

Exercices de cinématique

1 – Coordonnées cartésiennes

1) On considère le mouvement d'un point mobile P d'équation horaire :

$$x = t^3 + 4t^2 + 3 \text{ selon l'axe } Ox, \text{ où l'on exprime } x \text{ en mètres et } t \text{ en seconde.}$$

a) Calculer la vitesse et l'accélération de P à l'instant t .

b) Trouver la position, la vitesse et l'accélération de P pour un temps $t_1=2s$ puis $t_2=3s$.

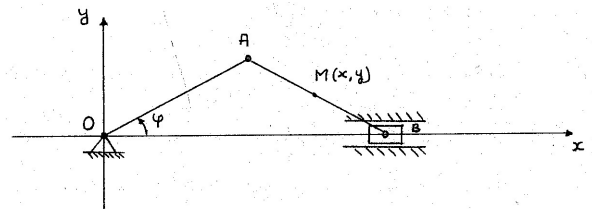
2) Une pierre tombe avec une accélération constante égale à 10 m/s^2 . Sa vitesse initiale était nulle. Une seconde plus tard, une deuxième pierre part du même point avec la même accélération et une vitesse initiale de 20 m/s . A quelle distance du point de chute se croisent-elles ?

3) on considère l'ensemble bielle – manivelle de la figure ci-dessous.

a) Déterminer la trajectoire, la vitesse et l'accélération du milieu M de la bielle si $OA = AB = 2h$ et si l'angle φ croît proportionnellement au temps ($\varphi = \omega t$) pendant la rotation de la manivelle.

b) Dans le cas où $OA = a$ et $AB = b$, avec $b > a$, calculer $\overline{OB}$ en fonction du temps ($\overline{OB} = x_B$ est l'abscisse du point B).

Le mouvement de B est-il sinusoïdal ?



2 – Dérivation de vecteurs

Considérons un vecteur $\vec{V}(t)$.

a) Peut-on dire que la norme de la dérivée $d\vec{V}/dt$ est égale à la dérivée de la norme de $\vec{V}(t)$?

b) Montrer que si $\vec{V}(t)$ a une norme constante le vecteur dérivé, $d\vec{V}/dt$, lui est orthogonal.

c) Montrer que d'une manière générale, $\vec{V} \cdot d\vec{V}/dt = V dV/dt$.

d) Si $\vec{V}(t)$ à une direction constante, montrer que $d\vec{V}/dt$ est colinéaire à $\vec{V}$.

3 – Dérivation de vecteurs

Dans un plan xOy , on considère un vecteur unitaire $\vec{u}$ faisant un angle $\varphi(t)$ avec l'axe fixe Ox .

1) Montrer que les vecteurs dérivés $d\vec{u}/d\varphi$ et $d\vec{u}/dt$ sont perpendiculaires au vecteur $\vec{u}$, à l'aide d'une méthode géométrique utilisant la définition de la dérivée d'un vecteur, puis en utilisant les propriétés du produit scalaire de deux vecteurs.

2) Montrer que $d\vec{u}/d\varphi$ est un vecteur unitaire.

3) Montrer que la dérivée seconde du vecteur $\vec{u}$ par rapport à l'angle φ est égale au vecteur $-\vec{u}$. Calculer les composantes radiale et orthoradiale du vecteur $d^2\vec{u}/dt^2$.

4) Soit M un point du plan xOy . On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire dirigé de l'origine O vers M, Si bien que $\overrightarrow{OM}(t) = r(t) \vec{u}(t)$. Déterminer les composantes radiales et orthoradiale de la vitesse et de l'accélération du point M.

Cinématique – série 2

1 – Différentielle Totale

Dans un repère donné Oxyz, on considère la fonction de force $U(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$.

Calculer les composantes de $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} U$.

Calculer l'intégrale curviligne $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{M}$ le long de l'arc de courbe d'équation $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$, $z = a\theta$, lorsque θ varie de 0 à π .

Contrôler le résultat.

2 – Hodographe

Les coordonnées d'un point M sont à l'instant t

$$x = t - \sin(t), \quad y = 1 - \cos(t), \quad z = 4 \sin(t/2).$$

1) Déterminer les composantes du vecteur vitesse et décrire sommairement l'hodographe du mouvement.

2) Déterminer les composantes du vecteur accélération.

3) Exprimer les coordonnées du point P où le vecteur accélération coupe le plan xOy.

N.B. On appelle hodographe du mouvement la courbe que décrit l'extrémité du vecteur vitesse lorsque le temps s'écoule.

3 – Parabole ou cercle osculateur

On considère le cercle de centre (0, R) et rayon R. Ce dernier passe par l'origine. Quelle est la parabole osculatrice au cercle, c'est-à-dire dont les développements au second ordre en puissance de l'abscisse sont identiques.

Une équation paramétrique du cercle est $x = R \sin \theta$, $y = R(1 - \cos \theta)$ donc au second ordre on a $\sin \theta \sim \theta$ et $1 - \cos \theta \sim \theta^2/2$ donc l'équation de la parabole est $y = x^2 / (2R)$.

