nous pouvons imaginer l'espace non-euclidien, il se demande si le continuum amorphe de l'Analysis Situs n'est pas lui-même une forme imposée à notre sensibilité :

Et alors une question se pose : ce continuum amorphe, que notre analyse a laissé subsister, n'est-il pas une forme imposée à notre sensibilité ? Nous aurions élargi la prison dans laquelle cette sensibilité est enfermée, mais ce serait toujours une prison. [Poincaré 1905]

Les mêmes questions qui se posaient à propos des vérités de la géométrie euclidienne, se posent de nouveau à propos des théorèmes de l'Analysis Situs. Peuvent-ils être obtenus par un raisonnement déductif ? Sont-ce des conventions déguisées ? Sont-ce des vérités expérimentales ? Sont-ils les caractères d'une forme imposée soit à notre sensibilité, soit à notre entendement ? [Poincaré 1905]

La réponse à ces questions est de nouveau à chercher dans la genèse de la géométrie.

Dans la théorie de Poincaré de 1898, le choix de la continuité résultait d'un raisonnement conventionnel et le rôle de l'Analysis Situs était d'étudier les propriétés liées à la continuité des espaces mathématiques que l'on obtient à partir des groupes continus.

En 1905, Poincaré propose une autre explication de ce choix en demandant ce que nous « voulons dire quand nous disons qu'un continu mathématique ou un continu physique a deux ou trois dimensions. » [1905, 70] Il introduit alors la notion de coupure pour l'étude des continus physiques. Si deux éléments discernables d'un continu physique peuvent être joints par un chemin d'éléments indiscernables, le continu physique C est dit « d'un seul tenant ». Une coupure est un ensemble arbitraire d'éléments de C . Selon le choix des coupures, le continu physique restera d'un seul tenant (autrement dit, deux éléments quelconques de C peuvent être joints par un chemin d'éléments indiscernables (continu au sens physique) sans quitter C et sans rencontrer la coupure) ou au contraire, il sera divisé par la coupure. Poincaré précise que ces définitions sont suggérées par l'expérience :

On remarquera que toutes ces définitions sont construites en partant uniquement de ce fait très simple, que deux ensembles d'impressions, tantôt peuvent être discernés, tantôt ne peuvent pas l'être. [1905, 73]

¹⁴ [Nabonnand 2000]

Un continu physique est dit à une dimension s'il peut être divisé par un certain nombre d'éléments indiscernables. Il est, autrement, dit à plusieurs dimensions ; un continu physique à deux dimensions est un continu qui est divisé par une ou plusieurs coupures à une dimension et ainsi de suite.¹⁵

Cette définition de la dimension des continus physiques va permettre à Poincaré de rompre le cercle vicieux de sa précédente théorie de la tridimensionalité de l'espace et de justifier l'utilisation de la classification de Lie. Dans un premier temps, Poincaré abandonne une partie de sa précédente théorie. Certes, le continu (physique) des déplacements a six dimensions et ce résultat est acquis par l'expérience.¹⁶ Poincaré prétend alors pouvoir reprendre le précédent raisonnement et montrer alors que l'on peut déduire la tridimensionalité de l'espace sur lequel le groupe opère. Il n'explicite pas les termes de son raisonnement et cela paraît assez difficile de suivre Poincaré dans cette affirmation. De toute manière, une telle théorie ne saurait être satisfaisante car elle ne respecte pas la hiérarchie de nos perceptions géométriques :

[...] et quand nous aurons montré comment la notion de ce continu peut se former et comment on peut en déduire celle de l'espace, on pourrait toujours se demander pourquoi l'espace à trois dimensions nous est beaucoup plus familier que ce continu à six dimensions, et douter par conséquent que ce soit par ce détour, que s'est formée dans l'esprit humain la notion d'espace. [1905, 102]

Poincaré propose une nouvelle théorie qui explique que nous sommes guidés par l'expérience vers l'étude des groupes de transformations des espaces à trois dimensions. L'espace essentiel sera celui associé au sens du toucher, l'espace tactile dont il montre qu'une des conditions nécessaires à son établissement est que les impressions tactiles ne soient pas altérées par les sensations musculaires associées à nos mouvements. Chacun des espaces associés à nos doigts est un continu physique à trois dimensions dont Poincaré montre que l'on est, de nouveau sur la base d'expériences, amené à les considérer comme semblables entre eux ainsi qu'à l'espace visuel.

En montrant le rôle essentiel de l'expérience dans la genèse de la géométrie, Poincaré n'a pas pour autant sombré dans un empirisme béat et stérile. En effet, comme il le précise lui-même, « l'expérience ne prouve pas que l'espace a trois dimensions ; elle nous prouve qu'il est commode de lui en attribuer trois, parce que c'est ainsi que le nombre des coups de pouce est réduit au minimum » [1905 120].

Le choix des conventions est justifié selon les cas par des considérations d'accommodement à notre expérience, soit par des raisons de commodité pratique ou mathématique. Le choix d'une convention ouvre un espace de possibilité d'actions, parmi lesquelles celles de donner des significations, de définir de nouveaux objets.

¹⁵ Poincaré précise que selon lui cette définition est identique à celle des géomètres qui définissent les surfaces comme les limites des volumes et les lignes comme les limites des surfaces. Il ajoute qu'il vient de donner à la notion de dimension « une forme applicable non au continu mathématique, mais au continu physique, qui est seul susceptible de représentation ».

