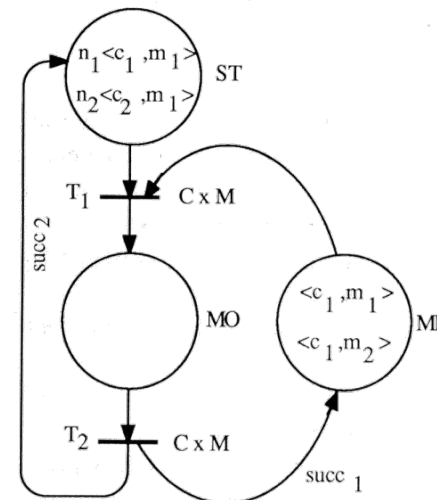
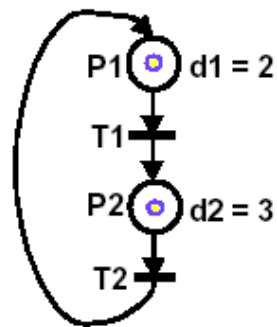
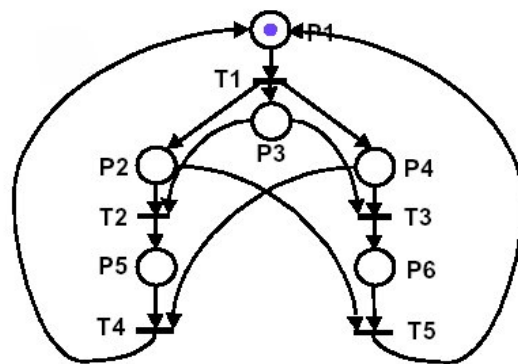




Systèmes à Evénements Discrets

RÉSEAUX DE PETRI



$$C \times M = \{ \langle c_i, m_j \rangle \mid 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq 2 \}$$

$$\begin{cases} \text{succ}_1(\langle c_1, m_j \rangle) = \langle c_2, m_j \rangle & 1 \leq j \leq 2 \\ \text{succ}_1(\langle c_2, m_j \rangle) = \langle c_1, m_j \rangle & 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{succ}_2(\langle c_i, m_1 \rangle) = \langle c_i, m_2 \rangle & 1 \leq i \leq 2 \\ \text{succ}_2(\langle c_i, m_2 \rangle) = \langle c_i, m_1 \rangle & 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

SOMMAIRE



Les Réseaux de Petri (RdP)

- Origine et Domaines d'Application
- Modélisation d'un système événement-condition
- Réseaux de Petri Autonome
 - Réseaux de Petri Généralisés
 - Propriétés Structurelles des RdP
 - Propriétés Comportementales des RdP
 - Notations algébriques
 - Méthodes de réduction
 - Réseaux de Petri colorés
- Réseaux de Petri non autonomes
 - Réseaux de Petri temporisés
 - Réseaux de Petri interprétés
- Conclusion sur les RdP



Réseaux de Petri



ORIGINE

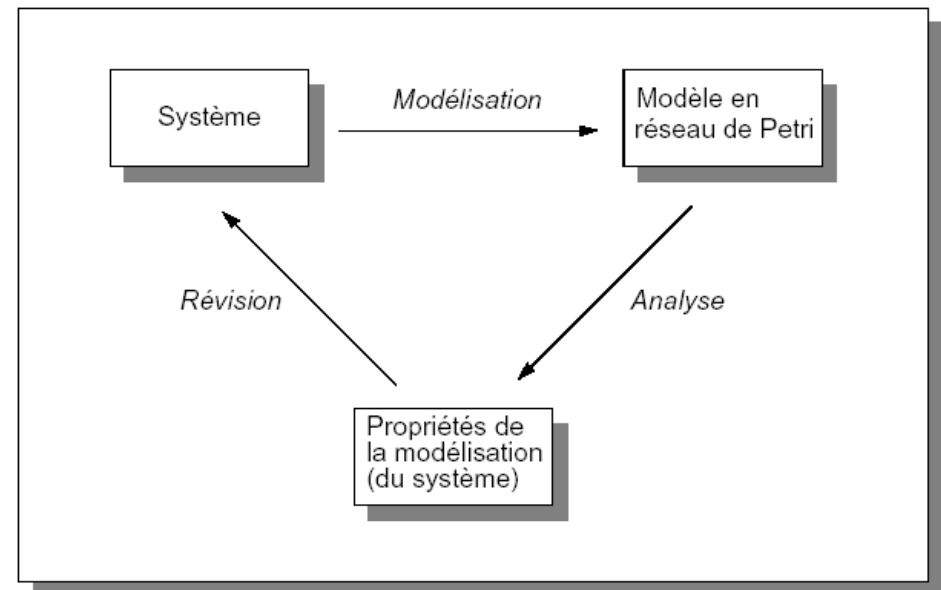


Carl Adam Petri définit en **1962** un outil mathématique très général pour décrire les relations existant entre des conditions et des événements. D'origine mathématique, cet outil est ensuite très utilisé en informatique et en automatique.



Un **réseau de Petri (RdP)** est un **outil de modélisation** permettant l'étude de **systèmes dynamiques et discrets**. La **syntaxe** des RdP est **graphique** et la **sémantique** est fondée sur une **représentation mathématique**.

L'analyse d'un RdP peut révéler des caractéristiques importantes du système modélisé concernant sa **structure** et son **comportement dynamique**. Les résultats de cette analyse sont utilisés pour évaluer le système et en permettre la modification et/ou l'amélioration le cas échéant.

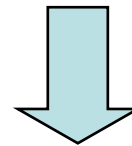


Réseaux de Petri

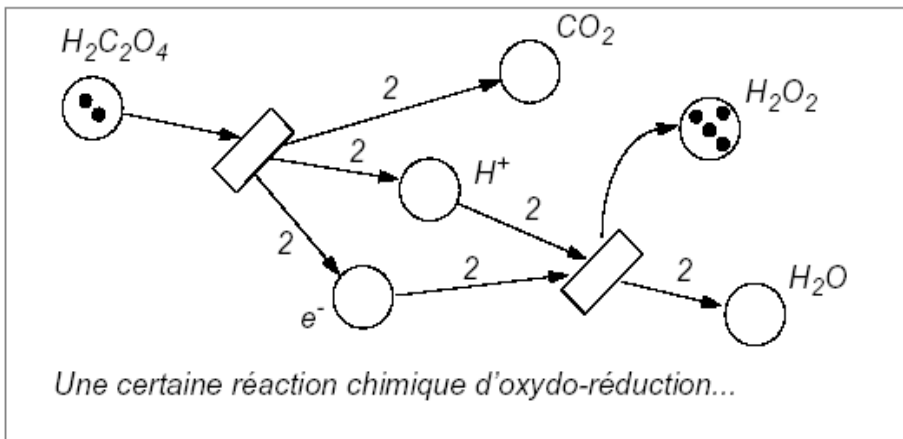


DOMAINES D'APPLICATION DES RDP

Problèmes d'**organisation**, de **synchronisation** et de **coopération** entre unités travaillant en **parallèle**



les domaines concernés sont nombreux et variés



Protocoles des Réseaux de communication

Base de données

Ordonnancement des tâches dans les processeurs

Pilotage de systèmes industriels

Contrôle-commande industriels

Systèmes embarqués

...

MODÉLISATION D'UN SYSTÈME *ÉVÉNEMENT-CONDITION*

CONDITION

Une condition est un **prédicat** ou une **description logique** d'un état du système.

Une condition est **vraie** ou **fausse**.

Un **état du système** peut être décrit comme un **ensemble de conditions**.

ÉVÉNEMENT

Les événements sont des **actions** se déroulant dans le système.

Le déclenchement d'un événement dépend de l'état du système.

DÉCLENCHEMENT, PRÉ-CONDITION, POST-CONDITION

Les conditions nécessaires au déclenchement d'un événement sont les **pré-conditions** de l'événement.

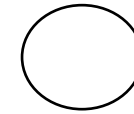
Lorsqu'un événement se produit, certaines de ses pré-conditions peuvent cesser d'être vraies alors que d'autres conditions, appelées **post-conditions** de l'événement deviennent vraies.

Réseaux de Petri



MODÉLISATION D'UN SYSTÈME *ÉVÉNEMENT-CONDITION*

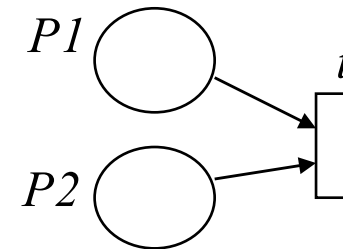
CONDITION : modélisée à l'aide d'une **PLACE**



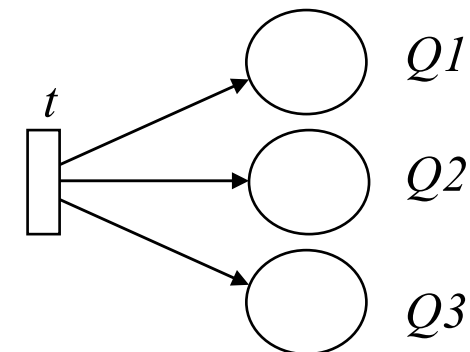
ÉVÉNEMENT : modélisé à l'aide d'une **TRANSITION**



PRÉ-CONDITION d'une **TRANSITION** :



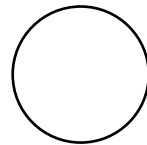
POST-CONDITION d'une **TRANSITION** :



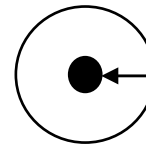
MODÉLISATION D'UN SYSTÈME *ÉVÉNEMENT-CONDITION*

Satisfaction d'une **CONDITION** : modélisée à l'aide d'un **JETON**

CONDITION ...



... fausse



... vraie

Jeton

CONDITION DE DÉCLENCHEMENT (ou **TIR**) d'une transition

Une transition est **validée**, **franchissable** ou **tirable** (synonymes) lorsque **toutes ses places en amont contiennent au moins une marque**.

Le franchissement (ou **tir**) d'une transition T_j consiste à ôter une marque dans chaque place en amont de la transition T_j et à ajouter une marque dans chaque place en aval de la transition T_j .

Remarques:

- Lorsqu'une transition est validée, cela n'implique pas qu'elle sera immédiatement franchie, ce n'est qu'une **possibilité**
- Il n'y a qu'un **seul franchissement à la fois**.

Réseaux de Petri

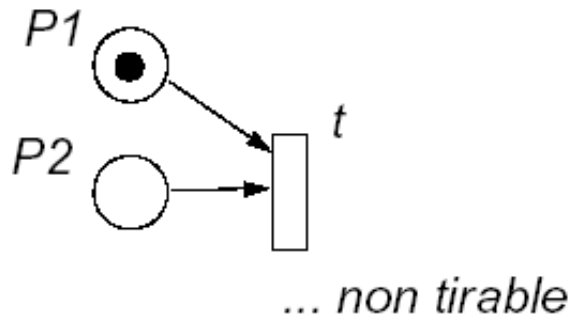


MODÉLISATION D'UN SYSTÈME ÉVÉNEMENT-CONDITION

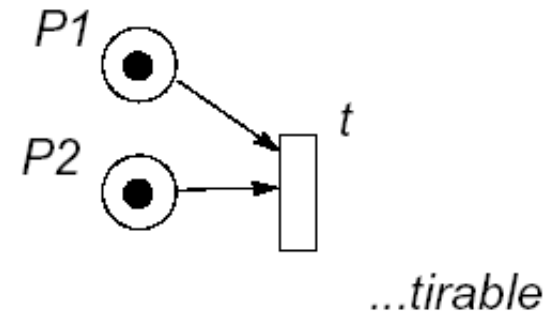
DÉCLENCHEMENT D'UNE TRANSITION « TIRABLE »

(*tir* ou *franchissement* d'une transition)

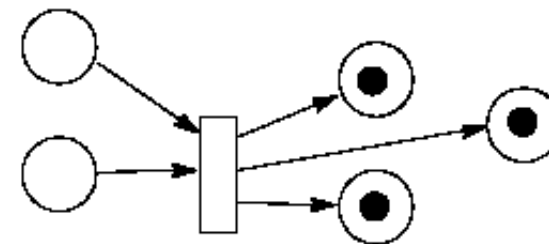
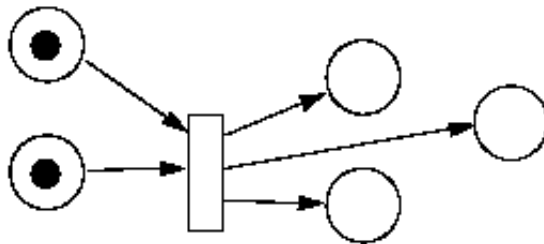
Transition ...



Transition ...



Tir d'une transition



EXEMPLE : ATELIER DE COUPE DE BOIS

CONDITIONS

- La machine de coupe est au repos (*c1*)
- Une commande est en attente (*c2*)
- La commande est en cours de traitement (*c3*)
- La commande est terminée (*c4*)



ÉVÉNEMENTS

- Une commande arrive (*e1*)
- La machine débute la commande (*e2*)
- La machine termine la commande (*e3*)
- La commande est envoyée pour la livraison (*e4*)

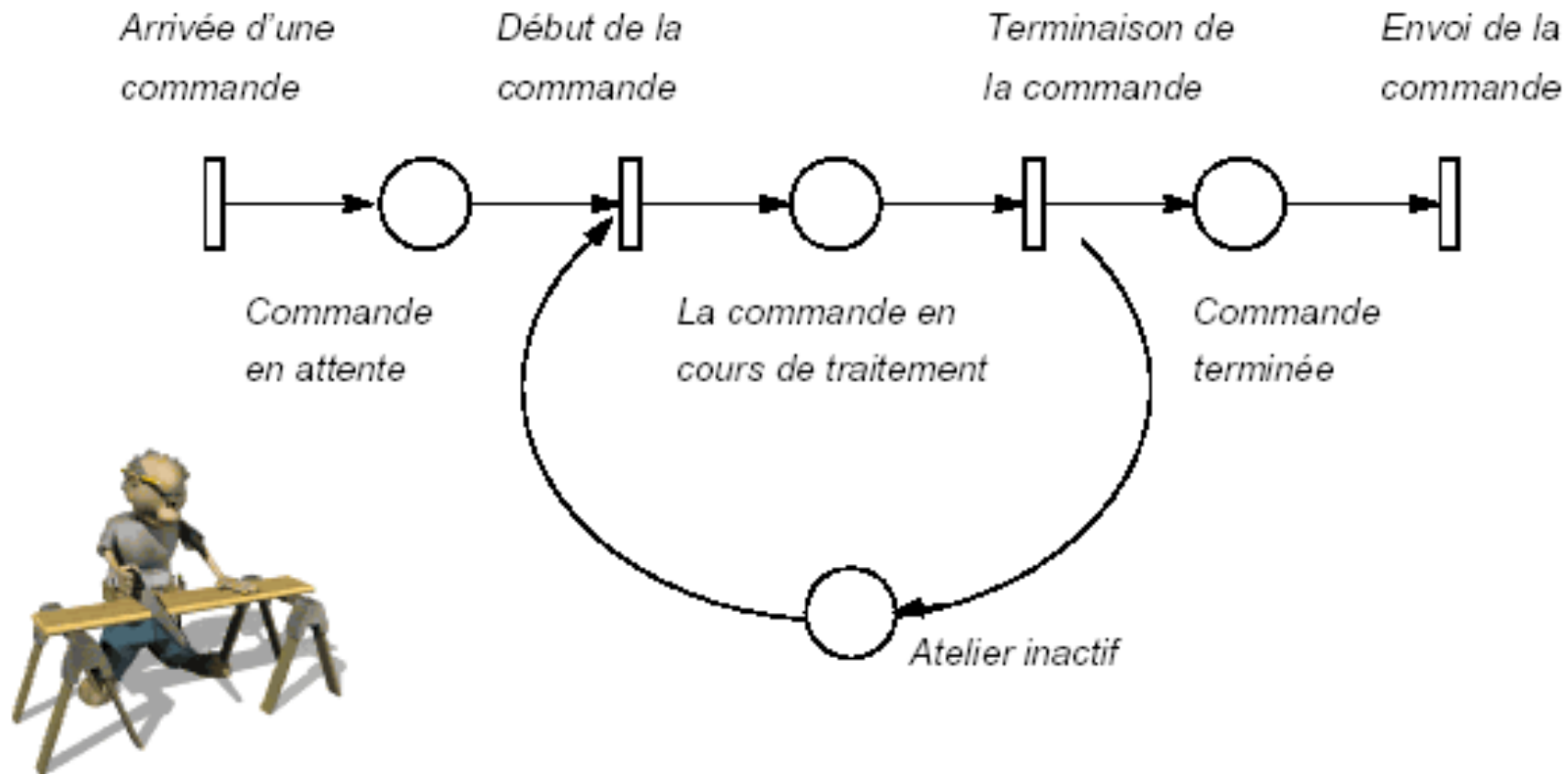
Événement	Précondition	Postcondition
e1	-	c2
e2	c1, c2	c3
e3	c3	c1, c4
e4	c4	-

Réseaux de Petri



MODÉLISATION D'UN SYSTÈME *ÉVÉNEMENT-CONDITION*

EXEMPLE : ATELIER DE COUPE DE BOIS



MODÉLISATION D'UN SYSTÈME AVEC *RESSOURCES* PAR UN RDP « GÉNÉRALISÉ »

Pour certains systèmes, il est plus juste de raisonner en termes d'**ensemble de ressources**, au sens large, qu'en termes d'événements-conditions.

