

## Rappels de cours : Contact entre solides, frottements.

### Contact entre deux solides :

Considérons deux solides 1 et 2 en contact avec l'autre. Chacun d'eux est délimité par une surface 2 fois dérivable. En chaque point celle-ci possède un plan tangent. Au point de contact les plans tangents des deux surfaces sont confondus. Ce plan commun possède une normale commune caractérisée par un vecteur unitaire  $\vec{n}_{12}$  orientée de 1 vers 2 (Il est également possible, mais redondant, d'introduire le vecteur normal  $\vec{n}_{21} = -\vec{n}_{12}$ ).

**Notion de point coïncident :** Lorsque deux solides 1 et 2 sont en contact, un point  $I_1$  du premier est en contact avec un point  $I_2$  du second. D'un point de vue purement géométrique les deux points sont en un unique et même point de l'espace. Les points  $I_1$  et  $I_2$  sont dits coïncident.

**Vitesse de glissement :** Du point de vue de la cinématique, on notera cependant que le point  $I_1$  est lié au premier solide et le suit dans son mouvement et, de même, le point  $I_2$  est lié au second solide et le suit dans son mouvement. S'il y a glissement du solide 2 sur le solide 1, les vitesses  $\vec{v}_1$  de  $I_1$  et  $\vec{v}_2$  de  $I_2$  diffèrent. La différence  $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$  est indépendante du référentiel dans lequel elle est évaluée. Cette différence est appelée vitesse de glissement du solide 2 sur le solide 1 :  $\vec{v}_{\text{glissement } 2/1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$  que nous noterons  $\vec{v}_{2/1}$  ou  $\vec{v}_{\text{glisse}}$ .

On notera que les accélérations des points  $I_1$  et  $I_2$  sont généralement très différentes l'une de l'autre.

**Composantes de la réaction :** Selon la loi de Coulomb, lorsqu'un solide 1 est en contact avec un solide 2, ce dernier exerce sur le premier une force de réaction  $\vec{R}_{21}$  (souvent appelée réaction pour être concis) appliquée au point de contact. En raison du principe de l'action et de la réaction, le solide 1 exerce sur le second une réaction  $\vec{R}_{12} = -\vec{R}_{21}$ . La force  $\vec{R}_{21}$  est appliquée en  $I_1$  et  $\vec{R}_{12}$  est appliquée en  $I_2$ . au point de contact  $I_1 = I_2$ .

On décompose la réaction  $\vec{R}_{12}$  en une composante normale  $\vec{N}_{12}$  et une composante tangentielle  $\vec{T}_{12}$ .

$$\vec{R}_{12} = \vec{N}_{12} + \vec{T}_{12} \quad \text{avec} \quad \vec{N}_{12} = N \vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad \vec{T}_{12} \cdot \vec{n}_{12} = 0.$$

de même,

$$\vec{R}_{21} = \vec{N}_{21} + \vec{T}_{21} \quad \text{avec} \quad \vec{N}_{21} = N \vec{n}_{21} \quad \text{et} \quad \vec{T}_{21} = -\vec{T}_{12}.$$

Enfin puisque les solides sont en contact, la composante  $N$  est positive.

**Coefficients de frottement :** Lorsque le second solide glisse sur le premier, alors la composante tangentielle,  $\vec{T}_{12}$ , est proportionnelle à la composante normale. Le coefficient de proportionnalité est appelé coefficient de frottement dynamique et est noté  $\mu_d$ . Ainsi, la composante tangentielle a pour norme  $T_{12} = \mu_d N$  et sa direction est opposée à celle de la vitesse de glissement,  $\vec{v}_{2/1}$ .

On écrit alors 
$$\vec{T}_{12} = \vec{T}_{1 \rightarrow 2} = -\mu_d N \frac{\vec{v}_{2/1}}{v_{2/1}}.$$

Lorsque la vitesse de glissement est nulle, alors la composante tangentielle est indéterminée mais est majorée en norme par  $\mu_s N$ . En d'autres termes, on a

$$T_{12} \leq \mu_s N,$$

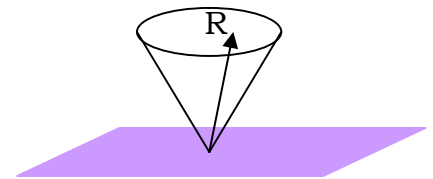
où  $\mu_s$  est le coefficient de frottement statique.

La direction de  $\vec{T}$  est alors opposée à celle du mouvement naissant (mouvement que prendrait le point de contact  $I_2$  (vu depuis  $I_1$ ) si la composante tangentielle était nulle).

