

Exercices de géométrie vectorielle

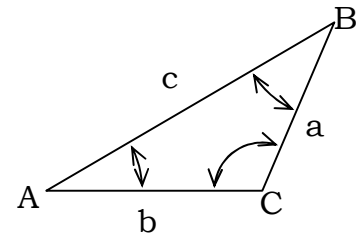
1 – Norme, produit scalaire, produit vectoriel

- 1) Soient deux vecteurs $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, formant respectivement les angles de -30° et 90° avec l'axe des x et de normes $A_1=5$ et $A_2=3$. Trouver les coordonnées de $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
À l'aide des produits scalaires et vectoriels, calculer les cosinus et sinus de l'angle entre $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$. En déduire cet angle. Vérifier.

- 2) On considère le vecteur $\vec{A} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ sur la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Calculer la norme du vecteur $\vec{A}$, puis celle de ses projections dans les plans $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{i}, \vec{k})$.

- 3) Soit ABC un triangle quelconque de côtés a, b, c et d'angles aux sommets A en A, B en B, C en C. Démontrer à l'aide du calcul vectoriel de l'aire de ce triangle que :

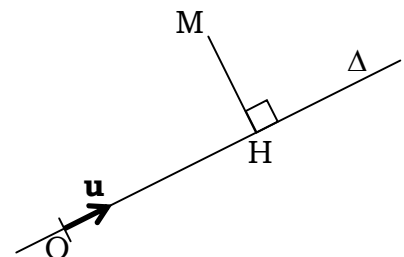
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$



- 4) Soit Δ une droite du plan, O un point de cette droite et $\vec{u}$ un vecteur unitaire colinéaire à Δ . Soit H la projection orthogonale du point M sur Δ .

À l'aide des produits scalaire et vectoriel,

- définir la distance algébrique $\overline{OH}$ sur la droite Δ orientée par le vecteur $\vec{u}$. Exprimer $\overline{OH}$ à l'aide des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$. En déduire la distance OH ;
- exprimer la distance HM à l'aide des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$. Dans le triangle OHM, écrire le théorème de Pythagore au moyen des produits scalaire et vectoriel.



- 5) **Diagonales d'un cube :** Calculer l'angle θ formé par deux diagonales quelconques d'un cube.

Soient O et A les extrémités d'une arête B et C les extrémités de l'autre arête. Montrer que les points O, A, B, C sont dans un même plan. Il est suggéré d'utiliser le produit mixte de trois vecteurs.

Réponse : $\cos \theta = 1/3 \quad \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}) = 0$

- 6) **Moment d'un vecteur par rapport à un point ou une droite :**

Un vecteur $\vec{AB}$ pour origine $A=(1, 0, 0)$ et pour extrémité $B=(1, -1, 2)$.

Quels sont les composantes de $\vec{AB}$?

Quel est le moment de ce vecteur par rapport à O ?

Quelle est l'aire du triangle OAB ?

Quelle est la distance du point O à la droite AB ?

Quel est le moment du vecteur $\vec{AB}$ par rapport au point $O'=(0, 1, 0)$?

Quel est le moment du vecteur $\vec{AB}$ par rapport à l'axe OZ ?

Quel est le moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport à un axe passant par O et pointant dans la direction (1, 1, 1) ?

Quel est le moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport à l'axe orienté $\overrightarrow{OO'}$?

Rappel : Le moment de $\overrightarrow{AB}$ d'origine A et extrémité B par rapport à un point O est le produit vectoriel $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$. Si vous préférez, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est considéré comme une force appliquée au point A.

Le moment de $\overrightarrow{AB}$ d'origine A et extrémité B par rapport à la droite $\Delta = (O, \vec{u})$, passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$ est la projection du moment en O sur le vecteur $\vec{u}$. Il s'exprime donc comme le produit mixte $\vec{u} \cdot (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB})$.

La droite $\Delta = (O, \vec{u})$ est la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$. C'est une droite orientée par le vecteur $\vec{u}$.

2 – Double produit vectoriel

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$. On se propose d'établir la formule

$$\vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\vec{w} \cdot \vec{v}) \vec{u} - (\vec{w} \cdot \vec{u}) \vec{v}.$$

Elle est clairement vérifiée si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Dans le cas contraire, on la vérifiera en choisissant une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont le vecteur $\vec{i}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et telle que le vecteur $\vec{v}$ appartienne au plan vectoriel engendré par $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Coordonnées polaires, cylindriques et sphériques

1 – Vecteurs unitaires des coordonnées polaires

Exprimer les vecteurs unitaires des coordonnées polaires, $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\varphi$, en fonction des vecteurs unitaires des coordonnées cartésiennes, $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

2 – Vecteurs unitaires des coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont obtenues par un second passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires dans le plan $(\vec{k}, \vec{u}_\rho)$ perpendiculaire au vecteur $\vec{u}_\varphi$.

1) Exprimer les vecteurs unitaires des coordonnées polaires, $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$, en fonction des vecteurs unitaires des coordonnées cartésiennes, $\vec{k}$ et $\vec{u}_\rho$.