Places : elles peuvent contenir **plusieurs jetons**. Le nombre de jetons contenus dans une place reflète le nombre de ressources qu'elle possède.

Les jetons d'une place n'ont **pas d'identité individuelle**, autrement dit, ils sont **indiscernables**.

Ces ressources sont **consommées et produites** par les événements du système.

Un **RDP GÉNÉRALISÉ** est un RdP dans lequel des **poids** (entiers ≥ 0) sont associés aux arcs. Une transition est alors franchissable lorsque ses places amont contiennent au moins autant de marques que le poids de l'arc qui les relie (par défaut, le poids = 1).

Réseaux de Petri

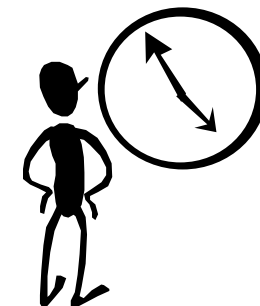


CLASSES DE RDP

Un **RDP AUTONOME** décrit le fonctionnement d'un système qui **évolue de façon autonome**, c'est à dire dont les **instants de franchissement** ne sont pas connus ou pas indiqués.



Un **RDP NON-AUTONOME** décrit le fonctionnement d'un système dont l'évolution est **conditionnée par des événements externes** ou par le temps.





RESEAUX DE PETRI AUTONOMES

Réseaux de Petri



Un RdP est un **graphe orienté biparti** (alternant deux types de **nœuds** : **PLACES** et **TRANSITIONS**) dont tout **arc orienté** doit obligatoirement avoir un nœud à chacune de ses extrémités.

Chaque place contient un nombre entier (positif ou nul) de marques. Le nombre de marques contenues dans une place est noté $M(P_i)$. Le **marquage** d'un réseau M est défini par le vecteur des marquages de ses places.

P3 est en amont de T3, et en aval de T2.

Ce RdP est constitué de 7 places :

$P = \{P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7\}$

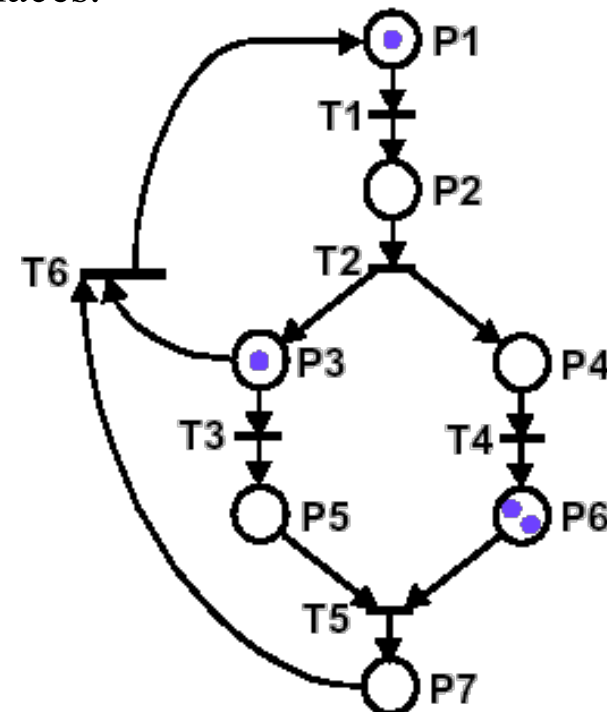
de 6 transitions :

$T = \{T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$

et de 15 arcs orientés.

*Dans un RdP marqué, chaque place contient un nombre entier ≥ 0 de **marques** ou **jetons** $M(P_i) = m_i$ (ici : $m1 = 1, m2 = 0, \dots, m6 = 2, \dots$).*

*Le **marquage** du RdP est le vecteur $M = (m1, \dots, m_i, \dots, m_p)$. Ici, $M = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$*



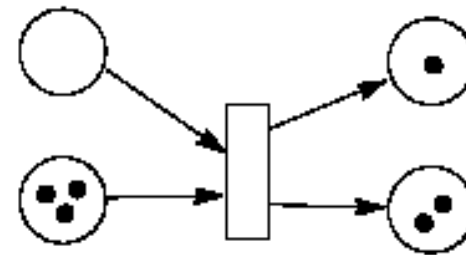
À tout instant, le marquage d'un RdP représente l'état du système modélisé.

Réseaux de Petri

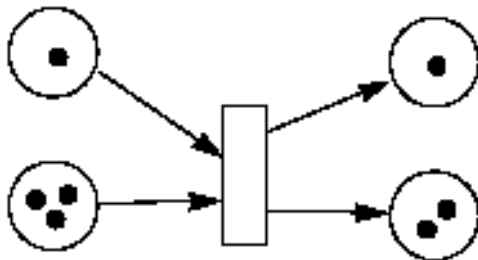


TIR D'UNE TRANSITION

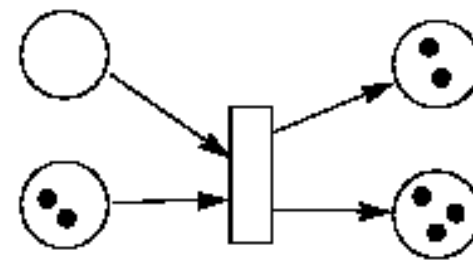
Transition... non tirable



Transition tirable ...



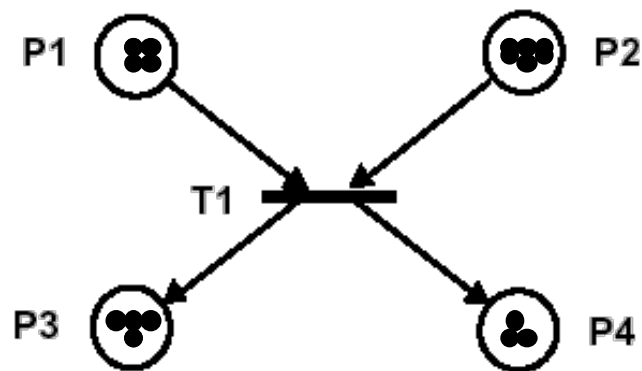
et son tir



Réseaux de Petri



Exemples de franchissements



marquage avant

(1,1,0,0)
(1,1,1,0)
(2,1,0,0)
(0,2,0,0)

marquage après

(0,0,1,1)
(0,0,2,1)
(1,0,1,1)

pas de franchissement

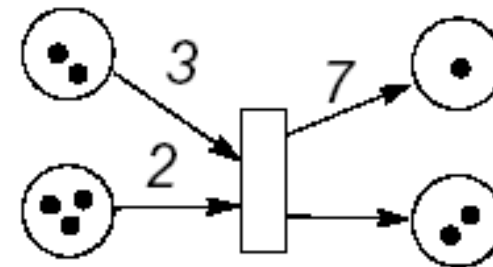
Réseaux de Petri



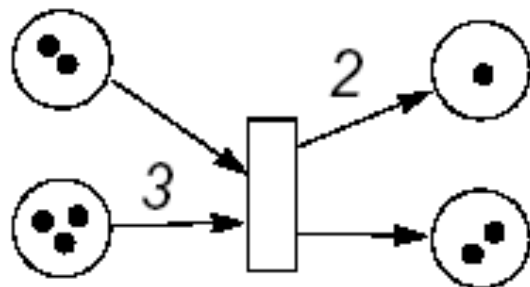
RDP « GÉNÉRALISÉ »

**TIR D'UNE
TRANSITION
AVEC VALUATION
DES ARCS**

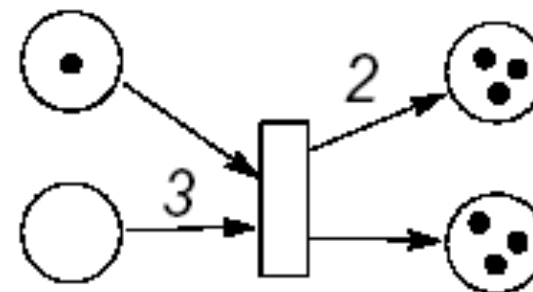
Transition... non tirable



Transition tirable ...



et son tir

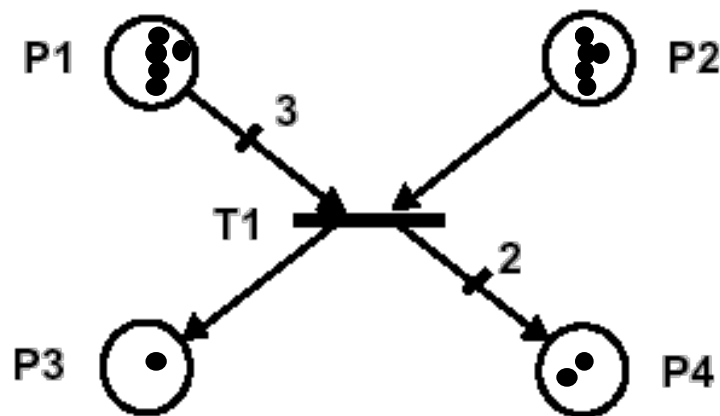


Réseaux de Petri



RDP « GÉNÉRALISÉ »

Exemples de franchissements



marquage avant

(1,2,0,0)

(2,2,0,0)

(3,2,0,0)

marquage après

pas de franchissement

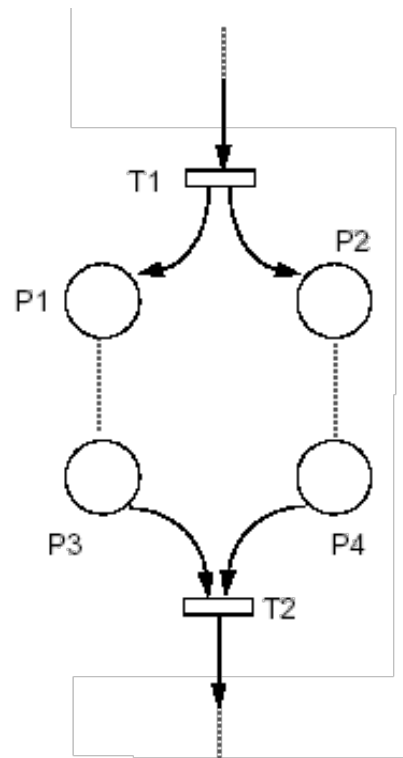
pas de franchissement

(0,1,1,2)

Réseaux de Petri

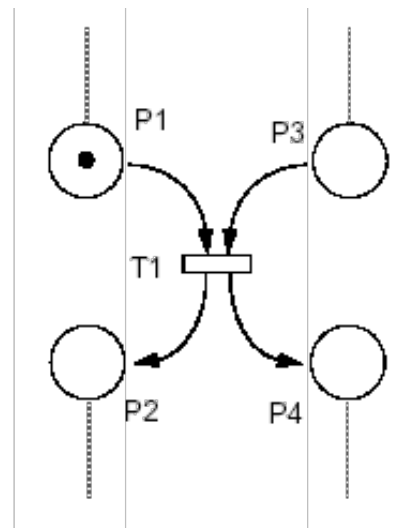


QUELQUES SCHÉMAS DE SYNCHRONISATION ÉLÉMENTAIRES

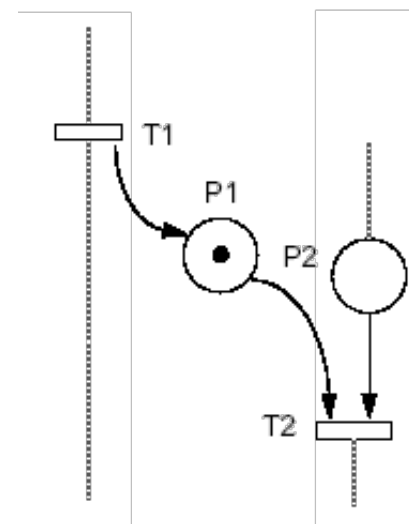


**Parallélisme
ou Concurrency**

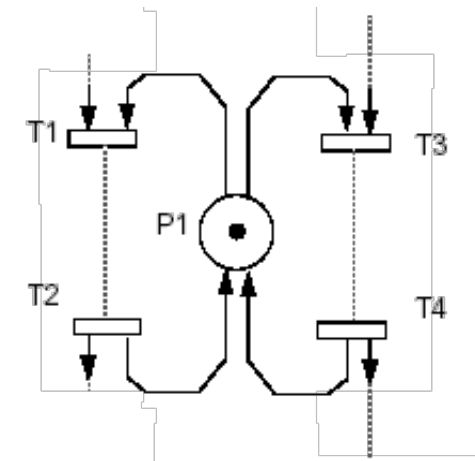
Synchronisations



Rendez-vous



Sémaphore



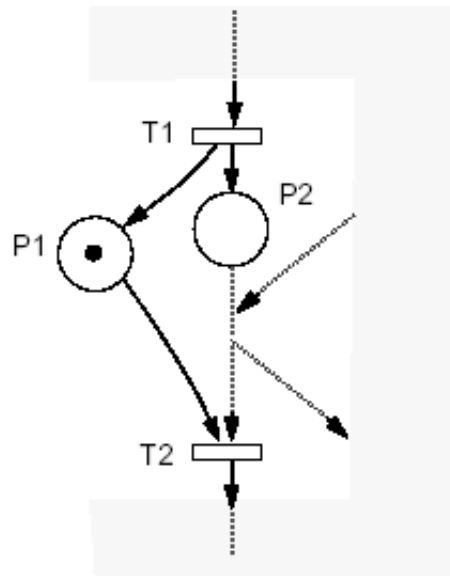
**Partage de
Ressources**
(*exclusion mutuelle,
conflit, ...*)

