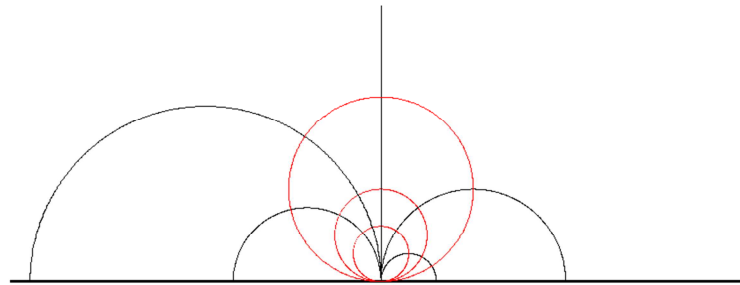
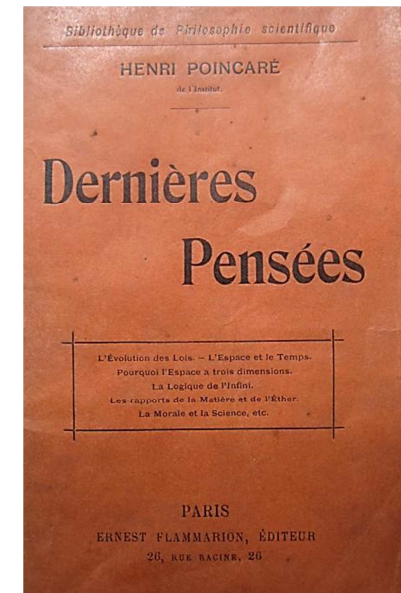
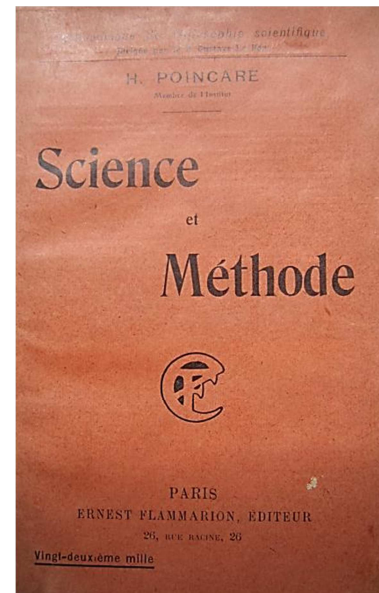
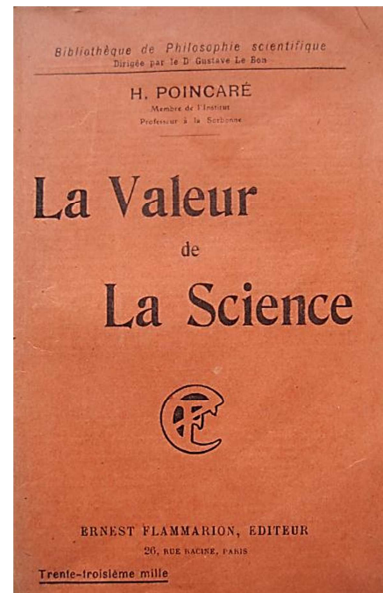
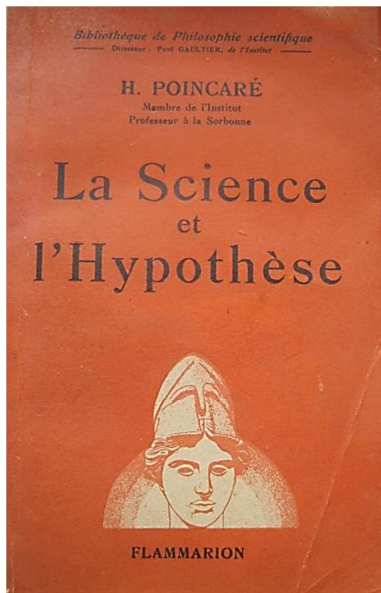