2) Exprimer les vecteurs unitaires des coordonnées sphériques, $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$, en fonction des vecteurs unitaires des coordonnées cartésiennes, $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

$$\text{Réponse : } \begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{u}_r = \cos \theta \vec{k} + \sin \theta \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{k} + \cos \theta \vec{u}_\rho \end{cases}$$

Ensuite, il suffit de reporter l'expression de $\vec{u}_\rho$ dans celles de $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.

N'oubliez pas qu'il faut regarder le plan $(\vec{k}, \vec{u}_\rho)$ par l'arrière, de façon que la base $(\vec{k}, \vec{u}_\rho)$ soit une base directe de ce plan. Le vecteur $\vec{u}_\varphi$ pointe alors vers nous.

3 – Éléments de longueur en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

Soit $Oxyz$ un repère cartésien. Un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) puis cylindriques (ρ, φ, z) et enfin sphériques (r, θ, φ) . On considère un déplacement élémentaire $\overline{dM}$ du point M . Exprimer la longueur, ds , de ce déplacement élémentaire en fonction de :

- 1) dx, dy, dz ;
- 2) $\rho, d\rho, d\varphi, dz$;
- 3) $r, \theta, dr, d\theta, d\varphi$.

4 – Vitesse et accélération en coordonnées sphériques

- a) A l'aide des résultats de l'exercice 2, déterminer les dérivées par rapport au temps des vecteurs de base $\bar{u}_\rho, \bar{u}_\varphi$ puis $\bar{u}_r$ et $\bar{u}_\theta$.
- b) Donner l'expression de la vitesse en coordonnées cylindriques puis sphériques.
- c) Donner l'expression de l'accélération dans ce mêmes systèmes de coordonnées.

Réponses :

En cylindriques :	En sphériques :
$\begin{cases} \frac{d\bar{u}_\rho}{dt} = \dot{\varphi} \bar{u}_\varphi \\ \frac{d\bar{u}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi} \bar{u}_\rho \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{d\bar{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \bar{u}_\theta + \sin \theta \dot{\varphi} \bar{u}_\varphi \\ \frac{d\bar{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \bar{u}_r + \cos \theta \dot{\varphi} \bar{u}_\varphi \end{cases}$
$\overline{OM} = \rho \bar{u}_\rho + z \bar{k}$	$\overline{OM} = r \bar{u}_r$
$\bar{v} = \dot{\rho} \bar{u}_\rho + \rho \dot{\varphi} \bar{u}_\varphi + \dot{z} \bar{k}$	$\bar{v} = \dot{r} \bar{u}_r + r \dot{\theta} \bar{u}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \bar{u}_\varphi$
$\bar{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \bar{u}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \bar{u}_\varphi + \ddot{z} \bar{k}$	$\begin{aligned} \bar{a} = & \ddot{r} \bar{u}_r + \dot{r}(\dot{\theta} \bar{u}_\theta + \sin \theta \dot{\varphi} \bar{u}_\varphi) \\ & + \dot{r} \dot{\theta} \bar{u}_\theta + r \ddot{\theta} \bar{u}_\theta + r \dot{\theta} (-\dot{\theta} \bar{u}_r + \cos \theta \dot{\varphi} \bar{u}_\varphi) \\ & + \dot{r} \sin \theta \dot{\varphi} \bar{u}_\varphi + r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} \bar{u}_\varphi + r \sin \theta \ddot{\varphi} \bar{u}_\varphi \\ & - r \sin \theta \dot{\varphi}^2 (\sin \theta \bar{u}_r + \cos \theta \bar{u}_\theta) \end{aligned}$
Pour les sphériques, on utilise $\bar{u}_\rho = \sin \theta \bar{u}_r + \cos \theta \bar{u}_\theta$ $\frac{d\bar{u}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi} \bar{u}_\rho = -\dot{\varphi} (\sin \theta \bar{u}_r + \cos \theta \bar{u}_\theta)$	$\begin{aligned} \bar{a} = & (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \bar{u}_r \\ & + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2) \bar{u}_\theta \\ & + (2\dot{r} \sin \theta \dot{\varphi} + 2r \dot{\theta} \cos \theta \dot{\varphi} + r \sin \theta \ddot{\varphi}) \bar{u}_\varphi \end{aligned}$

Commentaire : Si l'angle φ est constant, le mouvement est contraint dans le plan d'un méridien $(O, \bar{u}_z, \bar{u}_\rho)$ avec $\bar{u}_z = \bar{k}$. Ce plan est fixe et l'on retrouve l'expression de l'accélération en coordonnées polaires dans ce plan, sur la base $(\bar{u}_r, \bar{u}_\theta)$. Si l'angle θ est constant, le mouvement a lieu sur un cône. Lorsque $\theta = \pi/2$, ce cône est le plan de l'équateur ($\sin \theta = 1$). La formule est celle de l'accélération en coordonnées polaires dans le plan $(O, \bar{i}, \bar{j})$, sur la base $(\bar{u}_r, \bar{u}_\varphi)$; ici $\bar{u}_r$ est confondu avec $\bar{u}_\rho$.