Réseaux de Petri

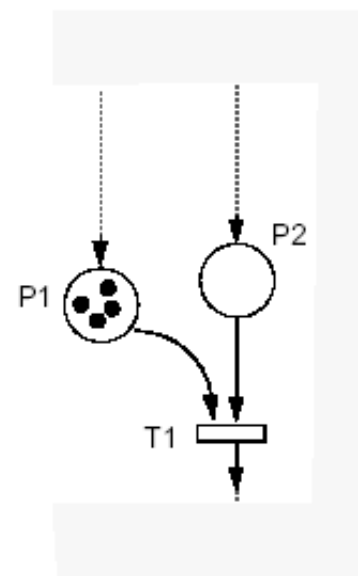


QUELQUES SCHÉMAS DE SYNCHRONISATION ÉLÉMENTAIRES

Mémorisation

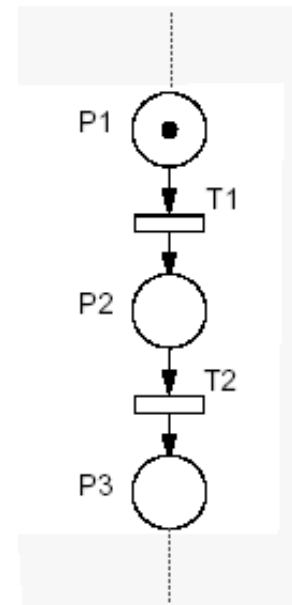


... de
franchissement

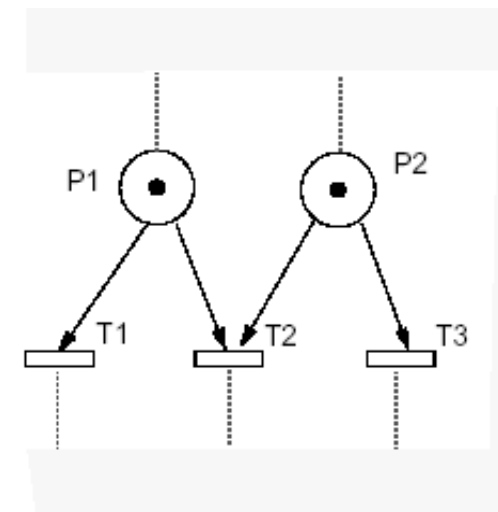


... de
nombre

Séquentialité et Confusion



Séquentialité



Confusion
= concurrence
+ conflit

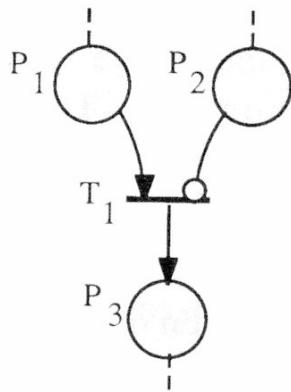
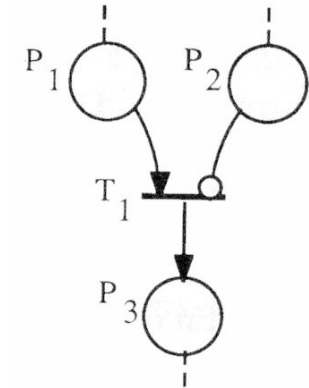
Réseaux de Petri



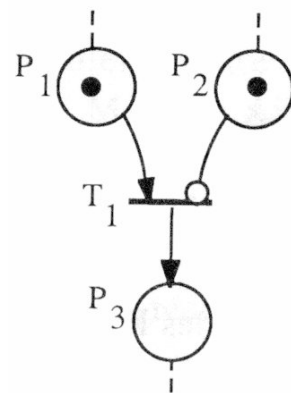
RÉSEAU DE PETRI À ARCS INHIBITEURS

Un **arc inhibiteur** est un arc orienté qui part d'une place P_i pour aboutir à une transition T_j avec son extrémité munie d'un petit cercle.

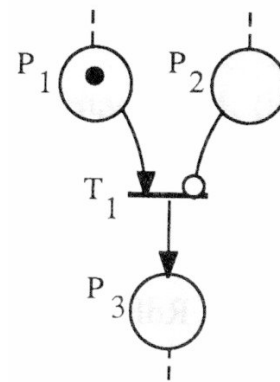
L'arc inhibiteur entre P_i et T_j signifie que la transition T_j n'est validée que si la place P_i ne contient **aucune marque** (test à zéro). Le franchissement consiste alors à retirer une marque dans chaque place d'entrée de T_j à l'exception de P_i et à ajouter une marque dans chaque place de sortie de T_j .



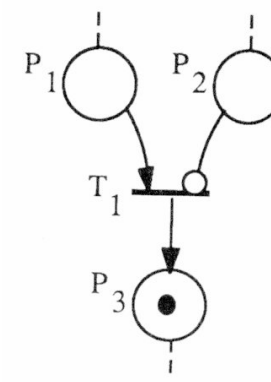
NON VALIDÉE



NON VALIDÉE



*AVANT
FRANCHISSEMENT*



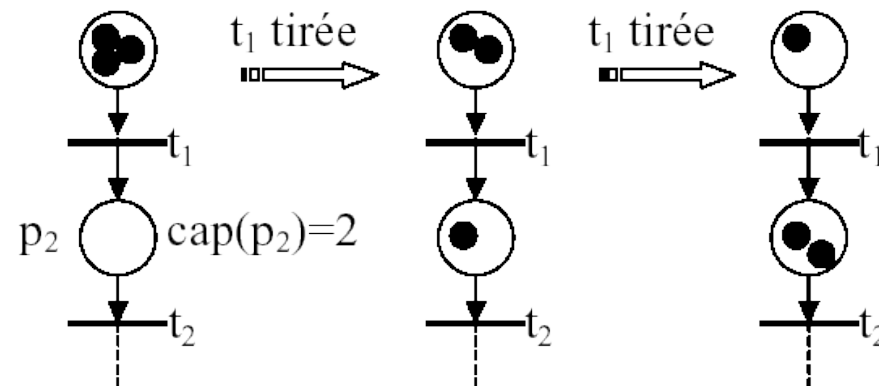
*APRÈS
FRANCHISSEMENT*

Réseaux de Petri

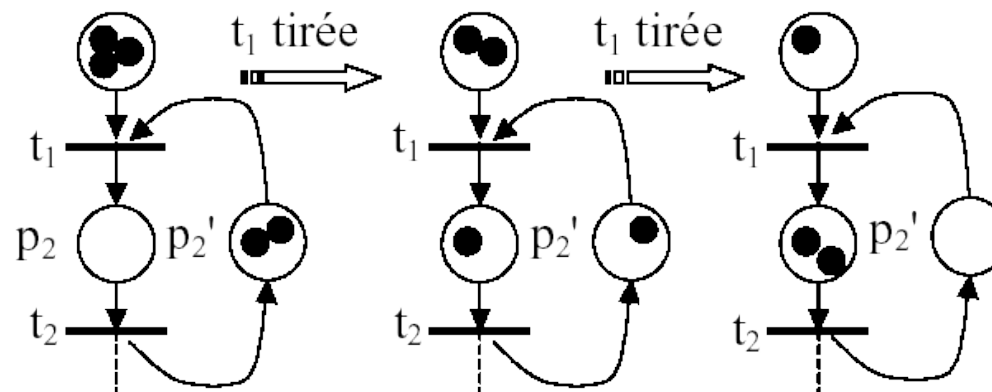


RDP AUTONOMES À CAPACITÉ

Un RdP à capacité est un RdP dans lequel des **capacités** (nombres entiers strictement positifs) sont associés aux places. Le franchissement d'une transition d'entrée d'une place P_i dont la capacité est $\text{Cap}(P_i)$ n'est possible que si ce franchissement **ne conduit pas à un nombre de marques dans P_i supérieure à $\text{Cap}(P_i)$**



Transformation en RdP ordinaire



Réseaux de Petri

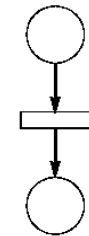


PROPRIÉTÉS STRUCTURELLES DES RDP

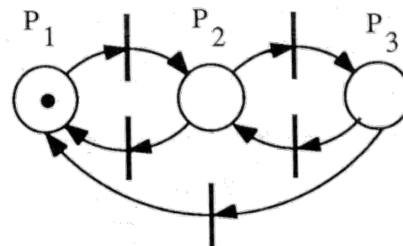
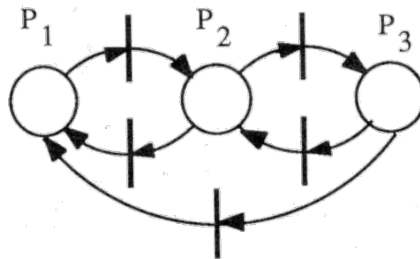
Certains RdP ont des structures particulières, c'est à dire qu'ils possèdent des caractéristiques et des propriétés que n'ont pas tous les réseaux dans le cas le plus général.

GRAPHES D'ETATS

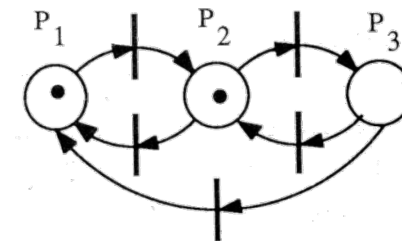
Un RdP non marqué est un **graphe d'états** si et seulement si toute transition a **exactement 1 place d'entrée et 1 place de sortie**.



Remarque : si on *marque* un RdP qui est un **graphe d'état**, son comportement sera celui d'un graphe qui ne possède qu'un seul état à la fois (contient exactement une marque et une seule).



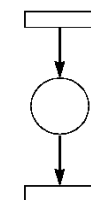
Graphe d'états
(à 3 états)



Marquage non compatible avec
le comportement d'un Graphe d'états

GRAPHES D'ÉVÉNEMENTS

Un RdP est un **graphe d'événements** si et seulement si toute place a **exactement 1 transition d'entrée et 1 transition de sortie**.



PROPRIÉTÉS STRUCTURELLES DES RDP

RDP SANS CONFLIT

Un RdP est dit « **sans conflit structurel** » si chacune de ses places a **au plus une transition de sortie**.

RDP À CHOIX LIBRE

Un RdP à **choix libre** est un RdP dans lequel pour tout conflit provoqué par des transitions T_j , aucune de ces transitions ne possède une autre place d'entrée que celle à partir de laquelle le conflit est provoqué.

RDP SIMPLE

Un RdP est dit « **simple** » si chacune de ses transitions ne peut être concernée que par **un conflit au plus**.

RDP PUR

Un RdP est dit « **pur** » si il n'existe pas de transition ayant **une place d'entrée qui soit aussi place de sortie** de cette même transition.

RDP SANS BOUCLE

Un RdP **sans boucle** est tel que si il existe une transition T_j et une place P_i qui est à la fois place d'entrée et place de sortie de T_j , alors T_j a au moins une **autre place d'entrée**.

Réseaux de Petri



PROPRIÉTÉS STRUCTURELLES DES RDP

Dans un réseau de Petri qui est ...	on peut trouver ...	on ne peut pas trouver ...
graphe d'états		
graphe d'événements		
sans conflit		

Réseaux de Petri



PROPRIÉTÉS STRUCTURELLES DES RDP

Dans un réseau de Petri qui est ...	on peut trouver ...	on ne peut pas trouver ...
à choix libre		
simple		
pur		
sans boucle		

Réseaux de Petri



PROPRIÉTÉS COMPORTEMENTALES DES RDP

Le **marquage** d'un RdP à un instant donné est représenté par un **vecteur colonne** dont la $i^{\text{ème}}$ composante est le marquage de la place P_i .

L'évolution du marquage $M1$ au marquage $M2$ par franchissement de la transition $T1$ est notée :
 $M1 (T1 \rightarrow M2$

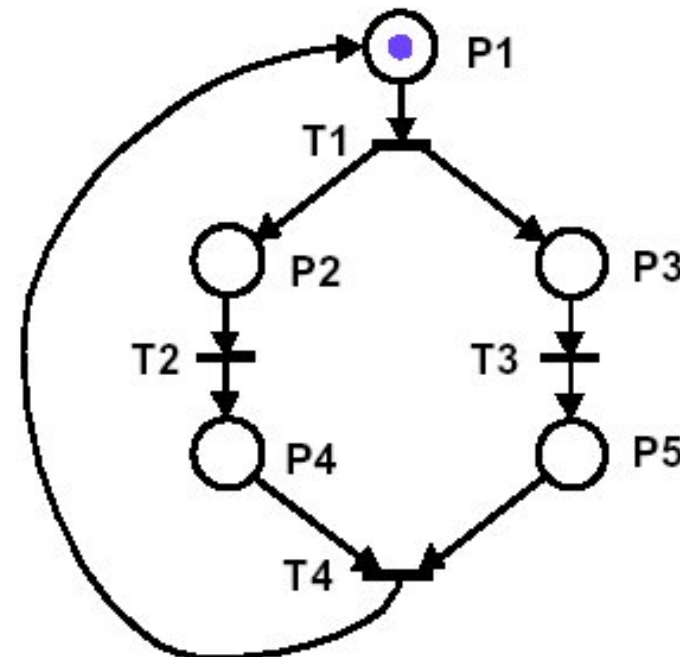
Le marquage initial est noté **$M0$** . L'ensemble de tous les marquages accessibles est noté **$*M0$** .

Exemple : à partir du marquage initial : $M0 = (1,0,0,0,0)$

ce RdP peut atteindre les marquages :

$M1 = (0,1,1,0,0)$ $M2 = (0,0,1,1,0)$

$M3 = (0,1,0,0,1)$ $M4 = (0,0,0,1,1)$



PROPRIÉTÉS COMPORTEMENTALES DES RDP

BORNITUDE

Une place P_i est dite **bornée** pour un marquage initial M_0 si, pour tout marquage accessible à partir de M_0 , le nombre de marques dans P_i est fini. Un RdP est **BORNÉ** pour un marquage initial M_0 si **toutes ses places sont bornées**.

Un RdP est **SAUF** pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible chaque place contient **au plus une marque**.

VIVACITE

Une transition T_j est **vivante** pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible M_i , il existe une séquence de franchissement S qui contient la transition T_j à partir de M_i . Un RdP est **VIVANT** pour un marquage initial M_0 si toutes ses transitions sont vivantes (quelque soit l'évolution, aucune transition ne deviendra définitivement infranchissable).

Une transition T_j est **quasi-vivante** pour un marquage initial M_0 s'il existe une séquence de franchissement qui contient T_j à partir de M_0 . Un RdP est **QUASI-VIVANT** si toutes ses transitions sont quasi-vivantes.

BLOCAGE

Un **BLOCAGE** (ou *état puits*) est un marquage tel qu'**aucune transition n'est validée**.

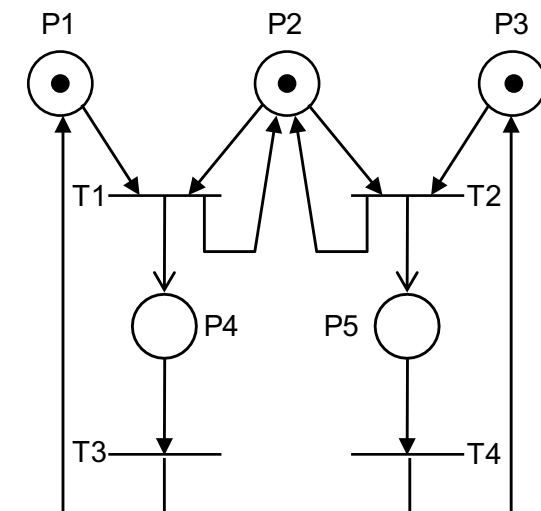
Un RdP est dit **SANS BLOCAGE** pour un marquage initial M_0 si aucun de ses marquages accessibles n'est un **blocage**.

PROPRIÉTÉS COMPORTEMENTALES DES RDP

CONFLIT

Un **CONFLIT EFFECTIF** est l'existence d'un **conflit structurel** et d'un marquage M_i tel que le nombre de jetons dans P_i est inférieur au nombre de transitions de sorties de P_i .