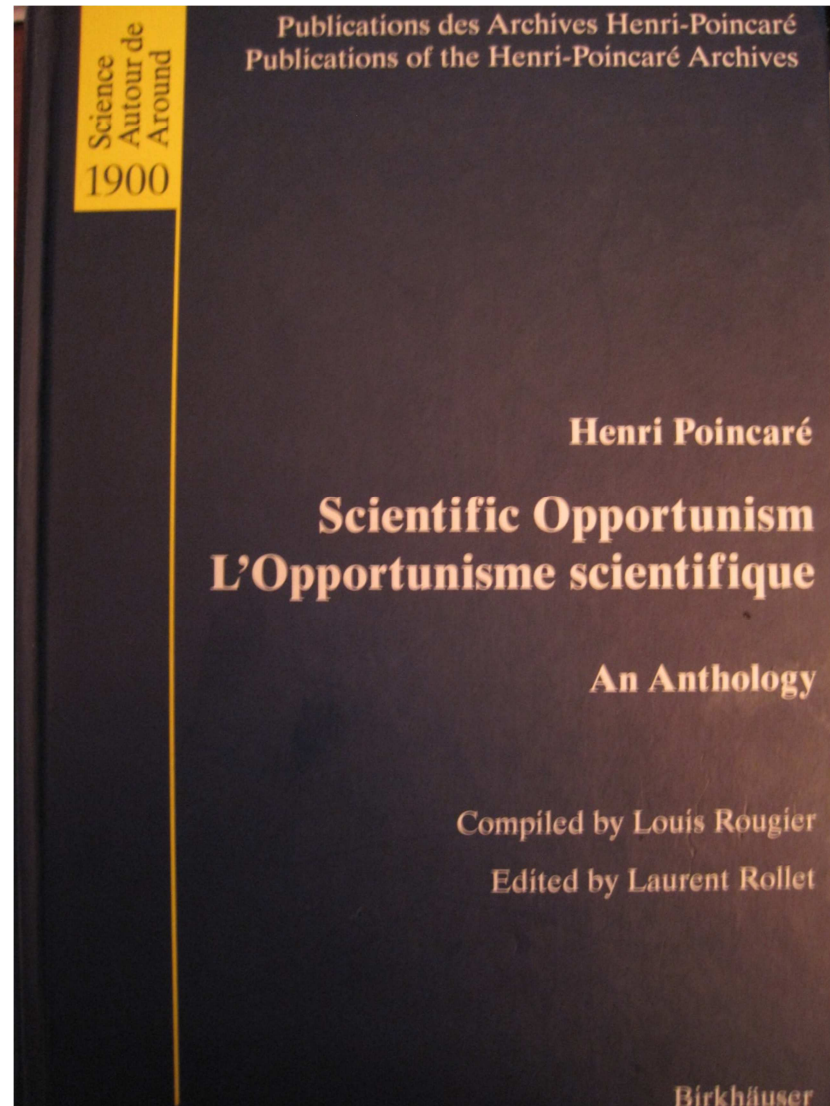
Poincaré et la théorie de l'espace



Les livres philosophiques d'Henri Poincaré



Des recueils d'articles publiés dans des revues philosophiques professionnelles (*Revue de métaphysique et de morale*), dans des revues de vulgarisation (*Revue générale des sciences pures et appliquées*, *Revue du mois*, *L'éclairage électrique...*)



Le problème philosophique de l'espace :

- 1887 Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie, *Bulletin de la SMF*.
- 1891 Les géométries non euclidiennes, *Revue générale des sciences pures et appliquées*.
- 1892 Correspondance sur les géométries non euclidiennes, *Revue générale des sciences pures et appliquées*.
- 1895 L'espace et la géométrie, *Revue de métaphysique et de morale*.
- 1897 Réponse à quelques critiques, *Revue de métaphysique et de morale*.
- 1898 On the Foundations of Geometry, *The Monist*.
- 1899 Des fondements de la géométrie, à propos d'un livre de M. Russell, *Revue de métaphysique et de morale*.
- 1900 Sur les principes de la géométrie. Réponse à M. Russell, *Revue de métaphysique et de morale*.
- 1902 Les fondements de la géométrie – *Grundlagen der Geometrie* par M. Hilbert, *Bulletin des sciences mathématiques*.
- 1903 L'espace et ses trois dimensions (article en deux parties), *Revue de métaphysique et de morale*.
- 1912 Pourquoi l'espace a trois dimensions, *Revue de métaphysique et de morale*.

Deux moments de la réflexion de Poincaré sur la théorie de l'espace

- Une réflexion philosophique sur le statut des axiomes de la géométrie
- Une théorie psycho-physio-logico-mathématique de la genèse de la géométrie et de l'espace

Je me suis demandé quel est le véritable caractère des vérités géométriques et en particulier du postulatum d'Euclide. [...] J'ai recherché également à analyser l'origine psychologique de la notion d'espace.

[Poincaré 1901, *Analyse de ses travaux*]

Le conventionalisme géométrique de Poincaré

- Les axiomes de la géométrie sont des *conventions* :

Notre choix, parmi toutes les conventions possibles, est guidé par des faits expérimentaux ; mais il reste libre et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction. [Poincaré 1902 – *La Science et l'hypothèse*]

- L'étude de la géométrie n'est que l'étude d'un groupe (de transformations).
- La géométrie euclidienne est la plus *commode* pour rapporter nos sensations et les phénomènes physiques :

Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être plus *commode*. [Poincaré 1902 – *La Science et l'hypothèse*]

Le contexte des premières contributions de Poincaré au problème de l'espace

Quel espace ?

- 1) L'espace intuitif habituel, c'est-à-dire la représentation de l'espace telle que notre esprit le conçoit.
- 2) L'espace physique dont les propriétés nous sont données par l'expérience.
- 3) Les espaces abstraits, c'est-à-dire les conceptions plus générales que nous pouvons deduire de l'espace intuitif ordinaire par abstraction ou generalisation. »

Enriques – *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*

C'est la géométrie non-euclidienne, établie entre 1815 et 1830 par Gauss, Bolyai et Lobachevsky qui conduisit à cette idée nouvelle et remarquable que l'espace physique pourrait être différent de l'image que nous en fournit notre intuition habituelle. »

Enriques – *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*



Federigo Enriques



Emmanuel Kant



Bernhard Riemann



Carl Friederich Gauß

1800 Les espaces intuitif et physique sont quasiment indifférenciés. Cet espace est *a priori*.

L'espace est une intuition pure *a priori*, c'est-à-dire une condition de l'expérience (Kant). La géométrie est la science de cet espace. L'espace mathématique n'existe pas.

1830 Émergence des géométries non-euclidiennes.

Apparition d'une conception empirique de l'espace physique.

Réception faible tant dans les milieux mathématiques, meilleures dans les milieux philosophiques (Le problème de l'espace est une question essentiellement philosophique).

1854 Conférence d'habilitation de Riemann.

L'espace physique (celui de notre expérience) est présenté comme un cas particulier de la notion plus générale d'espace mathématique.