Réciproquement, le cercle osculateur à la parabole $x^2 = 2py$ ($p > 0$) est le cercle de centre (0, p) et de rayon p.

Formules liées au trièdre de Serret – Frénet

Le trièdre de Serret Frénet est associé au mouvement d'un point matériel dans l'espace. Dans un premier temps (à l'ordre 1), la courbe est assimilée à sa tangente. On introduit un vecteur unitaire, $\vec{\tau}$ (tau), dans la direction de la tangente à la trajectoire. Dans un deuxième temps (à l'ordre 2), la courbe est assimilée à un cercle. On introduit alors un second vecteur, $\vec{n}$, dirigé vers le centre du cercle. Par construction $\vec{n}$ est perpendiculaire à $\vec{\tau}$. Un troisième vecteur $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$ complète la base.

Serret et Frénet utilisent l'abscisse curviligne, s, comme paramètre et non le temps. Les variations du vecteur tangent permettent de définir à la fois le vecteur normal et le rayon de courbure, R, via la relation $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$. Géométriquement, R est le rayon du cercle osculateur à la trajectoire (cercle le plus proche de celle-ci)

La vitesse s'écrit donc $\vec{v} = v \vec{\tau}$ et l'accélération $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}$. Ces formules sont identiques à celles des coordonnées polaires pour un mouvement circulaire non

uniforme et c'est normal car le mouvement est à l'ordre 2 un mouvement circulaire (dont le centre n'est pas l'origine O dans l'approche de Serret Frénet).

	Tangente	Normale	Vitesse	Accélération	
				tangentielle	Normale
Polaires	$\vec{u}_\theta$	$-\vec{u}_r$	$r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$	$r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$	$r \dot{\theta}^2 (-\vec{u}_r)$
Serret Frénet	$\vec{\tau}$	$\vec{n}$	$\vec{v} = v \vec{\tau}$	$\frac{dv}{dt} \vec{\tau}$	$\frac{v^2}{R} \vec{n}$

Le fait que la courbe n'est pas plane n'intervient qu'au troisième ordre. La conséquence est que le vecteur $\vec{b}$ tourne autour de la tangente. On définit alors la torsion de la courbe et le rayon de torsion, $\mathcal{J}$, (inverse de la torsion) par $\frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{\mathcal{J}}$. Le vecteur $\vec{\tau}$ tourne dans le plan $(\vec{\tau}, \vec{n})$ par définition de $\vec{n}$. Le vecteur $\vec{n}$ a un mouvement plus complexe car il tourne dans le plan osculateur $(\vec{\tau}, \vec{n})$, donc autour de $\vec{b}$ et en même temps autour du vecteur tangent $\vec{\tau}$ (en même temps que $\vec{b}$ pour lui rester perpendiculaire).

4 – En introduction au trièdre de Serret – Frénet

Un mobile, assimilé à un point M , se déplace dans le plan Oxy sur un cercle de rayon R et de centre O . Sa position est repérée par l'angle φ que fait la droite OM avec l'axe Ox .

Exprimer la vitesse $\vec{V}$ du point M et son accélération $\vec{\gamma}$ dans le repère fixe Oxy .

Déterminer les composantes tangentielle et normale de $\vec{V}$ et $\vec{\gamma}$.

Que devient $\vec{\gamma}$ lorsque la norme de la vitesse reste constante ?

Quelle est alors la nature du mouvement ?

5 – Vieil exercice

Soit un mobile sur un cercle de rayon R et de centre O qui tourne avec une vitesse angulaire $\dot{\varphi} = \omega$.

Quelles sont les coordonnées cartésiennes de M en fonction de R et φ ?

Calculer la vitesse $\vec{V}$ du point M et son accélération $\vec{\gamma}$ dans le repère fixe Oxy .

Déterminer les composantes tangentielle et normale de $\vec{V}$ et $\vec{\gamma}$.

Que devient $\vec{\gamma}$ lorsque la norme de la vitesse reste constante ?

Quelle est alors la nature du mouvement ?

On suppose maintenant que $\ddot{\varphi} = \alpha_0$, constante non nulle. Donner l'expression de $\dot{\varphi}$ et φ en fonction du temps ($\varphi = 0$ et $\dot{\varphi} = \omega_0$ à $t = 0$).

6 – Mouvement circulaire non uniforme

Un point M décrit une trajectoire circulaire de centre O . Son abscisse curviligne, s , obéit à la loi horaire $s = at^2 + bt + c$ où a , b , c sont des constantes.

Calculer en coordonnées polaires de pôle O la vitesse et l'accélération de M .

A quelle condition sont-elles constamment perpendiculaires ?

7 – Trièdre de Serret – Frénet

On considère la trajectoire repérée par :

$$\vec{OM} = 3 \cos 2t \vec{i} + 3 \sin 2t \vec{j} + (8t - 4) \vec{k}$$

- 1) Trouver le vecteur unitaire $\vec{e}_t$ tangent à la courbe orientée dans le sens du mouvement.
- 2) Trouver le rayon de courbure ainsi que le vecteur unitaire dirigé le long de la normale principale en tout point de la trajectoire.