Un RdP est **persistant** pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible $M_i \in *M_0$, on a la propriété suivante : si T_j et T_k sont validées par le marquage M_i alors $T_j T_k$ (ou $T_k T_j$) est une séquence de franchissements à partir de M_i . *(Dans le cas d'un conflit, il y a un choix à faire sur l'ordre de franchissement mais ce choix est sans conséquence dans la mesure où il ne conduira pas à annuler une possibilité de franchissement).*



REINITIALISABILITE

Un RdP a un **ETAT D'ACCUEIL** pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible $M_i \in *M_0$, il existe une séquence S_i telle que $M_i(S_i \rightarrow M_a$

Un RdP est **RÉINITIALISABLE** pour un marquage initial M_0 si **M_0 est un état d'accueil.**

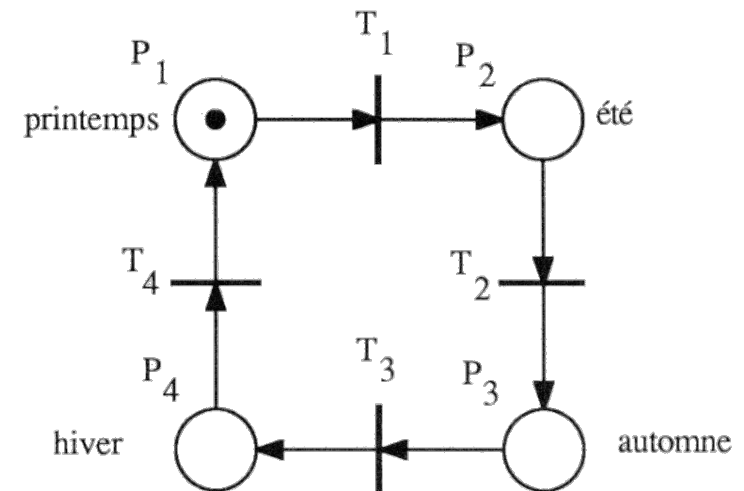
PROPRIÉTÉS COMPORTEMENTALES DES RDP

INVARIANTS

À partir d'un marquage initial, le marquage d'un Rdp peut évoluer par franchissement de transitions, et, s'il n'y a pas de blocage, le nombre de franchissements de transition est **illimité**. Néanmoins, **on ne pourra pas atteindre n'importe quel marquage et on ne pourra pas franchir n'importe quelle séquence de transitions**. Des **INVARIANTS** permettent de caractériser certaines propriétés des **marquages accessibles** et des **transitions franchissables**, quelle que soit l'évolution.

COMPOSANTE CONSERVATIVE

Sur l'exemple ci-contre, on voit bien que, quelle que soit l'évolution, il y aura toujours **une et une seule marque** pour l'ensemble des 4 places. Donc, à tout instant, on a $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 1$. Cet *invariant* a une signification évidente : *à tout instant, on est dans une et une seule saison !*



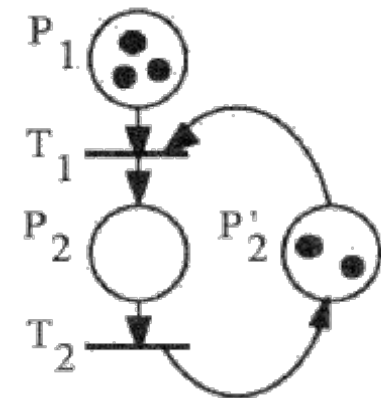
PROPRIÉTÉS COMPORTEMENTALES DES RDP

INVARIANTS

COMPOSANTE CONSERVATIVE (suite)

Soit un Réseau de Petri R et P l'ensemble de ses places. Le RdP R aura un **invariant de places** si il existe un **sous-ensemble de places** $P' = \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ inclus dans P et un **vecteur de pondération** $(q_1, q_2, \dots, q_r)$ dont tous les poids q_i sont des nombres entiers positifs tels que :
 $q_1 \cdot M(P_1) + q_2 \cdot M(P_2) + \dots + q_r \cdot M(P_r) = \text{constante}$, pour tout $M \in {}^*M_0$

L'ensemble de places P' est une **composante conservative**. Le RdP R est dit **conservatif** si et seulement si P est une **composante conservative**. La propriété d'être **composante conservative** est **indépendante du marquage initial** (c'est une propriété du RdP non marqué). En revanche, la **constante** de l'invariant dépend du marquage initial. En général, une composante conservative a une **signification physique** : par exemple, un système est dans *un et un seul état à la fois*, ou encore, un *nombre d'entités se conserve*, ...



$M(P_2) + M(P'_2) = 2$
mais si le marquage initial était
 $M_0(P_2) + M_0(P'_2) = N$,
on aurait $M(P_2) + M(P'_2) = N$

PROPRIÉTÉS COMPORTEMENTALES DES RDP

INVARIANTS

COMPOSANTE RÉPÉTITIVE

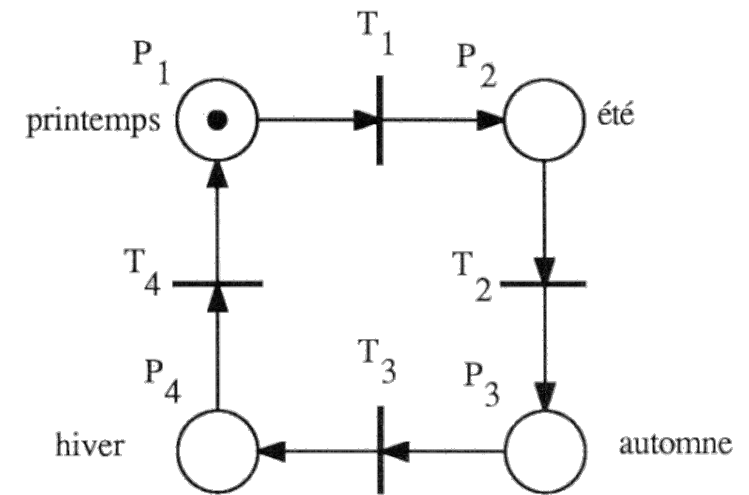
Pour le RdP ci-contre, les séquences de franchissements possibles à partir du marquage initial M_0 sont :

T_1 T_1T_2 $T_1T_2T_3$ $T_1T_2T_3T_4$ $T_1T_2T_3T_4T_1$...

La séquence de franchissement $T_1T_2T_3T_4$ est particulière car $M_0 (T_1T_2T_3T_4 \rightarrow M_0$. Cette séquence ramenant à l'état initial, on pourra donc la répéter : c'est une **séquence répétitive**. Cette notion de séquence répétitive donne une idée du comportement cyclique d'un réseau.

Une séquence répétitive qui contient toutes les transitions (chacune au moins une fois) est une **séquence répétitive complète**.

Soit un Réseau de Petri R et T l'ensemble de ses transitions. Soit S une **séquence de franchissements répétitive** telle que les transitions qui apparaissent dans S sont définies par le sous-ensemble $T' = \{T_1, T_2, \dots, T_r\}$ inclus dans T . L'ensemble des transitions T' est une **composante répétitive**. Le réseau R est dit **répétitif** si et seulement si T est une composante répétitive.



Réseaux de Petri



Il existe 3 méthodes principales pour analyser les propriétés d'un RdP :

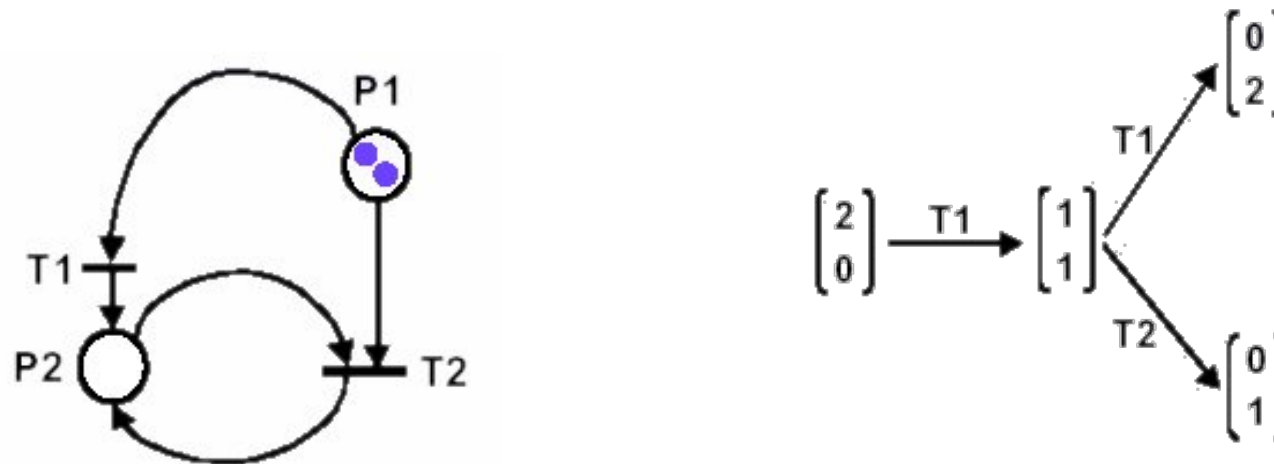
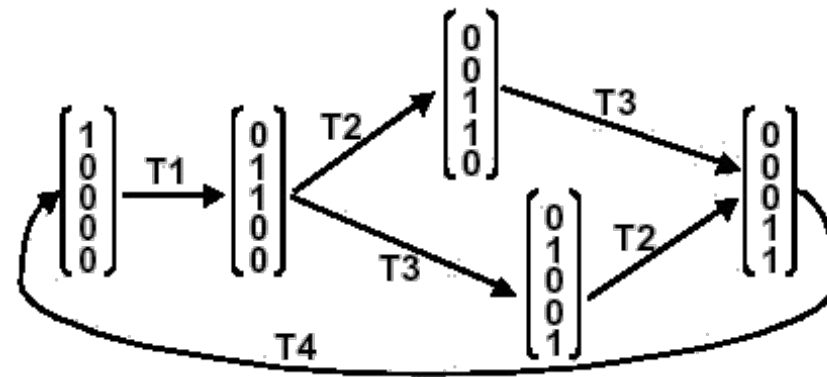
- Graphe de marquage ou arbre de couverture
- Algèbre linéaire
- Méthodes de réduction

Réseaux de Petri



GRAPHE DE MARQUAGE

Le **graphe des marquages** (composé de nœuds correspondant aux marquages accessibles et d'arcs correspondant aux franchissements de transitions) est alors :

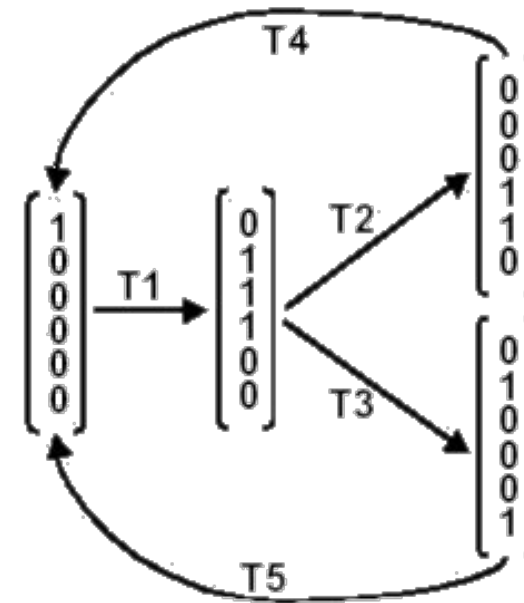
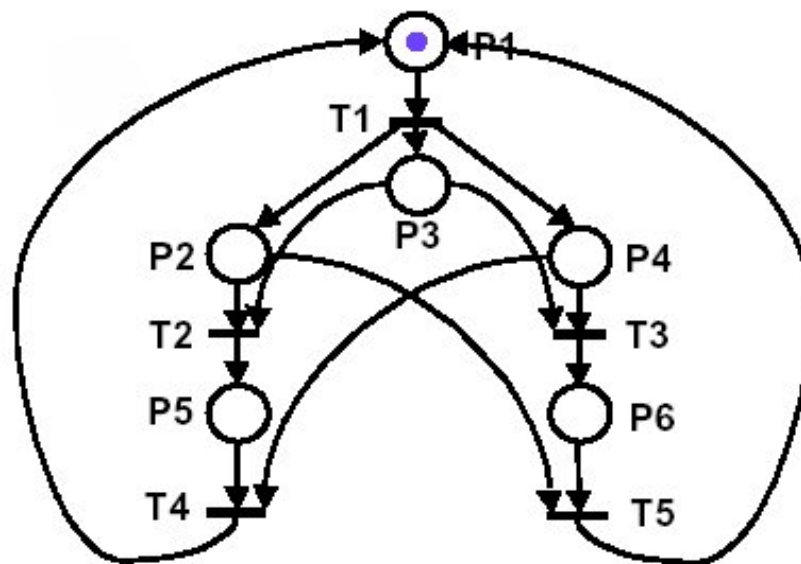


Ce RdP est **borné**, **non vivant** (2 états de blocage) et **non réinitialisable**.

Réseaux de Petri



GRAPHE DE MARQUAGE



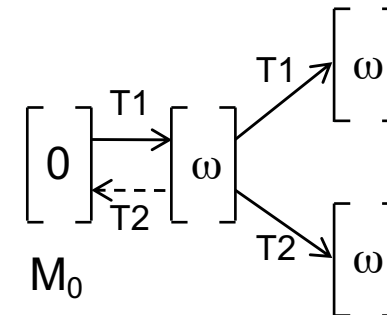
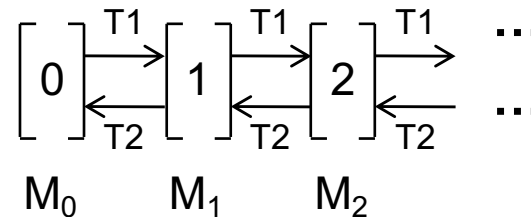
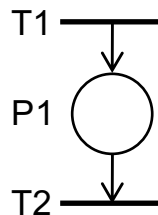
Ce RdP est **sauf**, **vivant** et **réinitialisable**.

Réseaux de Petri



ARBRE DE COUVERTURE

Arbre de couverture



$M_1 > M_0$, le franchissement de $T1$ peut se répéter autant de fois que l'on veut. On associe alors à $P1$ le marquage symbolique ω qui signifie que le nombre de marques dans $P1$ peut atteindre un nombre entier k aussi grand que l'on veut.

Algorithme de construction de l'arbre de couverture

Pas 1. A partir du marquage initial M_0 , on indique toutes les transitions validées et les marquages successeurs correspondants. Si un de ces marquages est strictement supérieur à M_0 , on met ω pour chacune des composantes supérieures aux composantes correspondantes de M_0 .

Pas 2. Pour chaque nouveau marquage M_i de l'arbre, on fait soit le pas 2.1, soit le pas 2.2.

Pas 2.1. S'il existe sur le chemin de M_0 à M_i (ce dernier exclu), un marquage $M_j = M_i$, alors M_i n'a pas de successeur

Pas 2.2. S'il n'existe pas de marquage $M_j = M_i$ sur le chemin de M_0 à M_i , alors on prolonge l'arbre en ajoutant tous les successeurs de M_i . Pour chaque successeur M_k de M_i :

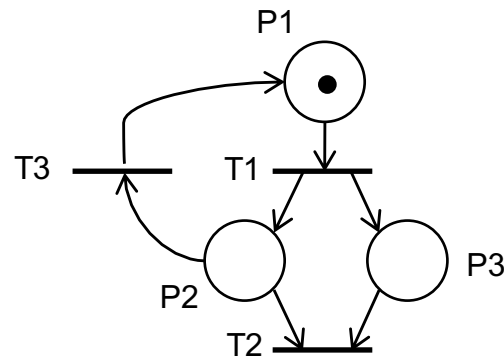
- une composante ω de M_i reste une composante ω de M_k
- s'il existe un marquage M_j sur le chemin de M_0 à M_k tel que $M_k > M_j$, alors on met ω pour chacune des composantes supérieures aux composantes de M_j .