Conception empiriste (et même pouvant tirer parfois vers un certain conventionalisme) de l'espace physique.

1864 Publication du *Nachlass* de Gauss.

1868 Travaux de Beltrami, Riemann, Klein et Helmholtz (modèles euclidiens et projectifs de la géométrie non-euclidienne). 'Redécouverte' des géométries non-euclidiennes.

Distinction définitive du problème mathématique et du problème physique.

En France, le grand 'passeur' de ces travaux est Jules Hoüel, traducteur des travaux de Lobachevski, Bolyai, Beltrami, Riemann et Helmholtz.

Travaux de Helmholtz ; distinction des problèmes de l'espace intuitif et de l'espace physique.



Nicolai Lobachevsky



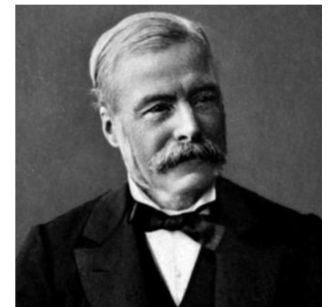
Janos Bolyai



Eugenio Beltrami



Hermann Helmholtz



Jules Hoüel

Une question mathématique : le problème de Riemann-Helmholtz

Trouver des propriétés qui sont vérifiées aussi bien par la famille des mouvements euclidiens que par les deux familles de mouvements non-euclidiens et qui distinguent ces trois familles de toutes les autres possibilités.

Lie – *Theorie der Transformationengruppen* III

Deux questions philosophiques :

Quel est le statut des axiomes de la géométrie ?

[...] nous devons d'abord nous demander quelle est la nature des axiomes géométriques. Sont-ce des jugements synthétiques a priori, comme disait Kant ? [...] Devons-nous donc conclure que les axiomes de la géométrie sont des vérités expérimentales ?»

Poincaré – *Les Géométries non-euclidiennes*

Si on n'admet pas le caractère a priori des axiomes de la géométrie, pourquoi la géométrie euclidienne a-t-elle un tel caractère d'évidence ?

D'autres formulations de ces questions et quelques réponses

On peut, avec les *idéalistes*, admettre que l'espace se réduit à nos perceptions, comme ayant seules une réalité. On peut admettre, au contraire, avec les *réalistes* que cet espace est une réalité propre existant en dehors et indépendamment de nos perceptions. [Calinon 1893]

Le choix de ces propriétés [les axiomes de la géométrie] est *a priori* arbitraire et soumis à la seule condition de n'offrir rien de contradictoire. Seulement, en vue de l'utilité que l'on veut tirer de la science abstraite, on s'efforce de les rapprocher autant que possible des propriétés que l'on observe approximativement dans les phénomènes réels. [Hoüel 1876]



Paul Tannery



Théodule Ribot

Une géométrie générale et le critère de l'expérience

[...] composer une géométrie complète, exempte de toute contradiction, mais renfermant encore un paramètre indéterminé. [Hoüel 1876]

L'expérience nous conduit à admettre que [ce paramètre] est nul, et comme d'ailleurs cette hypothèse simplifie beaucoup la Géométrie, on a dû adopter exclusivement pour les usages réels la Géométrie enseignée par Euclide, et qui a toujours représenté les phénomènes dans la limite des erreurs d'observation. [Hoüel 1876]

La géométrie de Lobatchewsky diffère essentiellement de toutes les théories dont nous avons parlé jusqu'à présent. Son objet est de reconstituer entièrement la science de l'espace après avoir rejeté la célèbre proposition généralement connue en France sous le nom de *postulatum* d'Euclide, et y avoir substitué une hypothèse qui comprend celle d'Euclide, comme cas singulier. [P. Tannery 1876]

C'est elle [l'expérience] qui fournit la matière que l'esprit s'assimile avant de formuler ses axiomes ou ses hypothèses.

[Tannery 1876]

N'y a-t-il pas un criterium absolu qui doive nous permettre de le discerner ? [Tannery 1876]

N'y a-t-il pas un pourquoi en raison duquel ce complexe objectivable soit tel plutôt que tel autre ? [Tannery 1876]

La géométrie, ainsi définie, [...] n'a plus aucune base expérimentale; elle consiste simplement dans l'application de la méthode dite géométrique à un groupe de formes (lignes ou surfaces) dont la première est soumise à cette condition de permettre l'application de cette méthode.

Comme nous le verrons plus loin, la géométrie ainsi comprise est une *science plus générale* que la géométrie des anciens.

[Calinon 1889]

La solution de Poincaré autant en rupture avec les thèses kantiennes qu'avec les thèses empiristes

Pour discuter cette opinion, nous devons d'abord nous demander quelle est la nature des axiomes géométriques.

Sont-ce des jugements synthétiques *à priori*, comme disait Kant ?

Ils s'imposeraient alors à nous avec une telle force, que nous ne pourrions concevoir la proposition contraire, ni bâtir sur elle un édifice théorique. Il n'y aurait pas de géométrie non euclidienne.

Devons-nous donc conclure que les axiomes de la géométrie sont des vérités expérimentales ?

Mais une difficulté subsiste, et elle est insurmontable. Si la géométrie était une science expérimentale, elle ne serait pas une science exacte, elle serait soumise à une continuelle revision. Que dis-je ? elle serait dès aujourd'hui convaincue d'erreur puisque nous savons qu'il n'existe pas de solide rigoureusement invariable.

Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements synthétiques à priori ni des faits expérimentaux.

Ce sont des *conventions* ; notre choix, parmi toutes les conventions possibles, est *guidé* par des faits expérimentaux ; mais il reste *libre* et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction. C'est ainsi que les postulats peuvent rester *rigoureusement vrais*, quand même les lois expérimentales qui ont déterminé leur adoption ne sont qu'approximatives.

Dès lors, que doit-on penser de cette question :
La géométrie euclidienne est-elle vraie ?

Elle n'a aucun sens.

Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses ; si les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses. Une géométrie ne peut pas être

plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être *plus commode*.

Or la géométrie euclidienne est et restera la plus commode :

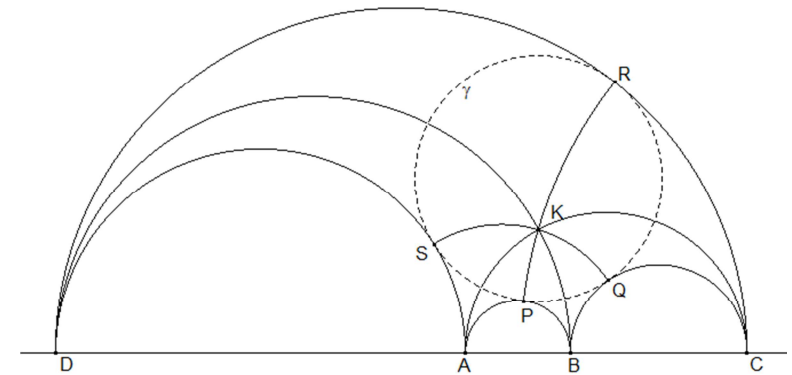
1° Parce qu'elle est la plus simple ; et elle n'est pas telle seulement par suite de nos habitudes d'esprit ou de je ne sais quelle intuition directe que nous aurions de l'espace euclidien ; elle est la plus simple en soi de même qu'un polynôme du premier degré est plus simple qu'un polynôme du second degré ;

2° Parce qu'elle s'accorde assez bien avec les propriétés des solides naturels, ces corps dont se rapprochent nos membres et notre œil, et avec lesquels nous faisons nos instruments de mesure.

Considérons un certain plan que j'appellerai fondamental et construisons une sorte de dictionnaire, en faisant correspondre chacun à chacun une double suite de termes écrits dans deux colonnes, de la même façon que se correspondent dans les dictionnaires ordinaires les mots de deux langues dont la signification est la même :

<i>Espace.</i>	Portion de l'espace située au-dessus du plan fondamental.
<i>Plan.</i>	Sphère coupant orthogonalement le plan fondamental.
<i>Droite.</i>	Cercle coupant orthogonalement le plan fondamental.
<i>Sphère.</i>	Sphère.
<i>Cercle.</i>	Cercle.
<i>Angle.</i>	Angle.
<i>Distance de deux points.</i>	Logarithme du rapport anharmonique de ces deux points et des intersections du plan fondamental avec un cercle passant par ces deux points et le coupant orthogonalement.
etc.,	etc.,

Prenons ensuite les théorèmes de Lowatchewski et traduisons-les à l'aide de ce dictionnaire comme nous traduirions un texte allemand à l'aide d'un dictionnaire allemand-français. *Nous obtiendrons ainsi des théorèmes de la géométrie ordinaire.*



Le contexte de la théorie (psycho-physiologique) de Poincaré

La psychologie expérimentale allemande (en particulier les théories d'Helmholtz) et sa réception en France (*Ribot, La Revue philosophique, ...*)

La conviction que la réponse au problème philosophique de l'espace doit être cherchée du côté de la physiologie (Tannery 1877, *La Géométrie imaginaire et la notion d'espace*)

Le débat intense autour du statut de la géométrie (Lechalas, Calinon, Tannery,...) entre empiristes et rationalistes

L'importance psychologique des mouvements (« sens musculaire » et des sens dans la formation de l'idée d'espace : certains sens et les mouvements (des solides et de notre corps donnent naissance à un espace (espace visuel, tactile et moteur).

Les travaux sur la capacité de nos nerfs et de notre esprit à combiner les sensations.

Les lois de compositions trouvées pour les couleurs peuvent donc s'établir en général pour les sensations susceptibles d'être combinées, et elles s'appliquent en particulier aux sensations qui engendrent la notion d'espace. [Tannery 1889]

Il existe un sens des formes de l'étendue, qu'on pourrait appeler le sens géométrique, et qui n'est autre que le sens musculaire. Il est servi par divers instruments plus ou moins parfaits; il emploie [...] des compas plus ou moins précis, à savoir les parties mobiles du corps. [Delbœuf 1877]

L'état de conscience qui accompagne certains modes de mouvement musculaire est l'origine de nos perceptions de longueur, hauteur, largeur, forme, position, direction, c'est-à-dire de toutes les déterminations de l'espace. [Ribot 1879]

Les sensations de mouvement offrent cette particularité qu'à chacune correspond celle du mouvement opposé. [Tannery 1889]

L'enseignement et les thèses de Ribot

Les mouvements comme une part importante de la vie psychique au même titre que les sensations ou les idées.

Une psychologie de l'activité motrice : la psychophysiologie

Les mouvements volontaires sont accompagnés de sensations musculaires qui peuvent être localisées très précisément

Ce sens musculaire nous rend compte à chaque instant de la position de notre corps dans son ensemble, de la position relative des membres, du tronc et de la tête.