8 – Spirale d'Archimède

Un point M décrit une courbe plane d'équation polaire paramétrique :

$$\begin{cases} r = a \theta \\ \theta = \omega t \end{cases} \quad a \text{ et } \omega \text{ étant des constantes.}$$

- 1) Calculer les composantes radiales et orthoradiale de la vitesse et de l'accélération en déduire les normes de ces vecteurs ainsi que l'angle que fait la vitesse avec le rayon vecteur.

9 – Tourne disque – Spirale d'Archimède

La pointe du diamant d'un tourne-disque décrit le cercle de centre $C = (0, R)$ et de rayon R . Cette pointe est guidée par le sillon d'un disque vinyle dont l'équation est, en coordonnées polaires de pôle O , donnée par $r = a \theta$ dans des axes liés au disque (le point O est le centre du disque). Celui-ci tourne autour de l'origine à une vitesse angulaire ω .

Faire un dessin.

Lorsque le disque tourne, le diamant se rapproche progressivement de l'origine, O , autour de laquelle le disque tourne. Préciser les signes relatifs de a et ω .

Déterminer les coordonnées de la pointe diamant en fonction du temps.

Quelle est l'accélération de la pointe en diamant ?

On pourra utiliser des coordonnées cartésiennes ou des coordonnées polaires de centre O ou C .

In fine, lesquelles sont les coordonnées les plus appropriées à la question posée ?

10 – Spirale logarithmique

Un point M décrit une courbe plane d'équation polaire paramétrique :

$$\begin{cases} r = b \exp(-t/t_0) \\ \theta = \omega t \end{cases} \quad b, t_0 \text{ et } \omega \text{ étant des constantes.}$$

- 1) Calculer les composantes radiales et orthoradiale de la vitesse et de l'accélération en déduire les normes de ces vecteurs ainsi que l'angle que fait la vitesse avec le rayon vecteur.

Suite (application du trièdre de Serret – Frénet)

- 2) Trouver les composantes intrinsèques de l'accélération.
- 3) Quel est le rayon de courbure de la trajectoire ?

11 – Bateau (coordonnées sphériques)

Trouvez la trajectoire d'un bateau qui va « tout droit » vers le Nord – Est à cap constant (l'angle entre le vecteur vitesse et l'Est est un angle constant, α). Conditions initiales : à $t = 0$; $\varphi = 0$; $\theta = \pi/2$.

12 – Cardioïde

On considère la courbe d'équation $\rho = a(1 + \cos \theta)$ en coordonnées polaires. Elle est parcourue par un mobile dont l'angle polaire vérifie $\theta = \omega t$.

- 1) Quelle est l'allure de la trajectoire décrite par le mobile ?
- 2) Calculer la vitesse du mobile.
- 3) Calculer la norme de la vitesse et le périmètre de la trajectoire.
- 4) Calculer le vecteur accélération.

Suite (application du trièdre de Serret – Frénet)

- 5) Déterminer l'accélération tangentielle puis l'accélération normale. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire en M.

Fragments de réponse : $v = 2a\omega \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$ $L = 8a$ $R = \frac{4}{3}a \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$

13 – Gradient et circulation

Déterminer le gradient $\vec{F}_1$ de la fonction $U_1 = xy + yz + zx$.

On considère le champ de vecteur $\vec{F}_2 = (1, 1, 1)$. Montrer qu'il dérive d'un potentiel que l'on calculera (c.à.d qu'il existe V_2 tel que $\vec{F}_2 = -\text{grad } V_2$).

Soit $\vec{F}$ le champ de vecteur défini en chaque point de l'espace par $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Calculer la circulation de ce vecteur depuis l'origine jusqu'au point $P = (1, 1, 1)$. Retrouver directement le résultat.

14 – Hélice

Un mobile décrit l'hélice circulaire, $\rho = R$, $z = \lambda \theta$, où $\theta = \theta(t)$ est une fonction du temps. Préciser la signification de λ .

Calculer la vitesse et l'accélération en coordonnées cylindriques.

Chercher $\theta(t)$ de façon qu'à chaque instant, $v^2 = 2gz$, où g est une constante.

15 – Hélice

Est-il possible de trouver une hélice circulaire $\rho = R$, $z = f(\theta)$ telle qu'un point mobile sur cette hélice vérifie à chaque instant $v^2 = 2gz$ tout en ayant un mouvement projeté sur le plan horizontal Oxy circulaire et uniforme.

16 – DL au 3-ième ordre et trièdre de Serret – Frénet

Un mobile se déplace, dans l'espace, le long d'une courbe paramétrée $M = M(t)$, au moins trois fois continument dérivable. Considérons un point M_0 de cette trajectoire, et prenons l'abscisse curviligne, s , comme paramètre pour repérer la position d'un point sur la courbe. Prenons de plus l'origine de l'abscisse curviligne en M_0 .