Réseaux de Petri

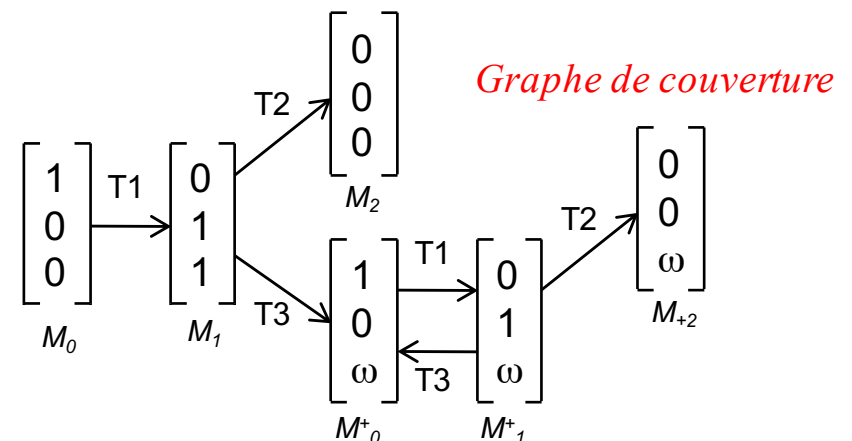
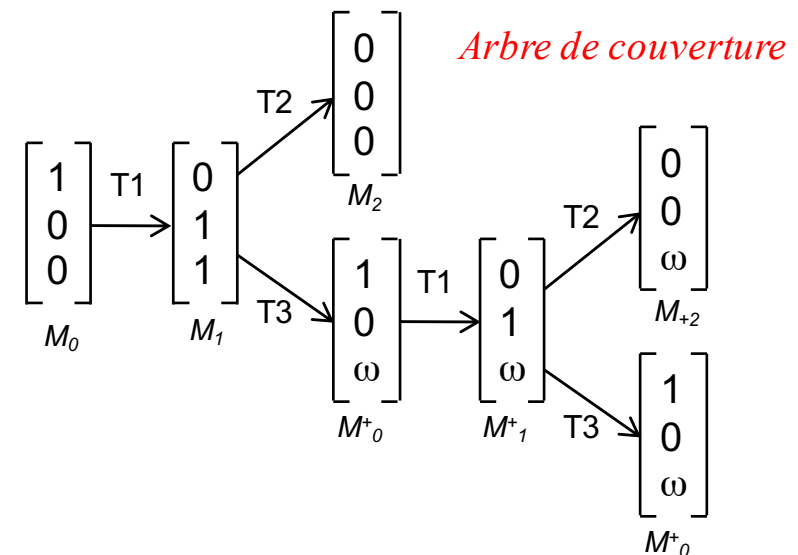


ARBRE DE COUVERTURE

Exemple



- Pas 1. $M_0 (T_1 \rightarrow M_1$
 Pas 2.2. pour M_1
 $M_1 (T_2 \rightarrow M_2$
 $M_1 (T_3 \rightarrow (1,0,1)$. Comme $(1,0,1) > (1,0,0) = M_0$, on écrit
 $M_1 (T_3 \rightarrow (1,0,\omega) = M_0^+$
 Pas 2.2. pour M_2 , aucune transition validée, c'est un blocage
 Pas 2.2. pour M_0^+
 $M_0^+ (T_1 \rightarrow (0,1,\omega) = M_1^+$
 Pas 2.2. pour M_1^+
 $M_1^+ (T_2 \rightarrow (0,0,\omega) = M_2^+$
 $M_1^+ (T_3 \rightarrow (1,0,\omega) = M_0^+$
 Pas 2.2. pour M_2^+ : aucune transition validée, c'est un blocage
 Pas 2.1. pour M_0^+
 Sur le chemin correspondant aux transitions $T_1 T_3 T_1 T_3$ depuis M_0 , on a déjà rencontré le même marquage, donc pas de successeur



Réseaux de Petri



ALGÈBRE LINEAIRE

On peut associer une **représentation mathématique** à un RdP (ordinaire ou généralisé) appelée « **ALGÈBRE LINÉAIRE** »

Un **RdP ordinaire non marqué** est un quadruplet $Q = (P, T, \text{Pré}, \text{Post})$ où :

$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ est un ensemble fini non vide de **Places**

$T = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ est un ensemble fini non vide de **Transitions**

P et T sont disjoints

$\text{Pré} : P \times T \rightarrow \{0,1\}$ est l'**application d'incidence avant**

($\text{Pré}(P_i, T_j) = 1$ si un arc existe entre P_i et T_j)

$\text{Post} : P \times T \rightarrow \{0,1\}$ est l'**application d'incidence arrière**

($\text{Post}(P_i, T_j) = 1$ si un arc existe entre T_j et P_i)

Un **RdP généralisé** est défini de la même manière mais avec :

$\text{Pré} : P \times T \rightarrow \mathbf{N}$ est l'application d'incidence avant

($\text{Pré}(P_i, T_j) = \text{poids de l'arc}$ si l'arc existe entre P_i et T_j , 0 sinon)

$\text{Post} : P \times T \rightarrow \mathbf{N}$ est l'application d'incidence arrière

($\text{Post}(P_i, T_j) = \text{poids de l'arc}$ si l'arc existe entre T_j et P_i , 0 sinon)

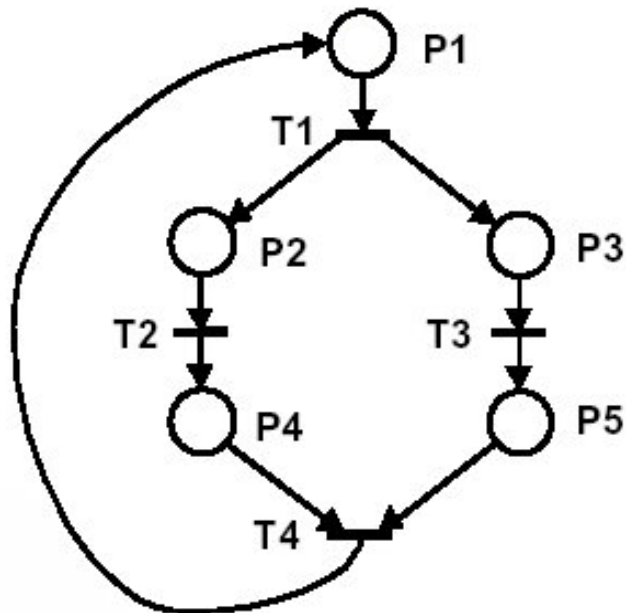
Un **RdP marqué** est défini par $R = (Q, M_0)$ où Q est un RdP non marqué et M_0 est un marquage initial

Réseaux de Petri



ALGEBRE LINEAIRE

On représente les **applications d'incidence avant et arrière** par des **MATRICES**



Matrice d'incidence avant

PRE

$$W^- = \begin{matrix} & \begin{matrix} T1 & T2 & T3 & T4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Matrice d'incidence arrière

POST

$$W^+ = \begin{matrix} & \begin{matrix} T1 & T2 & T3 & T4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

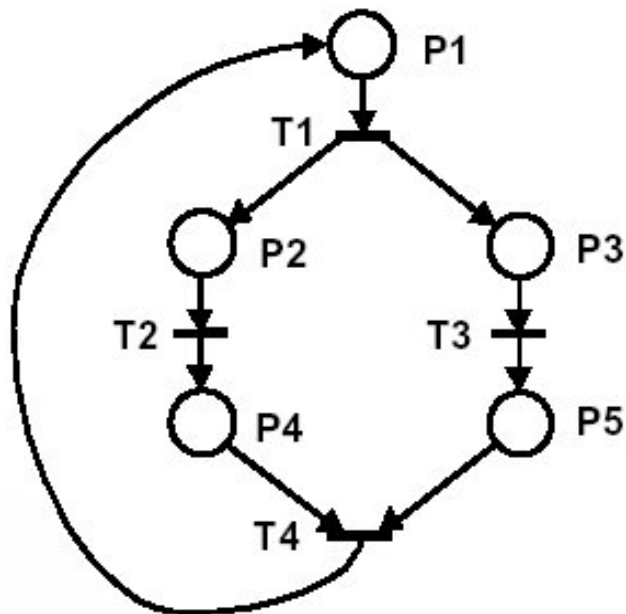
On appelle **MATRICE D'INCIDENCE** la matrice $W = W^+ - W^-$

Réseaux de Petri



ALGEBRE LINEAIRE

La **matrice d'incidence** du RdP ci-dessous est donc la matrice $\mathbf{W} = \mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-$



$$\begin{matrix} & \begin{matrix} T1 & T2 & T3 & T4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & - & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{pmatrix} \\ & & & & \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{matrix}
 \end{matrix}$$

Cette matrice est indépendante du marquage et indique **en colonne** la **modification du marquage** apportée par le franchissement de la transition correspondante

Si la séquence de franchissement S est telle que $M_i (S \rightarrow M_k$, l'**équation fondamentale** d'un RdP s'écrit alors :

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{M}_i + \mathbf{W} \cdot \mathbf{S}$$

Elle permet de trouver le marquage résultat (M_k) du tir d'une **séquence** S à partir du marquage M_i . S s'écrit comme un **vecteur de dimension m** (nombre de transitions) dont la $j^{\text{ème}}$ composante correspond au nombre de tirs de la transition T_j dans la séquence S .

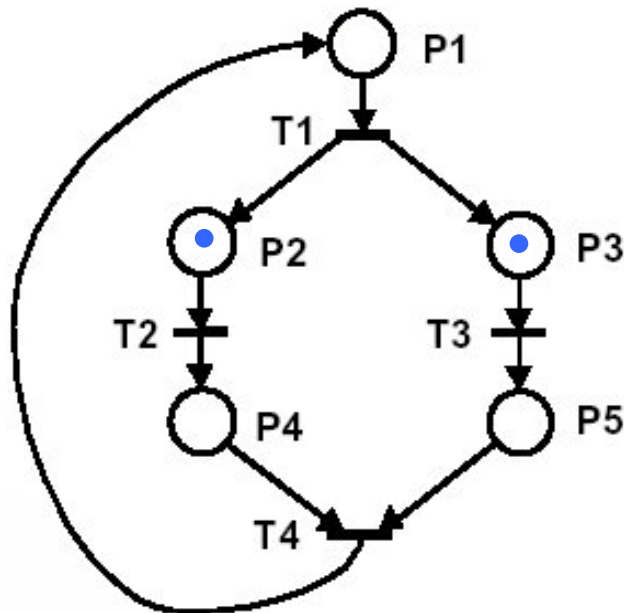
Réseaux de Petri



ALGEBRE LINEAIRE

$$M_k = M_i + W.S$$

Le marquage atteint à partir du marquage $M_i = (0,1,1,0,0)$ par franchissement de **T2** est :



$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

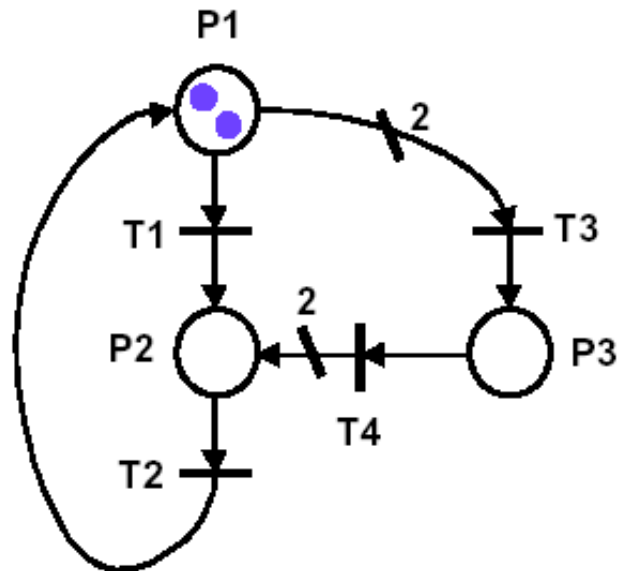
Le marquage atteint à partir du marquage $M_k = (0,0,1,1,0)$ par franchissement de la séquence **(T3 T4 T1 T3)** est :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \\ -1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Réseaux de Petri



ALGEBRE LINEAIRE



Matrice d'incidence avant

$$W^- = \begin{matrix} & \begin{matrix} T1 & T2 & T3 & T4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Matrice d'incidence arrière

$$W^+ = \begin{matrix} & \begin{matrix} T1 & T2 & T3 & T4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Matrice d'incidence : $W = W^+ - W^-$

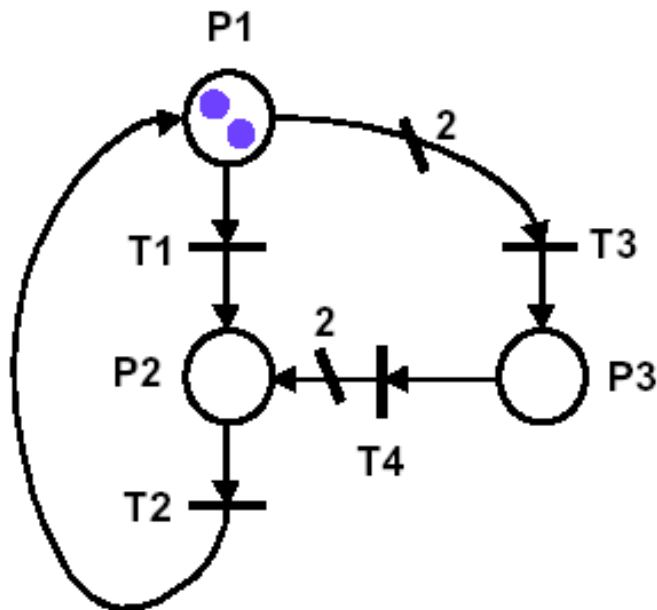
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Réseaux de Petri



ALGEBRE LINEAIRE

Le marquage atteint à partir du marquage $M_0 = (2,0,0)$ par franchissement de la séquence (T1 T2 T3 T4 T2) est :



$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'arbre de marquage parcouru est :

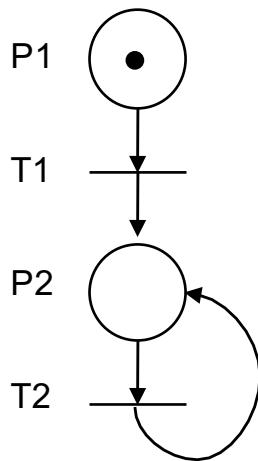
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{T1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{T2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{T3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T4} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{T2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ALGEBRE LINEAIRE

- Franchissabilité d'une séquence

- L'équation fondamentale d'un RdP ne peut s'appliquer que si la séquence de franchissement S est telle que $M_i (S \rightarrow M_k$
- Si le nouveau marquage obtenu contient des entiers **négatifs**, cela signifie que la séquence n'est pas franchissable.
- Mais l'inverse n'est pas vrai (le fait que le nouveau marquage ne contienne aucun entier négatif ne signifie pas pour autant que la séquence est franchissable !!!)

Séquence = T2T1



$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors que la séquence T2T1 n'est pas franchissable depuis M_0

ALGEBRE LINEAIRE

Pour toute séquence de franchissement, il existe un marquage initial minimal M tel que celle-ci soit franchissable.