L'état de conscience qui accompagne certains modes de mouvement musculaire est l'origine de nos perceptions de longueur, hauteur, largeur, position, direction, c'est-à-dire de toutes les déterminations de l'espace. [Ribot 1879, *Les mouvements et leur importance psychologique*]

La sensation des mouvements dont on a l'intention (Gley)

Une spécificité des sensations de mouvements : il leur correspond la sensation du mouvement opposé (De la Rive)

La comparaison des sensations : une capacité implicitement reconnue et constituant la perception

Les propriétés de la sensation sont celles d'une quantité sui generis offrant le caractère de la variation continue. [De la Rive 1889, *Sur la genèse de la notion d'espace*]

La genèse psycho-logique de l'espace par Poincaré

Une genèse en deux moments :

Un premier moment essentiellement psycho-physiologique : notre expérience excite notre capacité innée à former des groupes.

L'ensemble des déplacements forme un groupe. [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

Ce qui est l'objet de la géométrie, c'est l'étude d'un « groupe » particulier ; mais le concept général de groupe préexiste dans notre esprit au moins en puissance. Il s'impose à nous , non comme une forme de notre sensibilité, mais comme une forme de notre entendement. [Poincaré 1902, *La Science et l'hypothèse*]

Un second moment mathématique : la question du choix du groupe et la déduction des éléments de l'espace et de leurs propriétés à partir de la seule notion de groupe.

Deux références : Helmholtz et Lie

Comme Lie, je crois que la notion plus ou moins inconsciente du groupe continu est la seule base logique de notre géométrie. Comme Helmholtz, je crois que l'observation des mouvements des corps solides en est l'origine psychologique. Mais je ne fais pas pour cela dériver la géométrie de l'expérience ; loin de là. Les expériences sur les solides n'ont été que l'occasion qui, parmi tous les groupes continus dont nous aurions pu faire une géométrie, nous a fait choisir le groupe euclidien, non comme le seul vrai, mais comme le plus commode. [Poincaré 1901, *Analyse de ses travaux*]



L'espace représentatif (ou sensible)

Les sensations n'ont par elles-mêmes aucun caractère de spatialité, ni de direction.

L'espace représentatif est le cadre dans lequel nous rangeons et classons qualitativement nos sensations

Voilà donc la première catégorie [l'espace représentatif] à laquelle nos sensations sont rapportées. On peut se la représenter comme composée d'un grand nombre de systèmes absolument indépendants les uns des autres. De plus, elle nous permet seulement de comparer entre elles des sensations de même espèce et non de les mesurer, de percevoir qu'une sensation est plus grande qu'une autre sensation, mais qu'elle est deux fois plus grande ou trois fois plus grande. [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

Ne pas confondre l'espace représentatif et l'espace géométrique.

Voyons donc comment nous pourrions nous élever de cette catégorie brute [...] à l'espace géométrique. [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

Nos représentations qui ne peuvent être que des reproductions de nos sensations se rangent dans l'espace représentatif.

L'espace géométrique est la catégorie de l'entendement avec laquelle nous raisonnons spatialement :

Nous ne nous représentons pas les corps extérieurs dans l'espace géométrique, mais nous raisonnons sur ces corps, comme s'ils étaient situés dans l'espace géométrique. [Poincaré 1902, *La Science et l'hypothèse*]

Localiser un objet

Localiser un objet, cela signifie simplement que nous nous représentons les mouvements qu'il faut faire pour atteindre qu'il faut faire pour atteindre cet objet ; et qu'on ne nous dise pas que pour se représenter ces mouvements, [...], la notion d'espace [géométrique] doit, [...], préexister.

Quand je dis que nous nous représentons ces mouvements, je veux seulement dire que nous nous représentons les sensations musculaires qui les accompagnent et qui n'ont aucun caractère géométrique, qui par conséquent n'impliquent nullement la préexistence de la notion d'espace [géométrique]. [Poincaré 1902, *La Science et l'hypothèse*]

Les déplacements

Changements externes (non-accompagnés de sensations musculaires)/*Changements internes* (volontaires et accompagnés de sensations musculaires)

Certains changements externes peuvent être corrigés par un changement interne, ce sont les *déplacements*.

Parmi les objets qui nous entourent, il y en a qui nous éprouvent fréquemment des déplacements susceptibles d'être ainsi corrigés par un mouvement *corrélatif* de notre propre corps, ce sont les *corps solides*. [Poincaré 1902, *La Science et l'hypothèse*]

Un être qui ne pourrait pas se mouvoir serait incapable de faire cette distinction. Un tel être, par conséquent, ne pourrait jamais créer la géométrie, même si ses sensations étaient variables et même si les objets qui l'entourent étaient mobiles. [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

La classification des déplacements

Deux déplacements sont considérés comme identiques s'ils sont corrigés par un même changement interne.

Plusieurs changements externes qui n'ont en eux-mêmes rien de commun peuvent être corrigés par le même changement interne. Je les rassemble dans la même classe et les considère comme le même déplacement. [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

De même, des changements internes qui corrigent le même changement externe sont identifiés et qualifiés aussi de déplacement.

