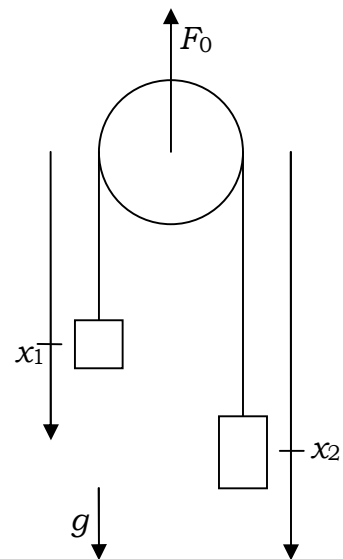


MECANIQUE NEWTONNIENNE

Autour du PFD

1 – Machine d'Atwood

Une machine d'Atwood est constituée de deux masses, m_1 , m_2 , suspendues à une poulie au moyen d'une ficelle inextensible. Les deux masses sont assimilées à des points matériels. La poulie et la ficelle sont de masse nulle. L'intensité du champ de pesanteur est notée g .



- 1) Représenter graphiquement les forces exercées.
- 2) Ecrire le PFD (équation de Newton) pour la masse m_1 .
- 3) Ecrire le PFD pour la masse m_2 .
- 4) La ficelle étant de longueur constante, en déduire une relation entre x_1 et x_2 .
- 5) En déduire la tension T de la ficelle puis la force, F_0 , de suspension de la poulie. En d'autres termes, combien pèse la machine d'Atwood ?

Conservation de l'énergie

1 – Première et seconde vitesses cosmiques

Libérer un satellite de l'attraction gravitationnelle d'un astre demande de lui communiquer une certaine vitesse. La première vitesse de libération d'un satellite d'un astre de rayon R est celle d'un satellite en mouvement circulaire à basse altitude $r = R + \varepsilon$, avec $\varepsilon \ll R$. Utiliser l'équation de Newton (sa composante radiale) pour déterminer l'expression de la première vitesse cosmique sur Terre (masse M , rayon R) G étant la constante universelle de la gravitation. On rappelle que l'attraction gravitationnelle est une force radiale de composante $F_r = -\frac{GMm}{r^2}$.

La vitesse de libération ou seconde vitesse cosmique est celle qu'il faut communiquer au satellite pour qu'il échappe à l'attraction gravitationnelle de la Terre, s'éloigne indéfiniment sa vitesse étant asymptotiquement nulle. Utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour déterminer la seconde vitesse cosmique.

On exprimera ces deux résultats en fonction de R et g (accélération de la pesanteur).

Application numérique : Déterminer ces deux vitesses dans le cas de la Terre. On donne $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, $R = 40\,000/2\pi \text{ km}$.

a) $F_r = -\frac{GMm}{R^2} = ma_r = -m \frac{v_1^2}{R}$ d'où $v_1 = \sqrt{GM/R} = \sqrt{gR} \sim 8 \text{ km/s}$.

b) $E_{C,i} + E_{P,i} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{R} + E_{C,f} + E_{P,f} = 0 + 0$ soit $v_2 = \sqrt{2gR} = v_1\sqrt{2} \sim 11 \text{ km/s}$.

Conservation de la quantité de mouvement

1 – Obélix et le menhir

Obélix de masse m_O lance un menhir de masse m_m avec une vitesse v_m égale à la seconde vitesse de libération (par rapport au sol), c'est-à-dire telle que le menhir quitte la Terre (masse M et rayon R) et arrive à l'infini avec une vitesse nulle.