Reprenons l'exemple précédent, avec $S = T_2T_1$

$$M_k = M - \text{Pre}(_, T_2) + \text{Post}(_, T_2) - \text{Pre}(_, T_1) + \text{Post}(_, T_1)$$

Avant tout tir de transition, on doit avoir un marquage satisfaisant les pré-conditions (**on a suffisamment de jetons pour tirer la transition !**)

$$(1) \quad M \geq \text{Pre}(_, T_2)$$

$$(2) \quad M_1 \geq \text{Pre}(_, T_1) \quad \text{d'où} \quad M + W(_, T_2) \geq \text{Pre}(_, T_1)$$

$$\text{D'après (1)} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \text{Pre}(_, T_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'après (2)} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad W(_, T_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{pre}(_, T_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } M \text{ minimal} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La séquence $S = T_2T_1$ sera franchissable pour tout marquage initial M_0 tel que $M_0 \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Réseaux de Petri



ALGEBRE LINEAIRE

- Généralisation

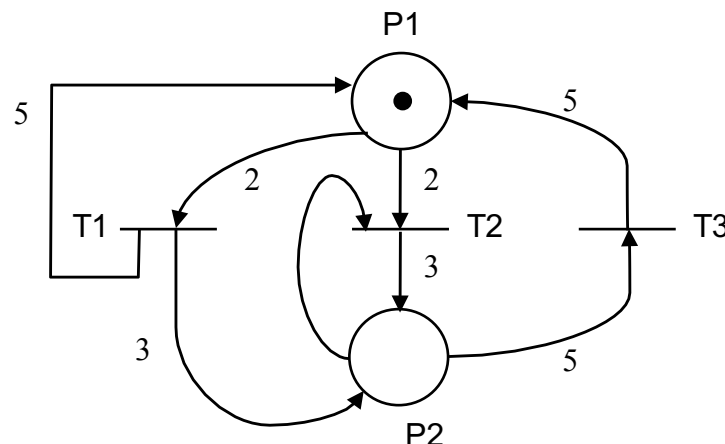
- Pour trouver le marquage minimal M_{0min} permettant le franchissement de la séquence $S = t_1 t_2 \dots t_n$, on doit satisfaire toutes les contraintes

$$\begin{aligned} M_{0min} &\geq \text{Pre}(_, t_1) \\ M_{0min} + W(_, t_1) &\geq \text{Pre}(_, t_2) \\ &\dots \end{aligned}$$

$$M_{0min} + W(_, s') \geq \text{Pre}(_, t_n) \text{ où } (s' = t_1 t_2 \dots t_{n-1})$$

- Pour tout marquage $M_0 \geq M_{0min}$, la séquence S est franchissable

- Exemple



Marquage minimal pour que la séquence $S = t_2 t_2 t_3 t_1$ soit franchissable ?

Réseaux de Petri



1

$$M_0 \geq \text{Pre}(_, t_2)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ainsi $x \geq 2$ et $y \geq 1$

2

$$M_0 + W(_, t_2) \geq \text{Pre}(_, t_2)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +3 & -2 & +5 \\ +3 & +2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ +2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ainsi $x \geq 4$ et $y \geq -1$

3

$$M_0 + W(_, t_2 t_2) \geq \text{Pre}(_, t_3)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +3 & -2 & +5 \\ +3 & +2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ +4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ainsi $x \geq 4$ et $y \geq +1$

4

$$M_0 + W(_, t_2 t_2 t_3) \geq \text{Pre}(_, t_1)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +3 & -2 & +5 \\ +3 & +2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ainsi $x \geq 1$ et $y \geq +1$

$$M_0 \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ALGEBRE LINEAIRE

- Composante conservative

- Soit un vecteur de pondération $F^T = (q_1, q_2, \dots, q_n)$.
- Soit $P(F)$ l'ensemble des places dont le poids n'est pas nul.
- Exemple : RdP avec 5 places, $F^T = (1, 1, 0, 0, 1)$ correspond à une pondération de 1 pour les places P_1, P_2 et P_5 , 0 pour les places P_3 et P_4 . $P(F) = \{P_1, P_2, P_5\}$
- B est une composante conservative si et seulement s'il existe un vecteur de pondération F tel que

$$P(F) = B$$

$$F^T \cdot W = 0$$

En effet, on a $M_i = M_0 + W \cdot S$ pour tout marquage M_i atteignable par une séquence de franchissement S . On en déduit:

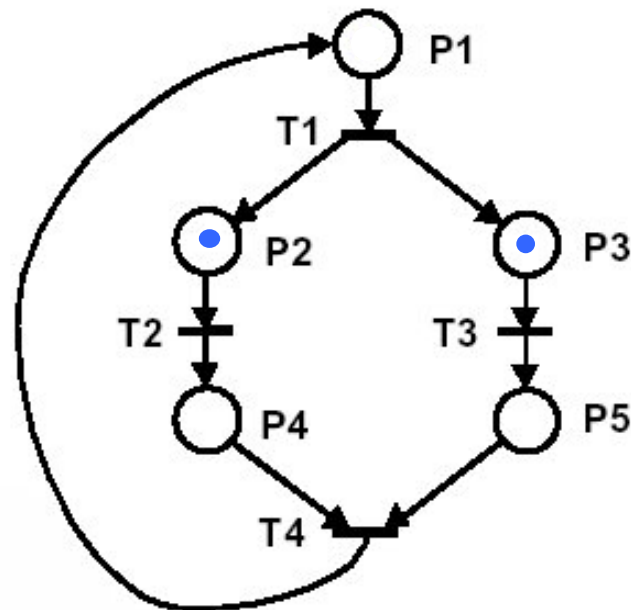
$$F^T \cdot M_i = F^T \cdot M_0 + F^T \cdot W \cdot S$$

Si $F^T \cdot W = 0$ alors $F^T \cdot M_i = F^T \cdot M_0$, quelle que soit S , donc pour tout marquage $M_i \in {}^*M_0$

- $F^T \cdot M_i = k$ avec $k = F^T \cdot M_0$ est donc un invariant de marquage
- Un vecteur $F \geq 0$ qui est solution de $F^T \cdot W = 0$ est appelé un **P-semi-flot**

ALGEBRE LINEAIRE

- Exemple



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

F^T

W

- Composition de P-semi-flots

- Soit F_1 et F_2 deux P-semi-flots.
- Si α et β sont des entiers positifs ou nuls, alors $\alpha F_1 + \beta F_2$ est un P-semi-flot. Si α et β sont des entiers positifs, alors $P(\alpha F_1 + \beta F_2) = P(F_1) \cup P(F_2)$
- Si toutes les composantes du vecteur $F_1 - F_2$ sont des entiers positifs ou nuls, alors $F_1 - F_2$ est un P-semi-flot.



ALGEBRE LINEAIRE

Composante répétitive

- Notation : $T(s)$ est l'ensemble des transitions qui apparaissent dans la séquence de franchissements S de vecteur caractéristique s .
- Propriété : Un ensemble D de transitions est une composante répétitive stationnaire si et seulement s'il existe une séquence de franchissements S telle que $T(s) = D$ et $W.s = 0$. D est une composante répétitive croissante si $W.s > 0$.
- Définition : On appelle **T-semi flot**, tout vecteur s tel que $W.s = 0$.
Attention, tout T-semi flot ne correspond pas forcément à une composante répétitive stationnaire. En effet, pour l'être, il est nécessaire qu'il corresponde à une séquence franchissable.

ANALYSE DES PROPRIETES PAR REDUCTION DES RDP

La construction du graphe de marquage est une méthode efficace pour évaluer les propriétés d'un Rdp de taille modeste mais se révèle très fastidieuse pour un Rdp qui a de nombreux marquages accessibles. La même remarque peut être formulée à propos de l'algèbre linéaire.

Les **méthodes de réduction** permettent de transformer un Rdp en un autre Rdp plus simple en préservant certaines de ces propriétés initiales. Attention: **les réseaux ne sont pas pour autant équivalents**.

Quatre principales règles de réduction préservant les propriétés de vivacité et de bornitude

- Réduction R1: substitution d'une place
- Réduction R2: place implicite
- Réduction R3: transition neutre
- Réduction R4: transitions identiques

Deux règles de réduction préservant les invariants de marquage

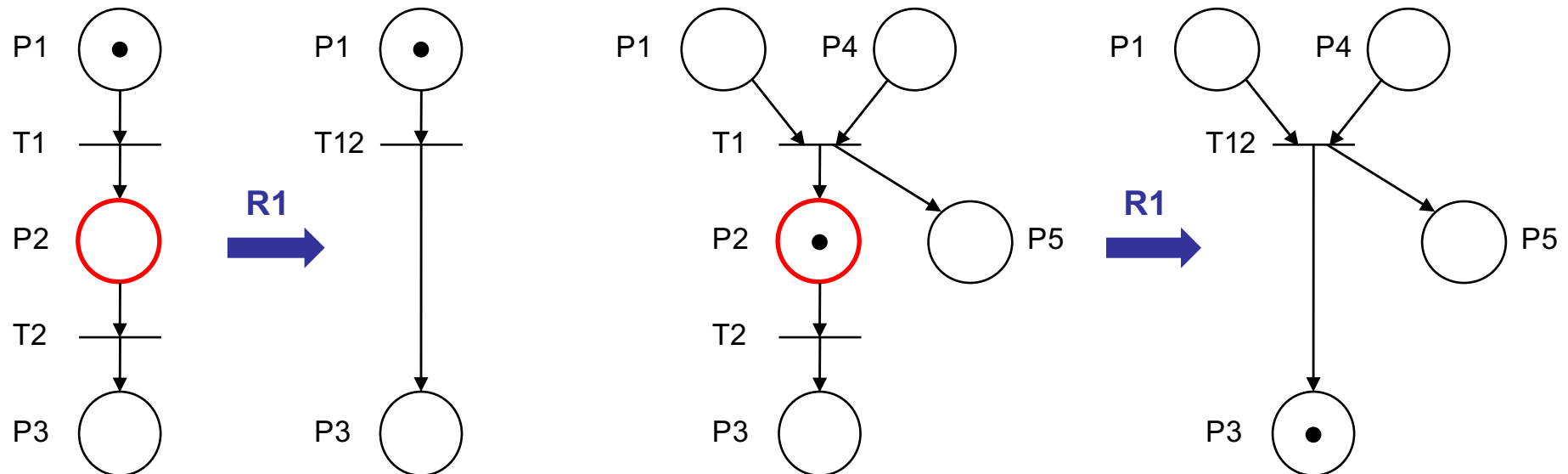
- Réduction Ra : Transition impure
- Réduction Rb: Transition pure

ANALYSE DES PROPRIETES PAR REDUCTION DES RDP

REDUCTION R1 : SUBSTITUTION D'UNE PLACE

Une place P_i peut être substituée si elle remplit les trois conditions suivantes :

- Les transitions de sortie de P_i n'ont pas d'autres place d'entrée que P_i ;
- Il n'existe pas de transitions T_j qui soit à la fois transition d'entrée et de sortie de P_i ;
- Au moins une transition de sortie de P_i n'est pas une transition puit.



Propriétés conservées par la réduction R1

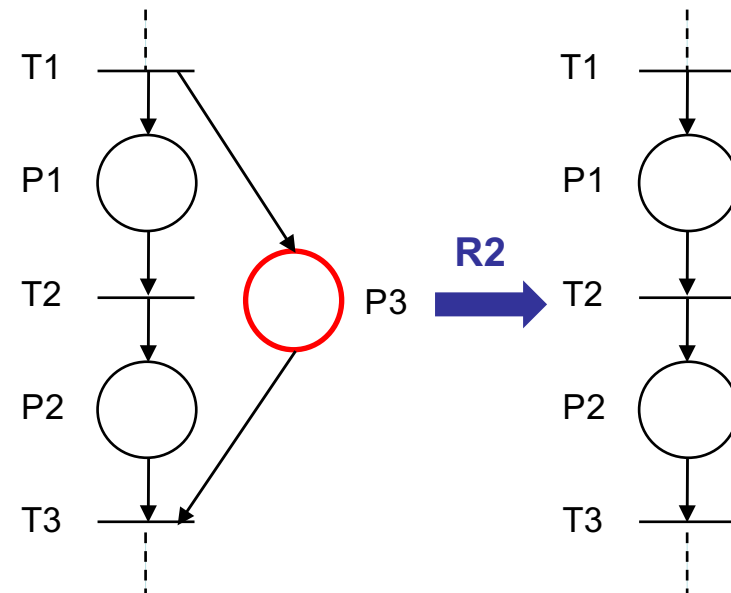
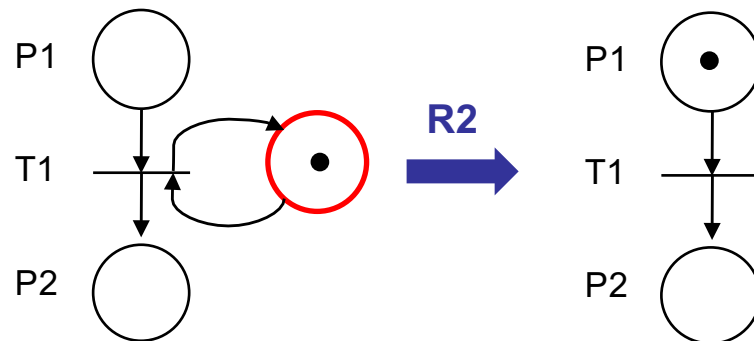
Borné, Sauf, Vivant, Quasi-vivant, Sans blocage, Etat d'accueil, Conservatif

ANALYSE DES PROPRIETES PAR REDUCTION DES RDP

REDUCTION R2 : PLACE IMPLICITE

Une place P_i est implicite si elle remplit les conditions suivantes :

- Le marquage de cette place n'est jamais un obstacle au franchissement de ses transitions de sortie (si T_j est une transition de sortie de P_i , quand $M(P_k) \geq \text{Pre}(P_k, T_j)$ pour toutes places P_k de ${}^{\circ}T_j$ autres que P_i , alors $M(P_i) \geq \text{Pre}(P_i, T_j)$) ;
- Son marquage peut se déduire du marquage des autres places



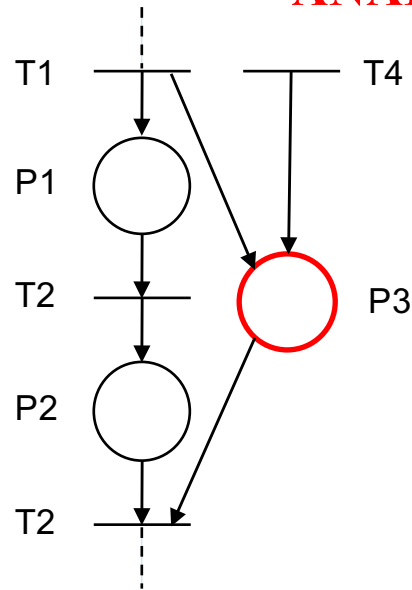
Propriétés conservées par la réduction R1

Borné, Vivant, Quasi-vivant, Sans blocage, Etat d'accueil, Conservatif

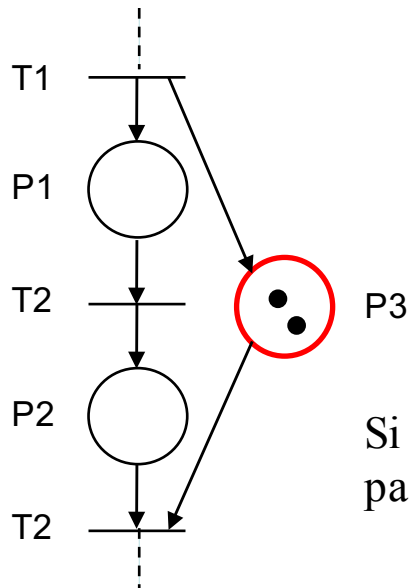
Réseaux de Petri



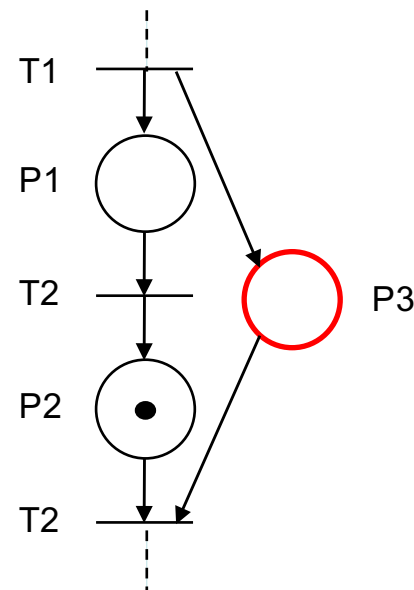
ANALYSE DES PROPRIETES PAR REDUCTION DES RDP



Condition 1 satisfaite mais pas la condition 2 (le marquage de P3 ne peut être déduit de P1 et P2 puisque T4 est une transition source)



Si le RdP est sauf après réduction, le RdP initial peut ne pas l'être



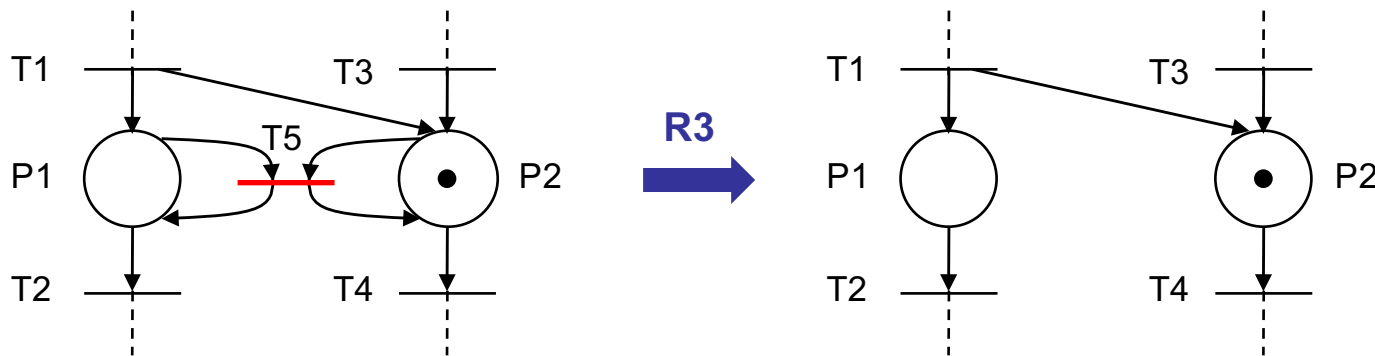
Condition 2 satisfaite mais pas la condition 1 (il n'y a pas de marque dans P3 alors que P2 contient une marque)

ANALYSE DES PROPRIETES PAR REDUCTION DES RDP

REDUCTION R3 : TRANSITION NEUTRE

Une transition T_j est neutre si et seulement si l'ensemble de ses places d'entrée est identique à l'ensemble de ses places de sortie, soit ${}^{\circ}T_j = T_j^{\circ}$.