Importance des conventions d'approximation

La classification n'est pas une donnée brute de l'expérience, parce que la compensation [...] des deux changements, l'un interne et l'autre externe, n'est jamais effectivement réalisée. C'est donc une opération active de l'esprit qui essaie d'insérer les résultats bruts de l'expérience dans une forme préexistante, dans une catégorie. Cette opération consiste à identifier deux changements parce qu'il possède un caractère commun, et cela malgré qu'ils ne le possèdent pas exactement. Néanmoins le fait même que l'esprit ait l'occasion d'accomplir cette opération est due à l'expérience, car l'expérience seule peut lui apprendre que la compensation s'est approximativement produite. [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

Le groupe des déplacements

La classification nous amène en outre à reconnaître l'identité de deux déplacements et il en résulte qu'un déplacement peut être *répété* deux ou plusieurs fois. C'est cette circonstance qui introduit le nombre et permet la mesure là où régnait la pure quantité. [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

Possibilité de combiner les déplacements

[...] nous sommes libres de regarder l'*ensemble* des deux changements A suivi de B comme un seul changement [...]. Les mathématiciens expriment cela en disant que l'*ensemble des déplacements forme un groupe*. S'il n'en était pas ainsi il n'y aurait pas de géométrie » [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

Lois obtenues par un raisonnement *a priori* ? par expérience ?

Nécessité de la compensation pour obtenir cette loi et nécessité qu'elle ne soit pas approximative. Donc, ni donnée par un raisonnement *a priori*, ni par expérience.

Des conventions multiples et variées

Les lois en question ne nous sont pas imposées par la nature, mais sont imposées par nous à la nature. Mais si nous les imposons à la nature, c'est parce qu'elle nous permet de le faire. Si elle offrait trop de résistance, nous chercherions dans notre arsenal une autre forme qui serait pour elle plus acceptable.

[Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

Imposition à la nature des compensations et des lois par une opération active de notre esprit au moyen d'éléments conventionnels.

Quand l'expérience nous apprend qu'un certain phénomène ne correspond pas du tout aux lois indiquées, nous l'effaçons de la liste des déplacements. Quand elle nous apprend qu'un certain changement ne leur obéit qu'approximativement, nous considérons ce changement par une convention artificielle, comme la résultante de deux autres changements. Le premier composant est regardé comme un déplacement satisfaisant rigoureusement aux lois dont je viens de parler, tandis que le second composant, qui est petit, est regardé comme une altération qualitative. [Poincaré 1898]

Le choix du groupe

Un choix conventionnel guidé par l'expérience

Une étude expérimentale des lois suivant lesquelles se composent les déplacements.

Les déplacements se comportent comme un groupe d'ordre 6 (un groupe dépendant de 6 paramètres)

L'expérience nous apprend seulement que les déplacements se comportent à peu près comme les substitutions d'un groupe d'ordre 6. Ce n'est donc pas l'expérience qui nous fournit la notion de groupe. Cette notion préexiste ou plutôt ce qui préexiste dans l'esprit c'est la puissance de former cette notion.

L'expérience n'est pour nous qu'une occasion d'exercer cette puissance. Elle nous apprend que parmi tous les groupes simples que nous pouvons former, c'est un certain groupe qui s'écarte le moins de l'observation. » [Poincaré 1897, *Réponse à certaines critiques (RMM)*]

Le choix du groupe (2)

Sous groupes rotatifs, faisceaux rotatifs, et

L'ensemble des déplacements qui conservent ainsi un système donné de sensations forme évidemment un sous-groupe que nous pouvons appeler sous-groupe rotatif. Telle est la conclusion que nous tirons de l'expérience. Il est inutile de faire ressortir combien l'expérience est grossière et combien d'autre part la conclusion est précise.

L'expérience ne peut donc pas nous imposer la conclusion, mais elle suffit à nous la suggérer.

Toute rotation peut être décomposée en trois autres, appartenant respectivement à trois faisceaux rotatifs donnés.

[...] avec ces propositions, nous sommes en mesure [...] de limiter notre choix à un choix entre la géométrie d'Euclide, et celles de Lobatchewsky ou de Riemann. [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

Un usage intensif des théories de Lie et de sa classification des groupes de transformation de $\mathbb{R}^3$ qui admettent un unique invariant significatif entre deux points.

1. $p, q, r, xq - yp, yr - zq, zp - xr$
2. $p, q, r, xq - yp, yr - zq, zp + xr$
3. $p + xU, q + yU, r + zU, xq - yp, yr - zq, zp - xr$
4. $p - xU, q - yU, r - zU, xq - yp, yr - zq, zp - xr$
5. $p - xU, q - yU, r + zU, xq - yp, yr + zq, zp + xr$
6. $p, q, xp + yq + cr, yp - xq + r, (x^2 - y^2)p + 2xyq + 2(cx - y)r, 2xyp + (y^2 - x^2)q + 2(x + cy)r$
7. $p, q, xp + yq + r, yp - xq, (x^2 - y^2)p + 2xyq + 2xr, 2xyp + (y^2 - x^2)q + 2yr$
8. $p, q, xq + r, yq + cr, x^2p + 2xr, y^2p + 2cyr \quad (c \neq 0)$
9. $p, q, xq + r, x^2q + 2xr, xp + yq + cr, x^2p + 2xyq + 2(y + cx)r$
10. $p - yr, q + xr, r, xq, xp - yq, yp$
11. $p, q, r, xp + yr, 2xp + yq, x^2p + xyq + \frac{1}{2}y^2r \quad (U = xp + yq + zr) \text{ [Lie 1893]}$

Le choix du groupe euclidien

Une dernière propriété nous guide vers le groupe euclidien :