Les coefficients de frottement sont liés à la nature des matériaux utilisés et à la qualité du polissage. Le coefficient dynamique peut dépendre de la vitesse de glissement.

Lorsque les coefficients statiques et dynamiques sont distincts, ou lorsque le coefficient dynamique dépend de la vitesse, le problème de mécanique peut avoir plusieurs solutions. Des phénomènes d'hystérésis liés à la présence d'une mémoire du système de l'historique du mouvement, peuvent être observés. Pour éviter cette situation délicate voire difficile nous considérerons que les deux coefficients de frottement sont identiques et que le coefficient dynamique est indépendant de la vitesse. Nous poserons  $\mu_s = \mu_d = \mu$ .

Géométriquement, la réaction apparaît comme un vecteur contraint à rester dans un cône de révolution dont le demi-angle au sommet,  $\alpha$ , est donné par  $\tan(\alpha) = \mu$ . L'axe de symétrie est, bien sûr, le vecteur normal  $\vec{n}_{12}$ .



Un équilibre statique est un cas particulier pour lequel la vitesse de glissement est nulle.

Si les surfaces des deux solides sont planes, alors le point d'application de la réaction,  $I$ , est indéterminé. Penser, par exemple, à un cube sur un plan incliné. Malgré tout, les droites supports des réactions  $\vec{R}_{21}$  et  $\vec{R}_{12}$  coïncident (elles passent par le point  $I$ ). En d'autres termes, les moments de ces deux forces, considérés en un point  $O$  donné, sont opposés. En statique, les conditions d'équilibre permettent la détermination du point  $I$ .

Si le solide 1 est réduit ou assimilé à un point matériel  $M$  en contact avec un support solide ce point est soumis à une réaction du support  $\vec{R}$  évidemment appliquée en  $M$ .

Dans ce cas simple, la loi de Coulomb dit que la composante tangentielle est

$$\vec{T} = -\mu N \frac{\vec{v}}{v} \text{ si la vitesse de ce point par rapport au solide est } \vec{v} ;$$

$$\text{de norme } T = \|\vec{T}\| \leq \mu N \text{ et de direction au mouvement naissant.}$$

par rapport au support, on a  $|T| \leq \mu N$ , où  $\mu$  est le coefficient de frottement. Ce dernier est lié à la nature des matériaux utilisés et à la qualité du polissage. Lorsque le point matériel glisse sur son support, la composante tangentielle,  $T$ , a pour norme  $T = \mu N$  et sa direction est opposée à celle du vecteur vitesse (vitesse relative au support).

**Exercice :** Un cube est posé sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$ . On appelle  $\mu$ , le coefficient de frottement. Déterminer en quel point,  $I$ , de la surface de contact est appliquée la force de réaction. Pour quelles valeurs de l'inclinaison  $\alpha$ , le cube ne glisse-t-il pas ?

**Réponse :** Le point  $I$  est à la verticale du centre de masse du cube de façon que les deux forces appliquées, le poids et la réaction du plan incliné soient supportées par la même droite.

Stable tant que  $\tan(\alpha) < \mu$ .

Si  $\mu < 1$ , ceci est la seule condition de stabilité de l'équilibre statique. Cependant, si  $\mu > 1$ , l'angle  $\alpha$  ne peut dépasser la valeur de  $45^\circ$  ( $\pi/4$ ) car au-delà, le centre de masse n'est plus au dessus de sa base de sustentation. Aucun point  $I$  de la base carrée ne peut convenir. Le cube se met à "rouler". Un palet suffisamment plat resterait en équilibre, sans glisser.

Implicitement, un point matériel est toujours considéré comme un palet suffisamment plat pour éventuellement glisser mais ne jamais rouler.

## Statique avec frottements

### Amarrage d'un bateau

Un marin retient un bateau à l'aide d'une corde (sans raideur) enroulée autour d'une borne d'amarrage. Du côté du bateau, la tension est  $T_B$  de l'autre  $T_A$ . Le frottement de la corde sur la borne suit la loi de Coulomb avec un coefficient  $f$ .

Montrer que l'équilibre d'un bout de corde de longueur infinitésimale, définie par un angle  $d\alpha$  conduit à l'inégalité  $|dT/d\alpha| \leq f.T$ .