On peut supprimer une transition neutre T_j et ses arcs entrants et sortants si et seulement s'il existe une transition $T_k \neq T_j$ telle que $\text{Post}(P_i, T_k) \geq \text{Pre}(P_i, T_j)$ pour toute place $P_i \in {}^{\circ}T_j$.



Propriétés conservées par la réduction R1

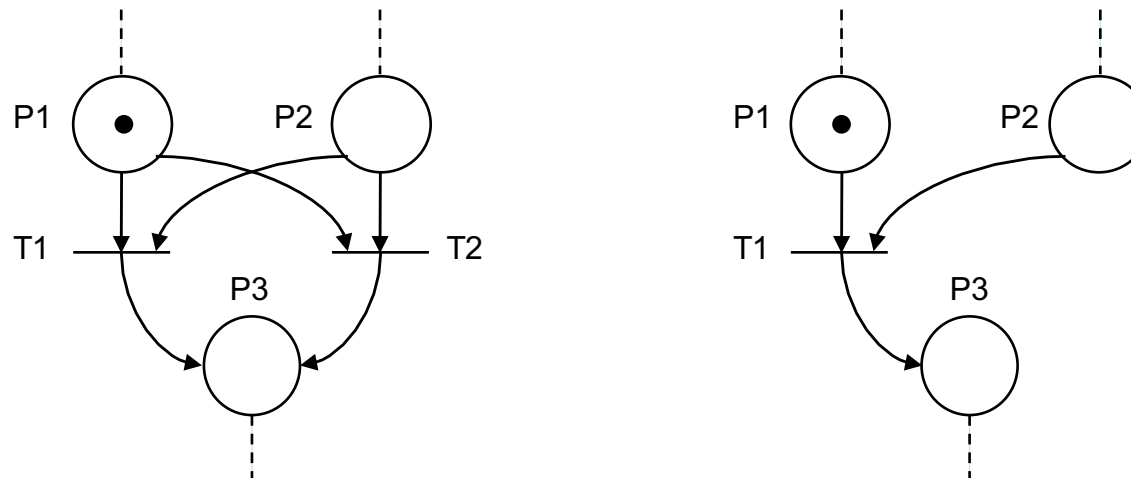
Borné, Sauf, Vivant, Quasi-vivant, Sans blocage, Etat d'accueil, Conservatif

ANALYSE DES PROPRIETES PAR REDUCTION DES RDP

REDUCTION R4 : TRANSITIONS IDENTIQUES

Deux transitions T_j et T_k sont identiques si et seulement si elles ont le même ensemble de places d'entrée et le même ensemble de places de sortie.

On peut alors **supprimer** l'une d'entre elles et les arcs correspondants.



Propriétés conservées par la réduction R1

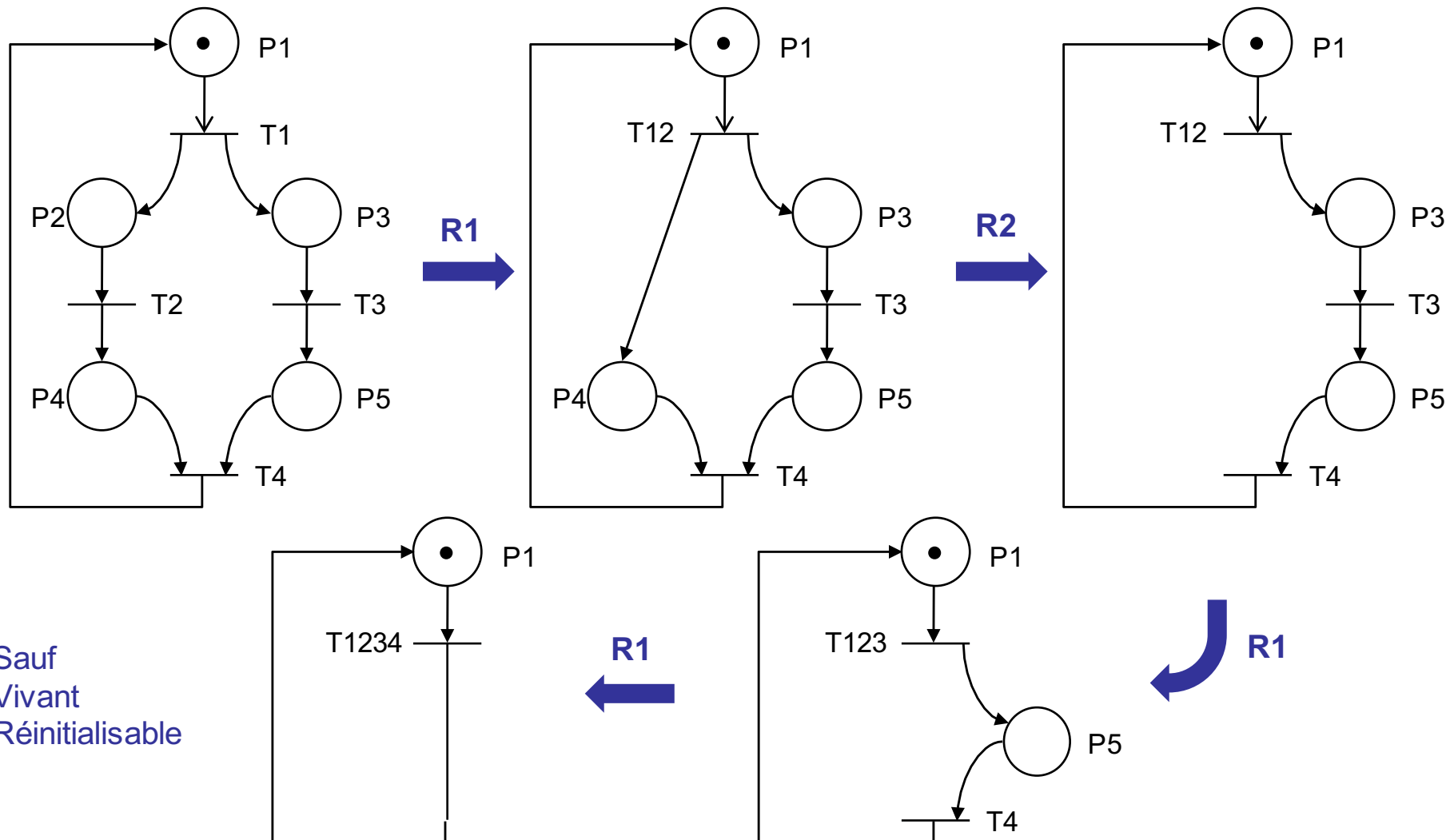
Borné, Sauf, Vivant, Quasi-vivant, Sans blocage, Etat d'accueil, Conservatif

Réseaux de Petri



ANALYSE DES PROPRIETES PAR REDUCTION DES RDP

EXEMPLE

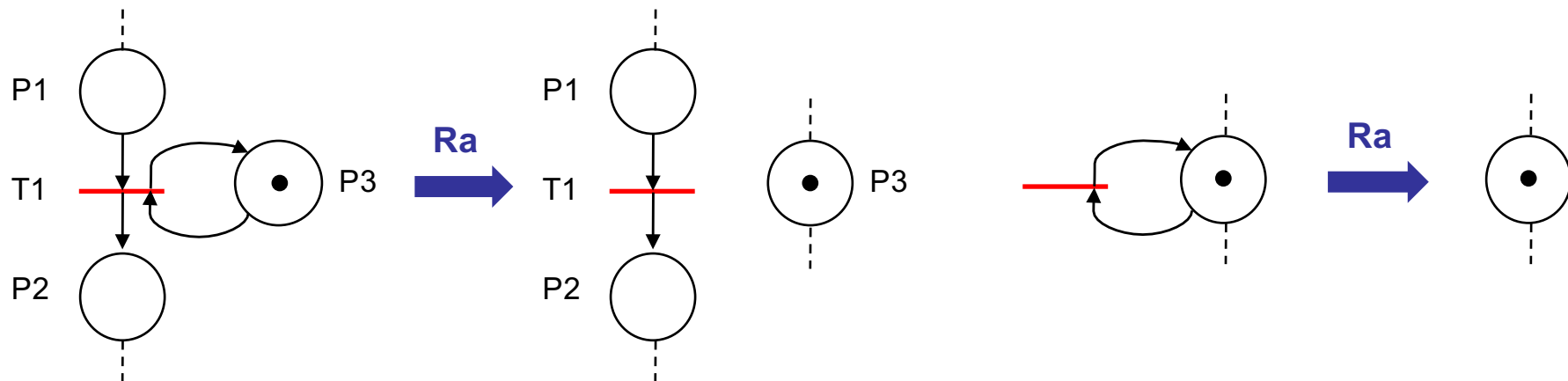


ANALYSE DES PROPRIETES PAR REDUCTION DES RDP *Réseau de Petri Ordinaire*

REDUCTION R_a : TRANSITION IMPURE

Soit une transition T_j impure (il existe au moins une place P_i et deux arcs $P_i \rightarrow T_j$ et $T_j \rightarrow P_i$)

1. Supprimer les arcs $P_i \rightarrow T_j$ et $T_j \rightarrow P_i$
2. Supprimer la transition T_j si elle est isolée



Réseaux de Petri



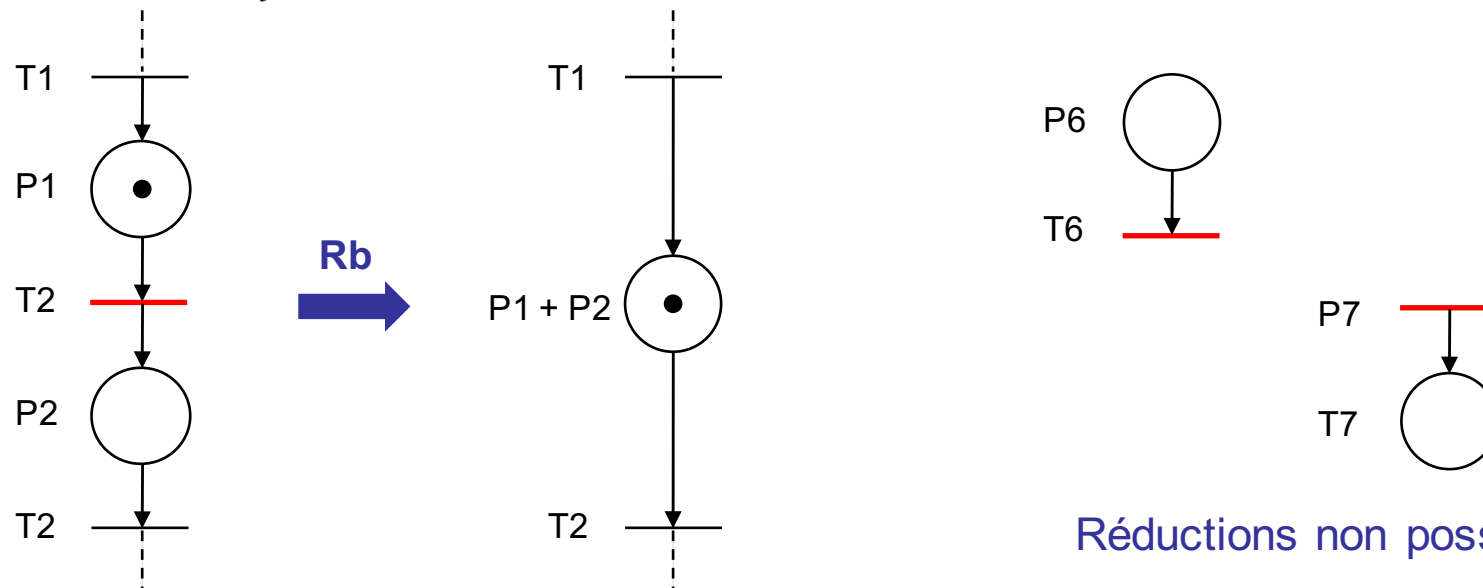
ANALYSE DES PROPRIETES PAR REDUCTION DES RDP

Réseau de Petri Ordinaire

REDUCTION Rb : TRANSITION PURE

La réduction relative à une transition T_j pure peut être faite si et seulement si T_j a au moins une place d'entrée et une place de sortie.

1. La transition T_j est supprimée
2. A tout couple (P_i, P_k) tel que $P_i \in {}^{\circ}T_j$ et $P_k \in T_j^{\circ}$, on associe une place $P_i + P_k$. Le nombre de marques dans $P_i + P_k$ est la somme des marques qui étaient initialement dans P_i et P_k .
3. Les transitions d'entrée de $P_i + P_k$ sont les transitions d'entrée de P_i et les transitions d'entrée de P_k à l'exception de T_j . Les transitions de sortie de $P_i + P_k$ sont les transitions de sortie de P_i à l'exception de T_j et les transitions de sortie de P_k .