Un développement limité au second ordre de $\vec{OM}(s)$ au voisinage de $s = 0$ permet d'écrire :

$$\vec{OM}(s) = \vec{\alpha} s + \vec{\beta} \frac{s^2}{2} + s^2 \vec{\varepsilon}(s)$$

où $\vec{\alpha} = \left(\frac{d\vec{OM}}{ds} \right)_{s=0}$ $\vec{\beta} = \left(\frac{d^2\vec{OM}}{ds^2} \right)_{s=0}$ et $\lim_{s \rightarrow 0} \vec{\varepsilon}(s) = \vec{0}$

A l'abscisse s , le vecteur tangent à la courbe est $\vec{\tau}(s) = \vec{\alpha} + \vec{\beta}s + s\vec{\varepsilon}_2(s)$. Comme ce vecteur est unitaire pour toute abscisse s , $\vec{\beta}$ est orthogonal à $\vec{\alpha}$ (on a $\vec{\beta} = (d\vec{\tau}/ds)_{s=0}$).

Nous pouvons ainsi définir un repère $Oxyz$ dont l'origine est $O = M_0$, l'axe des x dans la direction $\vec{\alpha}$ et l'axe des y dans la direction $\vec{\beta}$. La direction de l'axe Oz s'en déduit immédiatement.

Le vecteur $\vec{i} = \vec{\alpha}$ de notre repère est confondu avec le vecteur tangent en M_0 , $\vec{\tau}_0$. Le vecteur $\vec{\beta}$ est porté par la normale principale à la courbe $\vec{j} = \vec{n}$.

Posons $\vec{\beta} = \vec{n}/R$.

Dans le plan Oxy , la courbe peut être assimilée à un cercle de centre $(0, R)$ et rayon R . Au second ordre, l'équation du cercle est

Poussons le DL de $M_0M(s)$ un ordre plus loin. Il vient

$$\vec{M_0M}(s) = \vec{\tau}_0 s + \frac{\vec{n}_0}{R_0} \frac{s^2}{2} + \frac{\vec{\gamma}}{\gamma} \frac{s^3}{6} + s^3 \vec{\varepsilon}_3(s) \quad \text{avec} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \vec{\varepsilon}_3(s) = \vec{0}$$

le vecteur tangent est $\vec{\tau}(s) \approx \vec{\tau}_0 + \vec{n}_0 \frac{s}{R_0} + \frac{\vec{\gamma}}{\gamma} \frac{s^2}{2}$

dont la dérivée donne la normale principale et le rayon de courbure

$$\frac{\vec{n}}{R}(s) \approx \frac{\vec{n}_0}{R_0} + \vec{\gamma} s$$

soit $\frac{1}{R(s)} \approx \frac{1}{R_0} \left(1 + R_0 \vec{n}_0 \cdot \vec{\gamma} s\right)$ $R(s) \approx R_0 \left(1 - R_0 \vec{n}_0 \cdot \vec{\gamma} s\right)$

$$\vec{n}(s) \approx R(s) \left[\frac{\vec{n}_0}{R_0} + \vec{\gamma} s \right] \approx \vec{n}_0 + R_0 \left\{ \vec{\gamma} - (\vec{n}_0 \cdot \vec{\gamma}) \vec{n}_0 \right\} s$$

Le vecteur $\vec{\delta} = \vec{\gamma} - (\vec{n}_0 \cdot \vec{\gamma}) \vec{n}_0$ ainsi obtenu est par construction orthogonal à $\vec{n}_0$ et le produit $R_0 \vec{\delta}$ représente la dérivée $(dn/ds)_{s=0}$.

La bi-normale est portée par le vecteur $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$ qui s'écrit à l'ordre 1

$$\begin{aligned} \vec{b}(s) &= \vec{\tau}(s) \wedge \vec{n}(s) \approx \left(\vec{\tau}_0 + \vec{n}_0 \frac{s}{R_0} \right) \wedge \left(\vec{n}_0 + R_0 \vec{\delta} s \right) \\ &\approx \vec{b}_0 + \vec{\tau}_0 \wedge R_0 \vec{\delta} s \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{b}(s)$ étant unitaire, $\vec{\tau}_0 \wedge \vec{\delta}$ est orthogonal à $\vec{b}_0$. Il est également perpendiculaire à $\vec{\tau}_0$, donc c'est un vecteur porté par $\vec{n}_0$. Si l'on pose

$$\left(\frac{d\vec{b}}{ds} \right)_{s=0} = -\frac{\vec{n}_0}{\mathcal{I}_0} \text{ alors il vient } R_0 \vec{\delta} = \left(\frac{dn}{ds} \right)_{s=0} = \frac{\vec{b}_0}{\mathcal{I}_0} - \frac{\vec{\tau}_0}{R_0}.$$

La dérivée troisième, $\vec{\gamma}$, peut détenir une composante non nulle selon $\vec{n}_0$. Celle-ci est sans importance pour la détermination de la courbure et de la torsion.