Propriétés des coniques

1 – Parabole

Considérons la parabole $y = x^2 / 2p$.

Montrer que la tangente au point d'abscisse x_0 coupe l'axe des abscisses en $x_0/2$.

Le foyer F de cette parabole est situé en $(0, p/2)$.

Montrer que la tangente en M_0 , d'abscisse x_0 est la bissectrice extérieure de FM_0 et de la droite passant par M_0 et parallèle à l'axe Oy .

2 – Ellipse

Une ellipse a pour équation polaire $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ si l'on prend pour pôle un des foyers

(que nous appellerons F).

a) Déterminer le grand axe, $2a$, de cette ellipse en fonction du paramètre p et de l'ellipticité e .

b) En déduire la position ($-c$) du centre de symétrie de l'ellipse, O , et la position de l'autre foyer, F' . On appelle $2c$ la distance entre les deux foyers.

Vérifier que $e = c/a$.

c) Déterminer le demi-petit axe, b .

d) Donner les coordonnées cartésiennes d'un point de l'ellipse dans les axes Oxy .

e) Vérifier que l'équation de cette ellipse est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Réponses :

On trouve $a = \frac{p}{1 - e^2}$ $c = \frac{pe}{1 - e^2}$ $e = \frac{c}{a}$

a) Un sommet (S) est en $x = \frac{p}{1 + e}$ et

l'autre (S') en $x' = \frac{-p}{1 - e}$ et leur distance

$$SS' = 2a.$$

b) Le milieu des sommets est le centre de symétrie, O ; on en déduit $OF = c$.

c) Le demi-petit axe, b , est tel que

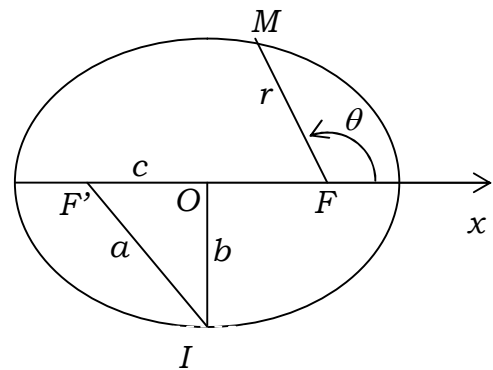
$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1 - e^2) = \frac{p^2}{1 - e^2}, \quad \text{donc}$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad \text{L'égalité ci-dessus peut}$$

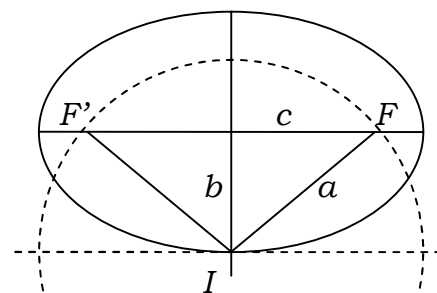
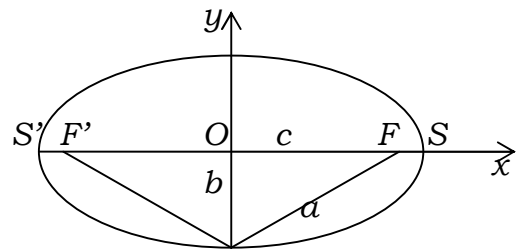
également s'écrire $p = b^2 / a$.

d) Il suffit d'écrire la relation de Chasles,

$$\vec{OM} = \vec{OF} + \vec{FM}.$$



Coordonnées polaires de pôle F .
 $r = FM$ et $\theta = \text{angle}(Fx, FM)$.



Tracer le cercle de centre I et rayon a permet de placer les deux foyers.

Les coordonnées cartésiennes sont $x = c + r \cos \theta = \frac{pe}{1 - e^2} + \frac{p \cos \theta}{1 + e \cos \theta}$ et

$$y = r \sin \theta = \frac{p \sin \theta}{1 + e \cos \theta}$$

e) Pour retrouver l'équation cartésienne de l'ellipse, il suffit de former $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. On

trouve $\frac{x}{a} = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta}$, $\frac{y}{b} = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin \theta}{1 + e \cos \theta}$, donc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(e + \cos \theta)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = 1.$$

3 – Satellites

Pour un satellite décrivant une orbite elliptique autour de la Terre, le point le plus proche est le périée et le point le plus éloigné est l'apogée (le suffixe "gée" vient de Gaïa, la Terre).

Qu'en est-il pour un satellite qui tourne autour du soleil, d'un astre quelconque, ou d'un point qui tourne autour d'un centre ?

Foyer principal	Terre (Gaïa)	Soleil (Hélios)	Astre	Centre
plus proche	périée	périhélie	périastre	péricentre
plus éloigné	apogée	aphélie	apoastre	apocentre

4 – Hyperbole