- Selon la loi de conservation de la quantité de mouvement, à quelle vitesse Obélix est-il projeté en arrière ?
- Quel doit être le rapport des masses pour qu'Obélix soit satellisé sur une orbite circulaire.
- Quelle énergie mécanique est-elle nécessaire pour ce lancement si $m_m = 100\text{kg}$?

a) Les normes des vitesses (de directions opposées) sont telles que $m_O v_O = m_m v_m$.

b) $\frac{m_O}{m_m} = \frac{v_m}{v_O} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{2}$

c) $E = \frac{p^2}{2\mu}$ où $p = m_O v_O$ et $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_O} + \frac{1}{m_m}$ donc $E = \frac{1+\sqrt{2}}{2} m_O g R \sim 10^{10} \text{ J}$.

2 – Voiture sur glace

Pourquoi une voiture, même puissante, ne peut-elle pas avancer lorsqu'elle est posée sur de la glace ?

Forces non conservatives

1 – Travail d'une force de frottement solide

Un égyptien traine un bloc de pierre d'un point A à un point B sur un sol horizontal. Le frottement de ce bloc sur le sol est soumis à la loi de Coulomb. Montrer que le travail effectué dépend du chemin suivi et plus précisément, qu'il est proportionnel à la longueur du chemin suivi pour aller de A jusqu'à B.

2 – Travail d'une force de frottement fluide

Un véhicule effectue le trajet Nancy – Paris en ligne droite et à vitesse constante, v . Les frottements de l'air exercent une force proportionnelle au carré de la vitesse et de direction opposée au vecteur vitesse du véhicule, $\vec{F} = -k\rho S v \vec{v}$ (cf le cours).

Donner les expressions de la puissance de cette force, $\mathcal{P}$, et du travail infinitésimal, δW . Montrer que le travail effectué par cette force pour aller de N à P dépend de la vitesse du véhicule. De quel facteur varie-t-il lorsque la vitesse passe de 70 à 100 km/h ?

Forces de Ressorts

Dans ces exercices, tous les ressorts sont de masse nulle et à spires non jointives. Quand cela n'est pas précisé, la raideur du ressort est k et sa longueur à vide ℓ_0 .

1 – Automobile

Lorsqu'une automobile de masse $M = 1000\text{kg}$ est soulevée de 25 cm, ses roues se soulèvent à peine du sol. La suspension de cette automobile est assimilée à un ressort unique. Quelle est la constante de raideur du ressort ?

2 – Ressorts en série ou en parallèle

Quelle est la raideur d'un ensemble de deux ressorts (k_1 , k_2) attachés en série ?
Même question pour deux ressorts fixés en parallèle (côte à côte).

3 – Quatre ressorts en croix

Un peu de géométrie : Montrer par un développement limité au 1^{er} ordre que, lorsque $OM \ll AO$, on a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$ où $\vec{u} = \overrightarrow{AO} / AO$ est unitaire et colinéaire à $\overrightarrow{AO}$.

Un point matériel M , de masse m , est attaché à quatre ressorts identiques (k , ℓ_0) placés en croix, 2 selon Ox et 2 selon Oy . Lorsque M est en O , les ressorts ne sont pas tendus.

Déterminer les coordonnées des points d'attache des ressorts, A, B, C, D.

Calculer la résultante des forces.

Montrer que l'équation différentielle des petits mouvements est $m d^2 \overrightarrow{OM} / dt^2 = -2k \overrightarrow{OM}$.

4 – Deux ressorts tendus

Deux ressorts identiques (k , ℓ_0) sont attachés en deux points A et B distants de 2ℓ , avec $\ell > \ell_0$. Un point matériel M , de masse m , est attaché à l'extrémité libre de ces ressorts. Soit O la position d'équilibre et Ox la direction des ressorts.

A quelle force est soumis le point M lorsqu'il est trouvé en $(x, 0)$?

Le point M est mobile selon Ox . Quelle est l'équation du mouvement ?

A quelle force est soumis le point M lorsqu'il est trouvé en $(0, y)$?

Quelle est la constante de raideur k' équivalente ?

Le point M est mobile selon Oy . Quelle est l'équation du mouvement ?

Donner la pulsation des petites oscillations.