Point important, c'est la composante du vecteur $\vec{\delta}$ (donc de la dérivée troisième $\vec{\gamma}$) hors du plan $(\vec{\tau}_0, \vec{n}_0)$, donc selon $\vec{b}_0$ (et elle seulement) qui contribue à la torsion. Une torsion nulle est l'indication que la courbe est plane jusqu'à l'ordre 3 inclus.

17 – Loi des aires

Rappeler l'expression de l'accélération en coordonnées polaires. Dans le cas d'un mouvement à accélération centrale, la composante a_θ est nulle.

Montrer qu'en découle la loi des aires $\rho^2 \dot{\theta} = C = \text{constante}$.

Réponse : On a $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} d(r^2\dot{\theta})/dt$.

18 – Loi des aires, formule de Binet

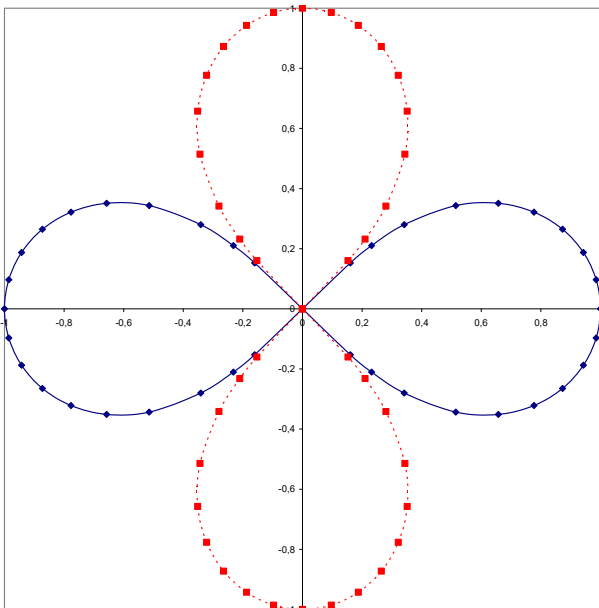
Calculer l'accélération d'un mobile dont le mouvement vérifie à chaque instant la relation $\rho^2 \dot{\theta} = C = \text{constante}$ et se déplaçant soit sur

- ♠ la parabole d'équation $\rho = p/(1 + \cos \theta)$,
- ♥ la double lemniscate de Bernoulli $\rho^2 = a^2 |\cos 2\theta|$;
- ♦ le cercle $\rho = 2R \cos \theta$;
- ♣ le trèfle à 4 feuilles d'équation $\rho = a \cos 2\theta$.

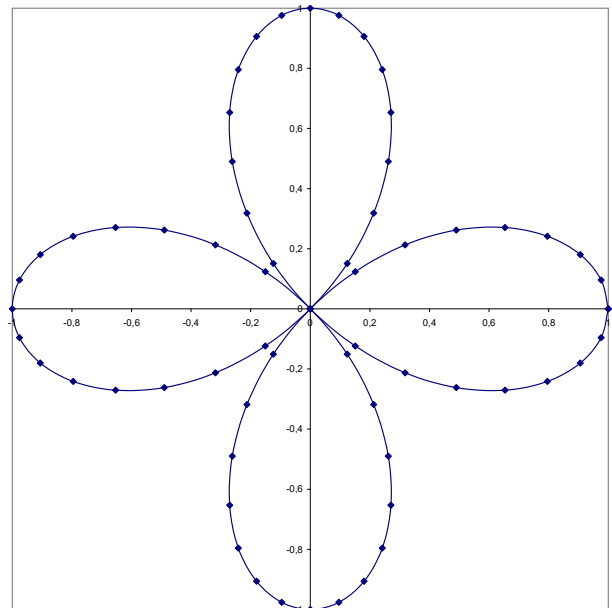
On précisera la droite support de l'accélération et on donnera la valeur de celle-ci en fonction de ρ .

Indication : On appliquera la méthode de Binet qui consiste à poser $1/\rho(t) = \xi(\theta(t))$ et tout exprimer en fonction de ξ , de ses dérivées par rapport à θ et enfin de la constante de la loi des aires, C .

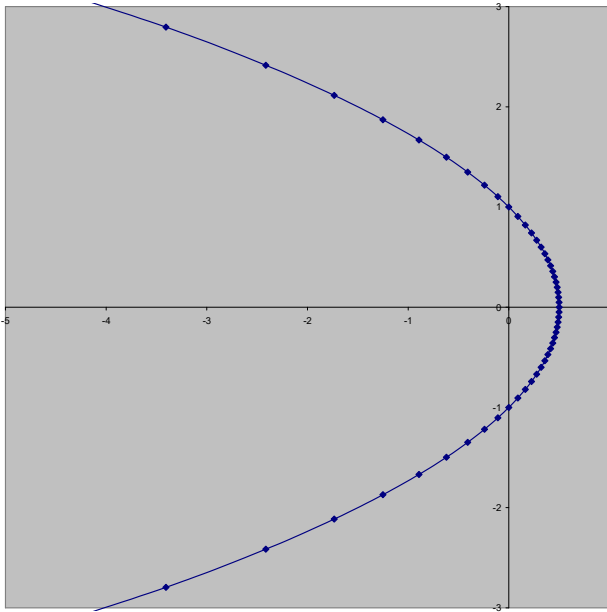
Remarque : La lemniscate de Bernoulli est la courbe d'équation $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$, avec $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ modulo π . Elle ne comporte que deux lobes symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine O. Pour que le mouvement puisse se poursuivre au delà de $\pi/4$ et jusqu'à $3\pi/4$, il est nécessaire de lui adjoindre une seconde lemniscate d'équation $\rho^2 = -a^2 \cos 2\theta$. Tous les angles de 0 à 2π sont ainsi permis. En $\theta = \pi/4$ [$\pi/2$], le point mobile passe d'une courbe à l'autre.