Pour aller plus loin, nous avons besoin d'une nouvelle proposition qui prenne la place du postulatum des parallèles. La proposition qui en tiendra lieu sera l'affirmation de l'existence d'un sous-groupe invariant dont tous les déplacements sont échangeables et qui formé de toutes les translations. C'est là ce qui détermine notre choix en faveur de la géométrie d'Euclide, parce que le groupe qui correspond à la géométrie de Lobatchewsky ne contient pas un tel sous-groupe invariant. » [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

Le choix du groupe (de la géométrie) s'effectue en étudiant les propriétés formelles (c'est-à-dire les propriétés communes à une classe de groupes isomorphes) du groupe des déplacements sans supposer préalablement un quelconque espace géométrique

L'espace géométrique et ses propriétés

Les éléments géométriques proviennent de l'étude de la structure du groupe des déplacements :

Les sous-groupes rotatifs sont à l'origine de la notion de point

Les faisceaux rotatifs sont à l'origine de la notion de droites

La donnée de l'espace géométrique comme *multiplicité numérique* n'est pas une nécessité.

Nous devons la théorie que je viens d'esquisser à Helmholtz et à Lie. Je ne diffère d'eux que sur un point ; [...] Comme je l'ai expliqué plus haut, nous devons distinguer dans un groupe la forme et la matière. Pour Helmholtz et Lie la matière du groupe existait avant la forme et en géométrie la matière est une *Zahlenmannigfaltigkeit* à trois dimensions. *Le nombre de dimensions est donc posé antérieurement au groupe.* Pour moi, au contraire la forme existe avant la matière. [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

La dimension de l'espace géométrique

La dimension de l'espace géométrique est conventionnelle :

- 3 catégories de sous-groupes : les sous-groupes de rotations (d'ordre 3), les vissages (d'ordre 2) et les faisceaux rotatifs (d'ordre 1)
- Selon que l'on considère l'opération (par automorphismes intérieurs) du groupe des déplacements sur ces groupes, l'espace de la géométrie sera de dimension 3, 4 ou 5.

Ce sont là trois solutions dont chacune est possible logiquement. Nous préférons la première parce qu'elle est la plus simple et elle est la plus simple parce qu'elle est celle qui donne à l'espace le nombre le plus petit de dimensions. Mais il y a une autre raison qui recommande ce choix ; le sous-groupe rotatif attire d'abord notre attention parce qu'il conserve certaines sensations. Le sous-groupe hélicoïdal ne nous est connu que plus tard et indirectement. Le faisceau rotatif d'autre n'est lui-même qu'un sous groupe du sous-groupe rotatif. [Poincaré 1898, *Des Fondements de la géométrie*]

Une tentative de reconstruction de la discussion de Poincaré

Le groupe affine euclidien G peut être défini comme le produit semi-direct $\mathbb{R}^3 \rtimes_{\alpha} O(3)$ où α est l'action canonique de $O(3)$ sur $\mathbb{R}^3$. Un élément de G est donc décrit comme un couple (v, f) , $v \in \mathbb{R}^3$, $f \in O(3)$, la loi du groupe s'écrivant :

$$(v, f)(w, g) = (fw + v, fg).$$

Soit g_1 un sous-groupe de rotations autour d'un point w . Nous pouvons définir g_1 :

$$\varphi \in g_1 \Leftrightarrow \{\varphi = (v, f) / f \in O(3), v = w - fw\}.$$

Un élément de g_1 est donc défini par la donnée de f . Chaque sous-groupe g_1 de rotations autour d'un point est isomorphe à $O(3)$. g_1 est donc défini par la donnée de w et l'ensemble des g_1 est donc de dimension 3.

Soit $\psi = (u, g)$ un élément de G . On a :

$$\psi\varphi\psi^{-1} = (u + gw - gfg^{-1}(u + gw), gfg^{-1}).$$

L'action de G sur les sous-groupes de rotations autour d'un point est analogue à l'action canonique de G sur $\mathbb{R}^3$. L'espace est donc de dimension 3.

Soit g_2 un sous-groupe de vissages autour d'un axe de vecteur directeur w et passant par v . Nous pouvons définir g_2 :

$$\varphi \in g_2 \Leftrightarrow \{\varphi = (v - fv + \lambda w, f) / f \in O(3), w = fw, \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Un élément de g_2 est défini par la donnée de f et de λ . Comme les éléments de $O(3)$ qui vérifie la condition $w = f(w)$ constitue un groupe isomorphe à $O(2)$, g_2 est un groupe d'ordre 2.

L'ensemble des g_2 peut être décrit comme l'ensemble quotient $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 / \mathfrak{R}$ où $\mathfrak{R}$ est la relation d'équivalence :

$$(v, w) \mathfrak{R} (v', w') \text{ si et seulement } v - v' = \mu w \text{ et } w' = \rho w, \mu \in \mathbf{R}, \rho \in \mathbf{R}.$$

L'ensemble des sous-groupes de vissages est de dimension 4.

Soit $\psi = (u, g)$. On a :

$$\psi \varphi \psi^{-1} = (u + gv - gfg^{-1}(u + gv) + \lambda gw, gfg^{-1}).$$

Cette action est évidemment compatible avec la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ et on obtient l'action de G sur l'ensemble des droites affines de $\mathbf{R}^3$. La dimension de l'espace est donc 4.

Soit g_3 un sous-groupe de rotations autour d'un axe de direction w et passant par v . Nous pouvons définir g_3 :

$$\varphi \in g_3 \Leftrightarrow \{\varphi = (v - fv, f) / f \in O(3), w = fw\}.$$

Un élément de g_3 est défini par la donnée de f . Pour les mêmes raisons que dans le cas précédent, g_3 est un groupe d'ordre 1 isomorphe à $O(2)$.