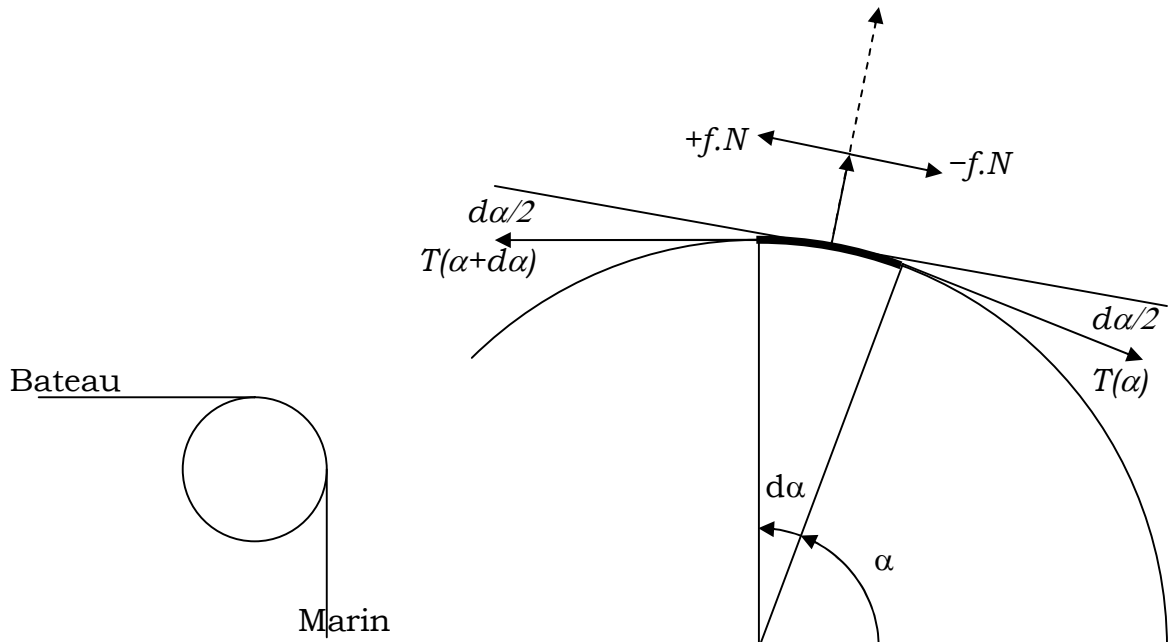
En déduire qu'à la limite du glissement la tension suit la loi exponentielle  $T(\alpha) = T_0 \exp(f.\alpha)$ .

Quel est l'intérêt de faire plusieurs tours avec la corde autour de la borne d'amarrage ?

Comparer pour  $f = 0,2$  puis  $f = 1$  les situations où la corde fait un quart de tour, un tour et un quart, deux tours et un quart.

Pourquoi le marin laisse-t-il filer la corde ?

Quel risque court-il à faire plusieurs tours ?



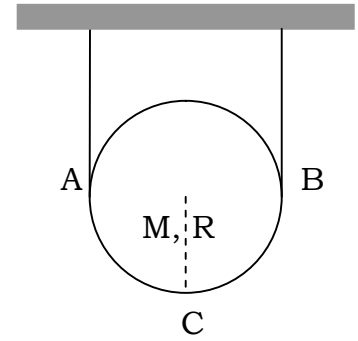
## Disque suspendu

Un disque de masse  $M$  et rayon  $R$  est accroché au plafond au moyen d'une corde de masse nulle selon le schéma ci-contre.

S'il n'y a pas de frottement entre le disque et la corde, quelle est la tension de celle-ci ?

Quelle est la force normale appliquée par la corde au disque par unité de longueur ?

En présence d'un frottement solide de la corde sur le disque, régi par la loi de Coulomb et un coefficient  $f$ , quelle est la plus petite tension possible de la corde à son point bas ?



## Le miroir contre le mur

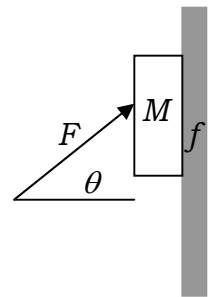
Un miroir de masse  $M$  est plaqué contre un mur vertical. Le coefficient de frottement entre le miroir et le mur est  $f$ . Pendant que votre ami vérifie que la position est correcte, vous maintenez le miroir avec une force  $F$  inclinée d'un angle  $\theta$  avec l'horizontale ( $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ).

Pour  $\theta$  donné, quelle est la force minimale requise ?

Pour quel angle  $\theta$ , ce minimum est-il le plus faible ?

Quelle est alors cette force ?

En dessous une certaine valeur de  $\theta$  il n'est plus possible de maintenir le miroir en place. Quelle est cette valeur de l'angle ?