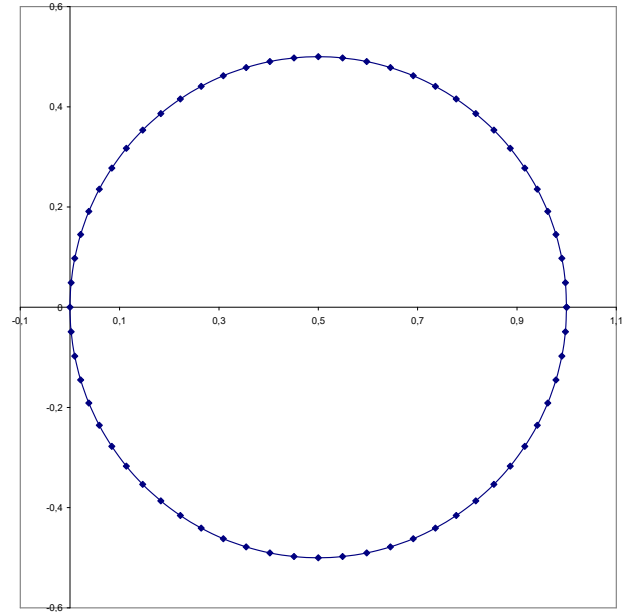
Lemniscates de Bernoulli d'équations $\rho^2 = \pm a^2 \cos 2\theta$ (ici $a = 1$).



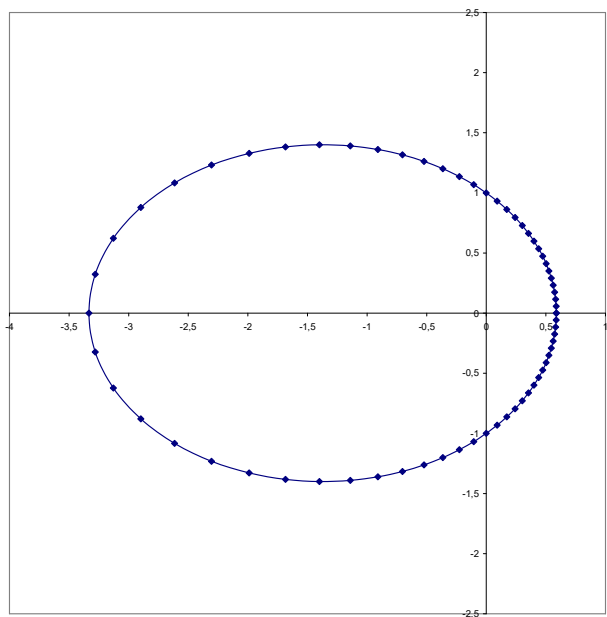
Trèfle ou rosace à 4 lobes d'équation $\rho = a \cos 2\theta$ (ici $a = 1$).



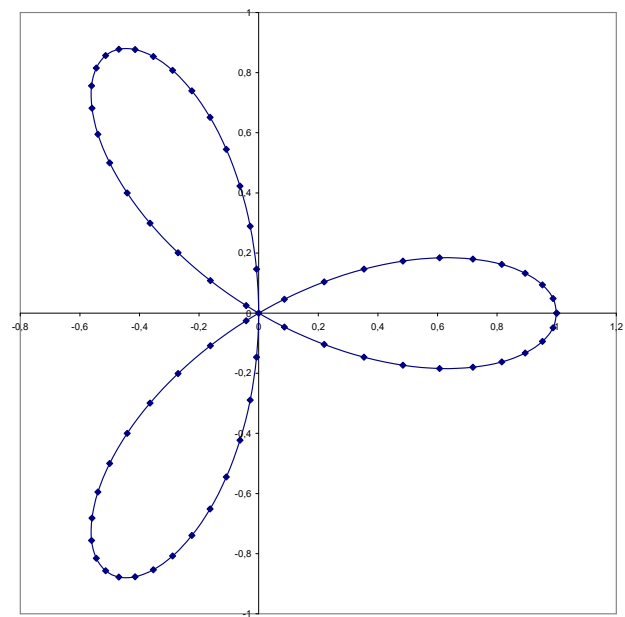
Parabole d'équation $\rho = p/(1 + \cos \theta)$.



Cercle d'équation $\rho = \cos \theta$. C'est un trèfle à une feuille.