¹⁶ En 1898, Poincaré utilisait le fait que le groupe des déplacements était à six paramètres. Il justifiait cette affirmation en disant que l'expérience nous permettait de nous rendre compte que tout déplacement infinitésimal pouvait être décomposé le long de six déplacements particuliers (théorie de Lie). En 1905, il assure qu'« il serait aisé de décrire les expériences par lesquelles nous pourrions arriver à ce résultat. On verrait qu'on peut dans ce continu pratiquer des coupures qui le divisent et qui sont des continus ; qu'on peut diviser ces coupures elles-mêmes par d'autres coupures du second ordre qui sont encore des continus, et qu'on ne serait arrêté qu'après les coupures du sixième ordre qui ne seraient plus des continus » [1905, 102].

7) Conclusion

Le conventionalisme géométrique de Poincaré ne se limite donc pas au choix du groupe. En fait, chaque étape de la genèse psycho-physiologique de l'espace est scandée par des décisions de caractère conventionnel : pour définir les déplacements et leurs lois, les compensations entre mouvements, nous sommes obligés de choisir ce qui, dans un changement de sensations, « est regardé comme un déplacement satisfaisant rigoureusement aux lois » et ce qui « regardé comme une altération qualitative » sera négligé. Le choix du groupe sera aussi le résultat d'un choix conventionnel, guidé par des considérations de simplicité qui peuvent se traduire mathématiquement. De même, l'espace qui résulte de cette genèse est encore l'occasion de conventions pour la définition de la notion de point ou du nombre de dimensions de l'espace.

Bibliographie :

A. Calinon

[1889] Les Espaces géométriques (1), *La Revue philosophique*, 28 (1889), 588-595.

[1891] Les Espaces géométriques (2), *La Revue philosophique*, 32 (1891), 368-375.

Couturat, Louis

[1896] Etudes sur l'espace et le temps, revue critique de *Etude sur l'espace et le temps* de G. Lechalas, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 4 (1896), 646-669.

Delbœuf, Joseph

[1877] Du rôle des sens dans la formation de l'idée d'espace, *La Revue philosophique*, 4 (1877), 167-184.

Dunan, Charles

[1888a] L'espace visuel et l'espace tactile, *La Revue philosophique*, 25 (1888), 134-169.

[1888b] L'espace visuel et l'espace tactile, *La Revue philosophique*, 25 (1888), 591-619.

Ferré, Ch.

[1885] Sensation et mouvement, *La Revue philosophique*, 20 (1885), 337-368.

Gley, Eugène

[1885] Le « Sens musculaire » et les sensations musculaires, *La Revue philosophique*, 20 (1885), 601-610.

Heinzmann, Gerhard & Nabonnand, Philippe

[2008] The role of intuition in arithmetics and geometry for Poincaré, , (à paraître en 2008 dans *One Century of Intuitionism*, Birkhäuser).

Lie, Sophus

[1893] *Theorie der Transformationsgruppen* III, Leipzig : Teubner (1893).

Nabonnand, Philippe

[2000a] La polémique entre Poincaré et Russell au sujet du Statut des axiomes de la Géométrie, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 6 (2000), 219-269.

[2000b] La genèse psycho-physiologique de la géométrie selon Poincaré, *Textes du séminaire «Histoires de Géométries» 2000*, Maison des Sciences de l'Homme, 2000.

[2006] Poincaré, philosophe, *Images des mathématiques 2006*, Paris : CNRS, 2006, 106.

[2008b] Le contexte philosophique en France des « Fondements de la Géométrie » de Henri Poincaré, à paraître en 2008 dans les *Cahiers de philosophie de l'Université de Caen*.

Poincaré, Henri

[1893] Le continu mathématique, *La revue de métaphysique et de morale*, 1 (1893), 26-34 ; cité d'après la reprise dans le chapitre II de *La science et l'hypothèse* [1902].

[1898] On the Foundations of Geometry, *The Monist*, 9 (1898), 1-43 ; trad. fr. L. Rougier, *Des Fondements de la Géométrie*, Paris : Chiron ; cité d'après [Poincaré 2002], 5-31.

[1901] *Analyse des travaux scientifiques de Poincaré faite par lui-même*, Uppsala : Almqvist & Wiksells Boktryckeria, 1913 ; *Acta mathematica*, 38 (1921), 3-135.

[1902] *La science et l'hypothèse*, Paris : Flammarion, 1902 ; cité d'après la rééd. de 1968.

[2002] L'opportunisme scientifique, (Laurent Rollet éd.), Basel : Birkhäuser, 2002.

Ribot, Théodule

[1870] *La Psychologie anglaise contemporaine (école expérimentale)*, Paris : Ladrance, 1870

[1878] Les théories allemande sur l'espace tactile, *La Revue philosophique*, 6 (1878), 130-145.

[1879a] *La Psychologie allemande contemporaine (école expérimentale)*, Paris : Alcan, 1879.

[1879b] Les Mouvements et leur importance psychologique, *La Revue philosophique*, 8 (1879), 371-386.

de la Rive, L.

[1889] Sur la genèse de la notion d'espace, *La Revue philosophique*, 27 (1889), 432-462.