L'ensemble des g_3 peut être décrit comme $P^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^3$ et est de dimension 5. Soit $\psi = (u, g)$. On a :

$$\psi\varphi\psi^{-1} = (u + gv - gfg^{-1}(u + gv), gfg^{-1}).$$

Sur la composante $P^2(\mathbf{R})$, l'action de G est identique à celle de $O(3)$ vu comme un sous-groupe du groupe projectif et sur la composante en $\mathbf{R}^3$, l'action de G est l'action canonique. La dimension de l'espace est alors 5.

En résumé,

En 1898, l'idée centrale est celle de groupe de transformations.

Un groupe de transformations opère sur un espace. (*forme/matière*)

Poincaré insiste pour signaler que l'originalité de sa théorie réside dans le fait qu'il accorde, au contraire de ses prédécesseurs, la priorité au groupe.

L'espace est tellement secondaire par rapport au groupe que la dimension de l'espace est conventionnelle.

Nous échappons aussi de cette façon à une objection qui a souvent été faite à Helmholtz et à Lie : « Mais votre groupe, objecte-on, présuppose l'espace ; pour le construire vous êtes obligés d'admettre un continu à trois dimensions. » [...]

[...] C'est seulement par l'introduction du groupe qu'ils en ont fait une grandeur mesurable, c'est-à-dire un véritable espace. Cependant l'origine de ce continu non mesurable à trois dimensions reste imparfaitement expliquée. [Poincaré 1898, Des Fondements de la géométrie]

Mais,

Poincaré [1903] admet l'existence d'un *continuum* amorphe conçu comme un fond commun à toutes les géométries et qui fournirait une sorte de cadre à la genèse de la géométrie et de l'espace géométrique.

Analysis situs = géométrie qualitative ($\neq$ générale)

Révision partielle de sa théorie précédente (1898).

Il ne s'agit en aucun cas de fonder la géométrie sur une intuition du continu.

L'espace euclidien n'est pas une forme imposée à notre sensibilité, puisque nous pouvons imaginer l'espace non-euclidien ; mais les deux espaces euclidien et non-euclidien ont un fond commun, c'est ce *continuum* amorphe dont je parlais au début ; de ce continuum nous pouvons tirer soit l'espace euclidien, soit l'espace lobatchewskien, [...] . [Poincaré 1906, *La Valeur de la science*]

Analysis Situs

Et alors une question se pose : ce *continuum* amorphe, que notre Analyse a laissé subsister, n'est-il pas une forme imposée à notre sensibilité ? Nous aurions élargi la prison dans laquelle cette sensibilité est enfermée, mais ce serait toujours une prison. »
[Poincaré 1906, *La Valeur de la science*]

De tous les théorèmes de l'*Analysis Situs*, le plus important est celui que l'on exprime en disant que l'espace a trois dimensions. C'est de celui-là que nous allons nous occuper, et nous poserons la question en ces termes : quand nous disons que l'espace a trois dimensions, qu'est-ce que nous voulons dire ? [Poincaré 1906, *La Valeur de la science*]

L'espace géométrique n'est pas une forme imposée de notre sensibilité mais le *continuum* amorphe de l'*Analysis situs* ?

Les mêmes questions qui se posaient à propos des vérités de la géométrie euclidienne, se posent de nouveau à propos des théorèmes de l'*Analysis Situs*. Peuvent-ils être obtenus par un raisonnement déductif ? Sont-ce des conventions déguisées ? Sont-ce des vérités expérimentales ? Sont-ils les caractères d'une forme imposée soit à notre sensibilité, soit à notre entendement ? [Poincaré 1905]

Que voulons nous dire quand nous disons qu'un continu mathématique ou un continu physique a deux ou trois dimensions ? [Poincaré 1905]

La notion de coupure pour les continus physiques.

On remarquera que toutes ces définitions sont construites en partant uniquement de ce fait très simple, que deux ensembles d'impressions, tantôt peuvent être discernés, tantôt ne peuvent pas l'être. [Poincaré 1905]

La dimension des continus physiques

Un continu physique est dit à une dimension s'il peut être divisé par un certain nombre d'éléments indiscernables. Un continu physique à deux dimensions est un continu divisé par une ou plusieurs coupures à une dimension. Etc.

Le continu physique du groupe des déplacements est de dimensions 6. Mais c'est insuffisant pour conclure et Poincaré propose une amélioration de sa théorie.

Poincaré montre que l'espace attaché à notre sens du toucher, l'espace tactile est un continu physique à trois dimensions.

Comme les impressions tactiles ne sont pas altérées par les sensations musculaires, nous sommes guidés par l'expérience vers l'étude des groupes de transformations des espaces à trois dimensions.

L'expérience ne prouve pas que l'espace a trois dimensions ; elle nous prouve qu'il est commode de lui en attribuer trois, parce que c'est ainsi que le nombre des coups de pouce est réduit au minimum. [Poincaré 1905]

Le choix des conventions

Justifié selon les cas par des considérations d'accommodement à notre expérience, soit par des raisons de commodité pratique ou mathématique.

Doit ouvrir un espace de possibilité d'actions, parmi lesquelles celles de donner des significations, de définir de nouveaux objets.

Lié à des capacités de notre esprit.

Une convention n'est pas imposée. Nous sommes seulement guidés vers elle par l'expérience.