Ellipse d'équation $\rho = p/(1 + e \cos \theta)$ et d'ellipticité $e = 0,7$ (ici $p = 1$).



Trèfle ou rosace à 3 lobes d'équation $\rho = \cos 3\theta$.

On pourra généraliser le cas de la parabole à celui d'une conique d'équation $\rho = p/(1 + e \cos \theta)$ où e est l'ellipticité de la conique ($e = 0$ pour un cercle, $0 < e < 1$ pour une ellipse, $e = 1$ pour une parabole et $e > 1$ pour une hyperbole).

Réponse : On pose $\xi = 1/\rho$ que l'on considère comme une fonction de θ . Grace à la loi des aires, $\rho^2 \dot{\theta} = C$ (qui peut s'écrire $\dot{\theta} = C\xi^2$), une dérivée par rapport au temps peut être convertie en une dérivée par rapport à θ . Nous noterons $\dot{\rho}$ la dérivée de ρ par rapport au temps et ρ' sa dérivée par rapport à l'angle θ . On a $\rho' = -\xi'/\xi^2$.

Par définition des coordonnées polaires $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho$, donc la vitesse $\vec{V} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ peut s'écrire $\vec{V} = (\rho' \vec{u}_\rho + \rho \vec{u}_\theta) \dot{\theta} = (-\xi' \vec{u}_\rho + \xi \vec{u}_\theta) \dot{\theta} / \xi^2 = (-\xi' \vec{u}_\rho + \xi \vec{u}_\theta) C$.

L'accélération est $\vec{\Gamma} = (-\xi'' - \xi) \vec{u}_\rho C \dot{\theta} = -C^2 \xi^2 (\xi'' + \xi) \vec{u}_\rho = -\frac{C^2}{\rho^2} (\xi'' + \xi) \vec{u}_\rho$

La composante orthoradiale est nulle. Il s'agit d'un mouvement à accélération centrale.

♠ Conique : $\rho = p/(1 + e \cos \theta)$, $\xi = (1 + e \cos \theta)/p$, $\xi'' = -\frac{e}{p} \cos \theta$ et $\vec{\Gamma} = -\frac{C^2}{p} \frac{\vec{u}_\rho}{\rho^2}$;

♥ Lemniscates de Bernoulli $\rho^2 = \pm a^2 \cos 2\theta$, $\rho \rho' = \mp a^2 \sin 2\theta$, $\xi' = \pm a^2 \sin 2\theta \xi^3$,
 $\xi'' = \pm a^2 (2 \cos 2\theta \xi^3 + 3 \xi^2 \xi' \sin 2\theta) = \pm a^2 (2 \cos 2\theta \rho^2 \xi^5 \pm 3 a^2 \xi^5 \sin^2 2\theta)$,
 $\xi'' = a^4 (2 \cos^2 2\theta + 3 \sin^2 2\theta) \xi^5$, de plus $\xi = \rho^4 \xi^5$, donc $\xi'' + \xi = 3 a^4 \xi^5$,
 et l'accélération est $\vec{\Gamma} = -\frac{3 C^2 a^4}{\rho^7} \vec{u}_\rho$;

♦ Pour le cercle d'équation $\rho = a \cos \theta$, il vient $\xi' = -\rho' \xi^2 = a \xi^2 \sin \theta$ et
 $\xi'' = a \xi^2 \cos \theta + 2 a \xi \xi' \sin \theta = \rho^2 \xi^3 + 2 a^2 \xi^3 \sin^2 \theta$, de plus $\xi = \rho^2 \xi^3$, donc
 $\xi'' + \xi = 2 a^2 \xi^3$ et $\vec{\Gamma} = -\frac{2 C^2 a^2}{\rho^5} \vec{u}_\rho$;

♣ Pour un trèfle d'équation $\rho = a \cos n\theta$, on trouve
 $\vec{\Gamma} = -C^2 \xi^2 (\xi'' + \xi) \vec{u}_\rho = -C^2 [(n^2 + 1) + (n^2 - 1) \sin^2 n\theta] a^2 \xi^5 \vec{u}_\rho$ qui n'est indépendant de θ que si $n = 1$ ou $n = 0$ (cercles). Pour les autres valeurs de n , le champ central n'est pas à symétrie de révolution et la force $m\vec{\Gamma}$ ne dérive pas d'une énergie potentielle.

19 – Mouvement parabolique

Un mobile se déplace sur la parabole d'équation $x^2 = 2py$. Son vecteur accélération est, à tout instant, parallèle à Oy. Calculer sa vitesse et son accélération. Quelle relation a-t-on entre l'accélération, la vitesse au sommet de la trajectoire et p ?

Réponse : $x\dot{x} = p\dot{y}$ $\dot{x}^2 + x\ddot{x} = p\ddot{y}$ $\vec{\Gamma} // Oy$ donc $\ddot{x} = 0$ et $\dot{x}^2 = p\ddot{y}$

Au sommet, $x = 0$ donc $\dot{y} = 0$. Ainsi, la vitesse est $v = \dot{x}$ et l'accélération est normale à la vitesse et elle vaut $\Gamma_y = \ddot{y} = \dot{x}^2 / p$. Par comparaison à la formule de Frénet, $\Gamma_n = v^2 / R$, on voit que p est le rayon de courbure au sommet de la parabole. Le foyer de cette parabole est en $y = p/2$.