5 – Ressorts en croix et table à coussin d'air

Pour réaliser un montage sur une table à coussin d'air, Jacques dispose de quatre ressorts, deux de raideur k_1 et deux de raideur k_2 , avec $k_1 < k_2$. Il place les ressorts en croix et souhaite que la masse m , située au centre de la croix oscille de façon parfaitement sinusoïdale, avec la même pulsation selon Ox et selon Oy . Pour cela, il tend deux des ressorts.

Quelle paire de ressorts doit-il tendre ?

De combien doit-il les tendre ?

Energie potentielle de Ressorts

1 – Energie potentielle de déformation d'un ressort

Lorsque l'on tire sur un ressort (k, ℓ_0) et que sa longueur devient ℓ , celui répond par une force $F = -k(\ell - \ell_0)$. Pourquoi cette force dérive-t-elle d'une énergie potentielle ?

Donner l'expression de cette énergie potentielle.

Réponse : La force ne dépend ni de la vitesse ni explicitement du temps. C'est une force positionnelle qui dérive de l'énergie potentielle $E_P = \frac{1}{2} k(\ell - \ell_0)^2 + E_0$.

2 – DL de l'énergie potentielle pour un ressort

Un ressort (k, ℓ_0) est fixé en un point A. Lorsqu'il est au repos, l'autre extrémité est en O. Effectuer un développement limité au premier ordre de la distance AM en fonction de $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ lorsque $r \ll \ell_0$. En déduire que l'énergie potentielle est en première approximation et à une constante additive près

$$E_P(\vec{r}) = \frac{1}{2} k(\vec{u} \cdot \vec{r})^2$$

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire porté par la droite AM.

3 – Trois ressorts fixés au sommet d'un triangle

Trois ressorts identiques sont attachés aux sommets d'un triangle équilatéral. Un point matériel M est fixé à l'extrémité libre de ces trois ressorts. A l'équilibre, les ressorts ne sont pas tendus.

Faire un schéma.

Montrer que pour les mouvements de M dans le plan du triangle cet assemblage est équivalent à un ressort de longueur nulle de constante effective que l'on déterminera.

On pourra utiliser l'expression de l'exercice précédent.

Poursuivre l'exercice avec quatre ressorts identiques attachés aux sommets d'un tétraèdre régulier.

Réponse : $E_P(\vec{r}) = \frac{1}{2} k((\vec{u}_1 \cdot \vec{r})^2 + (\vec{u}_2 \cdot \vec{r})^2 + (\vec{u}_3 \cdot \vec{r})^2)$ où les $\vec{u}_i$ sont trois vecteurs unitaires à 120° les uns des autres. On peut choisir $\vec{u}_1 = \vec{i}$, $\vec{u}_2 = (-\vec{i} + \vec{j}\sqrt{3})/2$, $\vec{u}_3 = (-\vec{i} - \vec{j}\sqrt{3})/2$ et trouver $E_P(\vec{r}) = \frac{3}{4} k(x^2 + y^2)$. La constante effective du ressort est $k_{eff} = \frac{3}{2} k$.

Dans le cas du tétraèdre, le terme en x de l'énergie potentielle est $E_P = \frac{1}{2} k(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9})x^2 = \frac{2}{3} kx^2$. La constante de raideur effective est $k_{eff} = \frac{4}{3} k$. On remarquera que l'on "fabrique" ainsi un ressort de longueur nulle dont l'énergie potentielle est $E_P(\vec{r}) = \frac{1}{2} k_{eff} r^2$ et non $E_P = \frac{1}{2} k_{eff} (r - \ell_0)^2$.

4 – Energie potentielle d'une masse attachée à un ressort

Un ressort (k, ℓ_0) est fixé d'une part à l'origine O et d'autre part à un point matériel M . Quelle est l'énergie potentielle du point M en coordonnées sphériques ?

Réponse : $E_P(\vec{r}) = \frac{1}{2} k(r - \ell_0)^2 + E_0$