## Dynamique du point avec frottement solide

**Loi de Coulomb pour un point matériel :** Selon celle-ci, un point mobile sur un support solide est soumis à une réaction du support  $R$ . On distingue la composante normale  $N$  et la composante tangentielle  $T$  de la réaction. Lorsque le point matériel est immobile par rapport au support, on a  $|T| \leq \mu.N$ , où  $\mu$  est le coefficient de frottement. Lorsque le point matériel glisse sur son support, la composante tangentielle,  $T$ , a pour norme  $T = \mu.N$  et sa direction est opposée à celle du vecteur vitesse (vitesse relative au support).

### 1 – L'enfant sur son igloo

Reprendre le problème de l'enfant qui glisse sur son igloo en supposant la présence d'un frottement solide régi par la loi de Coulomb.

### 2 – Oscillations avec frottement solide

Un point matériel de masse  $m$  est attaché à un ressort de raideur  $k$  (et de masse nulle) dont l'autre extrémité est attachée à un mur. Le point matériel peut se déplacer le long d'une glissière assimilée à une droite horizontale  $Ox$ . Le contact avec la glissière a lieu avec frottement solide sur solide régi par la loi de Coulomb (celle-ci est rappelée en fin du texte). Le coefficient de frottement est appelé  $f$ . L'origine  $O$  est prise de telle façon que la force de rappel du ressort s'écrive  $F = -kx$ . L'accélération de la pesanteur est  $g$  et l'on pose  $\omega = \sqrt{k/m}$  et  $\alpha = fmg/k$ .

On considère l'équilibre statique du point matériel.

- 1) Faire un schéma.
- 2) Déterminer la composante normale de la réaction du support.

- 3) Montrer qu'horizontalement, l'équilibre est possible si la valeur de l'abscisse  $x$  est comprise dans un intervalle borné. Donner les bornes de cet intervalle.
- 4) Montrer qu'en dehors de cet intervalle l'équilibre statique est impossible.

On s'intéresse maintenant au mouvement du point matériel.

- 5) On considère que le point se déplace vers la droite. Quelle est la direction de la composante tangentielle de la réaction du support ? Ecrire l'équation différentielle du mouvement. En donner la solution générale. Déterminer la vitesse  $\dot{x}(t)$ .
- 6) Le point matériel était initialement immobile en  $x = -a_0$ , avec  $a_0 > \alpha$ . Déterminer les constantes d'intégration et l'équation horaire du mouvement  $x(t)$ . Pendant combien de temps la vitesse reste-t-elle positive ?  
Lorsque le point matériel s'immobilise de nouveau, il est en  $x = a_1$ . Montrer que  $a_1$  et  $a_0$  sont reliés par  $a_1 = a_0 - 2\alpha$ .
- 7) On considère maintenant que le point se déplace vers la gauche. Quelle est la direction de la composante tangentielle de la réaction du support ? Ecrire l'équation différentielle du mouvement. En donner la solution générale. Déterminer la vitesse  $\dot{x}(t)$ .
- 8) Le point matériel était initialement immobile en  $x = +a_1$ , avec  $a_1 > \alpha$ . Déterminer les constantes d'intégration et l'équation horaire du mouvement  $x(t)$ . Lorsque le point matériel s'immobilise de nouveau, il est en  $x = -a_2$ . Montrer que  $a_2$  et  $a_1$  sont reliés par  $a_2 = a_1 - 2\alpha$ .
- 9) Montrer que la suite des amplitudes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  est une suite arithmétique. En donner la raison.
- 10) Représenter graphiquement les oscillations ( la courbe  $x(t)$  ) pour  $\alpha = 1$  cm et  $a_0 = 5,5$  cm.

### 3 – Hystérésis et décision impossible

Le contact d'un palet mobile sur un plan incliné est régie par la loi de Coulomb. Ce contact est tel que les coefficients de frottement dynamique,  $\mu_d$ , et statique,  $\mu_s$ , sont différents  $\mu_s < \mu_d$ .

Un opérateur augmente progressivement l'inclinaison du plan incliné. A parti de quel angle, le palet glissera-t-il ?

Maintenant que le palet glisse, il diminue l'angle d'inclinaison. En deçà de quel angle, le palet ne glissera-t-il plus ?

Première conclusion ?

Pour une inclinaison  $\alpha$  intermédiaire, donc telle que  $\mu_s < \tan(\alpha) < \mu_d$ , il lance le palet vers le haut. Quel sera le mouvement ?