20 – Pendule cycloïdal

Un pendule cycloïdal est un mobile se déplaçant le long de la cycloïde $x = R(\theta + \sin \theta)$, $y = R(1 - \cos \theta)$, de façon que $\sin(\theta/2) = a \sin(\omega t)$. Le paramètre a définit l'amplitude des oscillations. On a $0 \leq a \leq 1$.

Dessiner la courbe.

Calculer les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse puis la vitesse.

Déterminer les coordonnées du vecteur tangent $\vec{\tau}$.

A l'aide des formules de Frénet préciser l'accélération normale et l'accélération tangentielle du mobile.

Vérifier que cette dernière est la projection d'un vecteur constant parallèle à Oy.

En déduire que le mouvement est celui d'un point matériel guidé par la cycloïde et soumis à son poids.

On notera que les oscillations de ce pendule sont isochrones, c'est-à-dire que la période est indépendante de l'amplitude.

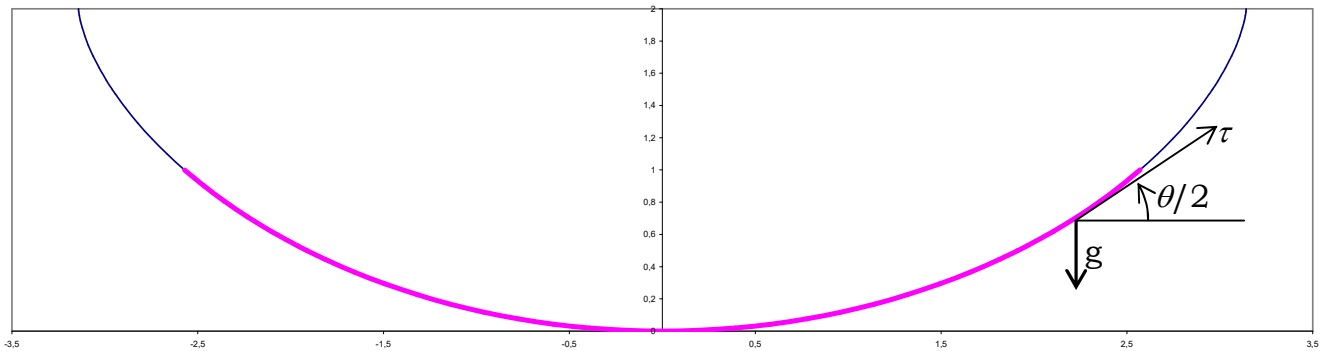


Figure : Cycloïde (en trait fin) et trajectoire suivie (en gras) pour $a = 1/\sqrt{2}$.

$$\dot{x} = R(1 + \cos \theta) \dot{\theta} = 2R \dot{\theta} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\dot{y} = R \sin \theta \dot{\theta} = 2R \dot{\theta} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\text{donc} \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 4R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

La norme du vecteur vitesse est $v = 2R|\dot{\theta}| \cos \frac{\theta}{2}$, mais pour éviter que le vecteur tangent ne se retourne à chaque fois que le point change de sens, il vaut mieux prendre une vitesse algébrique le long de la courbe orientée dans le sens des x croissants.

$$\text{Ainsi} \quad v = 2R \dot{\theta} \cos \frac{\theta}{2}$$

L'angle θ est donné par $\sin \frac{\theta}{2} = a \sin(\omega t)$, donc en dérivant, il vient :

$$\frac{1}{2} \dot{\theta} \cos \frac{\theta}{2} = a \omega \cos(\omega t),$$

et on trouve que la vitesse linéique $v = 4Ra\omega \cos(\omega t)$ varie sinusoidalement.

Les coordonnées du vecteur tangent $\vec{\tau}$ sont :

$$\tau_x = \frac{\dot{x}}{v} = \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad \tau_y = \frac{\dot{y}}{v} = \sin \frac{\theta}{2}$$

Pour trouver l'accélération, il est inutile de dériver les composantes cartésiennes de la vitesse $(\dot{x}, \dot{y})$ car les formules de Frénet donnent l'accélération tangentielle $a_\tau = dv/dt$

et l'accélération normale $a_n = v^2/R$

$$a_\tau = -4Ra\omega^2 \sin(\omega t) = -4R\omega^2 \sin(\theta/2)$$

L'accélération tangentielle $a_\tau \vec{\tau}$ est donc la projection sur le vecteur tangent d'un vecteur $-4R\omega^2 \vec{j}$ constant. Ou si vous préférez, la projection du champ de pesanteur $-g \vec{j}$ de la figure ci-dessus sur le vecteur tangent est $-g \sin(\theta/2)$. L'accélération de la pesanteur, g , et la pulsation des oscillations, ω , sont liées par la relation $g = 4R\omega^2$.