Réductions non possibles

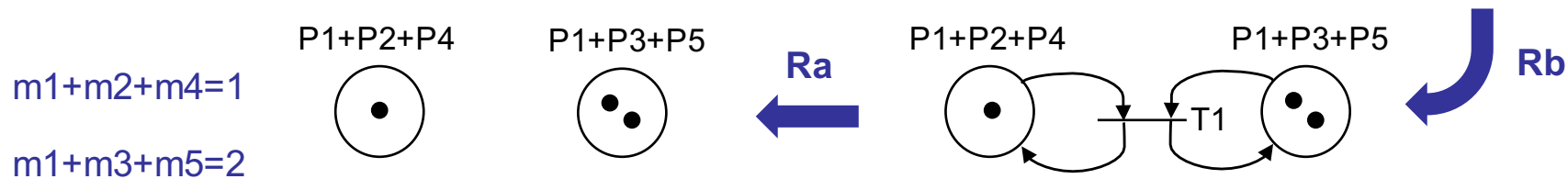
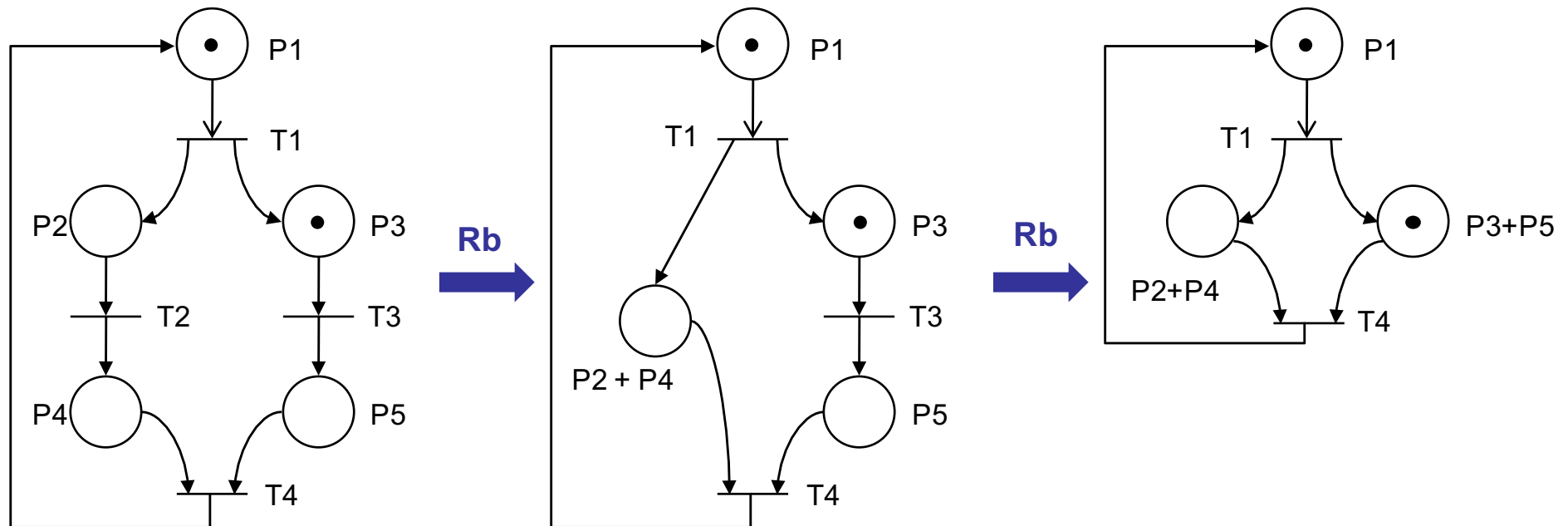
Réseaux de Petri



ANALYSE DES PROPRIETES PAR REDUCTION DES RDP

Réseau de Petri Ordinaire

EXEMPLE



$$m1+m2+m4=1$$

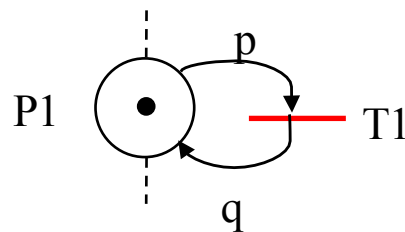
$$m1+m3+m5=2$$

ANALYSE DES PROPRIETES PAR REDUCTION DES RDP *Réseau de Petri Généralisé*

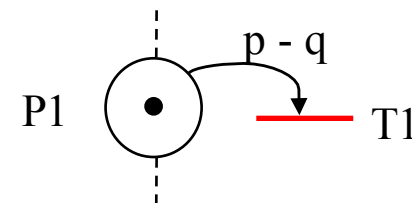
REDUCTION R'a : TRANSITION IMPURE

Soit une transition T_j impure et P_i une place telle que $P_i \rightarrow T_j$ a un poids p et $T_i \rightarrow P_j$ a un poids q .

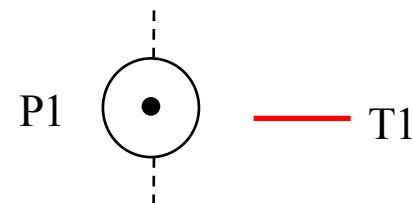
1. Si $p > q$, donner le poids $p - q$ à l'arc $P_i \rightarrow T_j$ et supprimer l'arc $T_i \rightarrow P_j$
Si $p = q$, supprimer les deux arcs $P_i \rightarrow T_j$ et $T_i \rightarrow P_j$
Si $p < q$, donner le poids $q - p$ à l'arc $T_i \rightarrow P_j$ et supprimer l'arc $P_i \rightarrow T_j$
2. Supprimer la transition T_j si elle est isolée



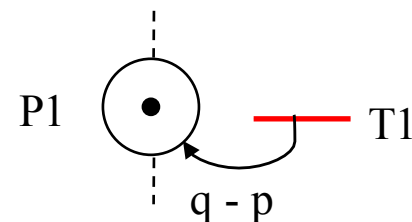
R'a
→



Si $p > q$



Si $p = q$



Si $p < q$

Réseaux de Petri



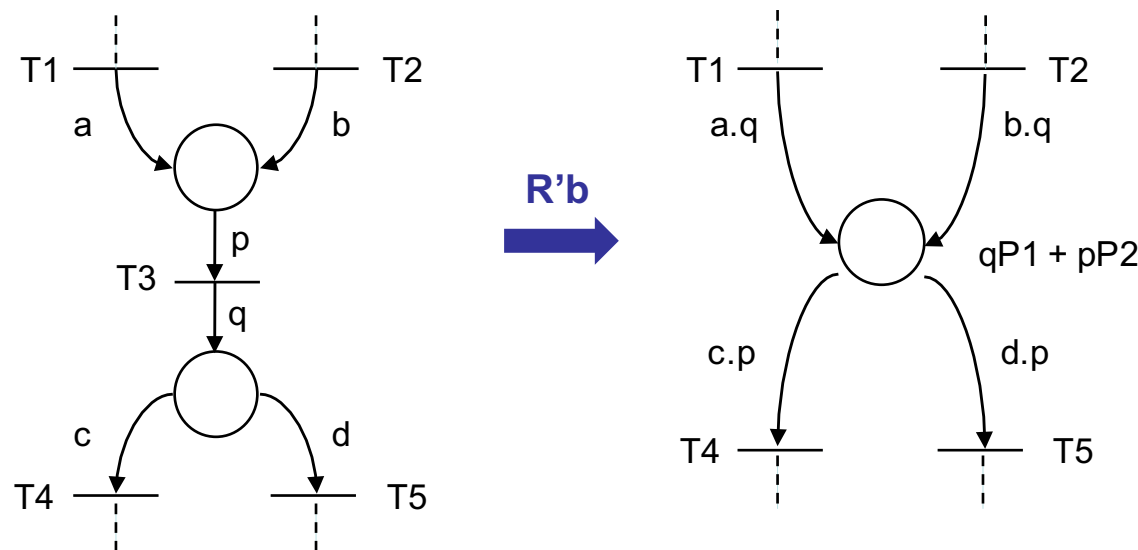
ANALYSE DES PROPRIETES PAR REDUCTION DES RDP

Réseau de Petri Généralisé

REDUCTION R'b : TRANSITION PURE

La réduction relative à une transition T_j pure peut être faite si et seulement si T_j a au moins une place d'entrée et une place de sortie.

1. La transition T_j est supprimée
2. A tout couple (P_i, P_k) tel que $P_i \in {}^{\circ}T_j$ et $P_k \in T_j^{\circ}$, et $P_i \rightarrow T_j$ a un poids p et $T_j \rightarrow P_k$ a un poids q , on associe une place $qP_i + pP_k$. Le nombre de marques dans $P_i + P_k$ est la somme des marques qui étaient initialement dans P_i multipliée par q et des marques qui étaient initialement dans P_k multipliée par p .
3. Les transitions d'entrée de P_i (à l'exception de T_j) deviennent les transitions d'entrée de $qP_i + pP_k$ avec un poids qui est multiplié par q . les transitions d'entrée de P_k à l'exception de T_j . Les transitions d'entrée et de sortie de P_k (à l'exception de T_j) deviennent les transitions d'entrée de $qP_i + pP_k$ avec un poids qui est multiplié par p .



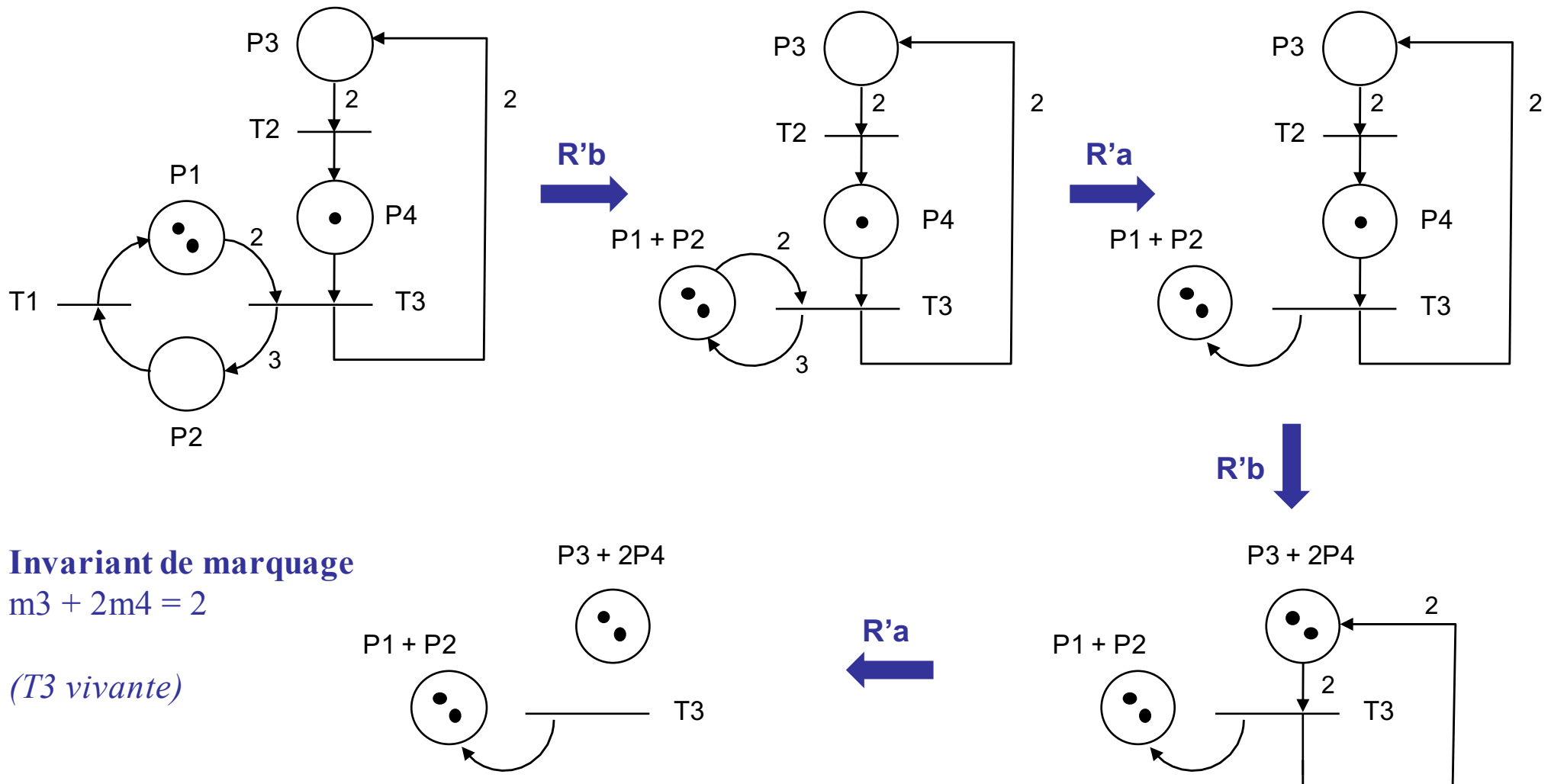
Réseaux de Petri



ANALYSE DES PROPRIETES PAR REDUCTION DES RDP

Réseau de Petri Généralisé

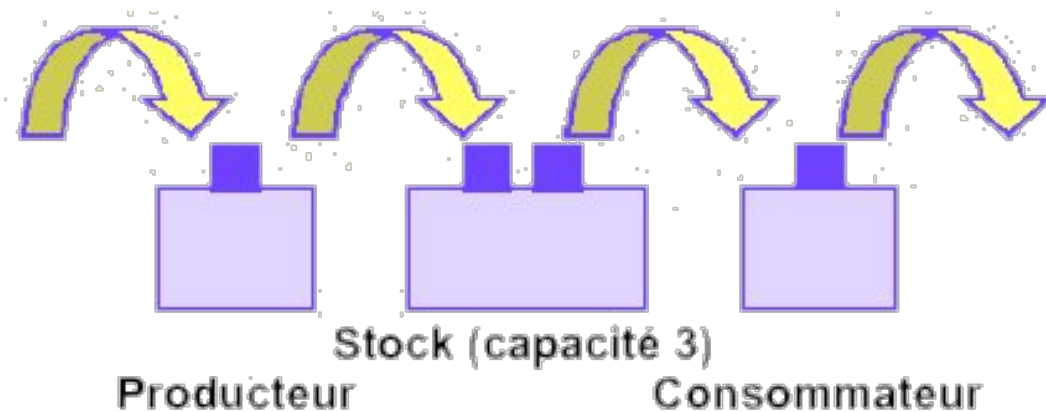
EXEMPLE



Réseaux de Petri

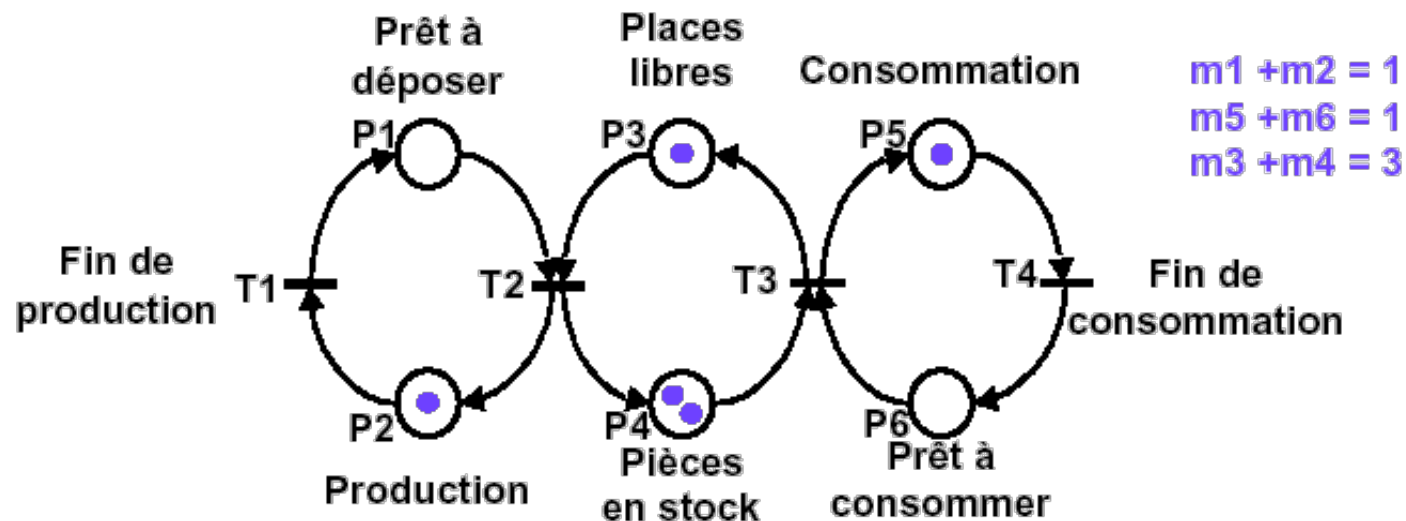


EXEMPLE D'APPLICATION DES RDP AUTONOMES



Hypothèses :

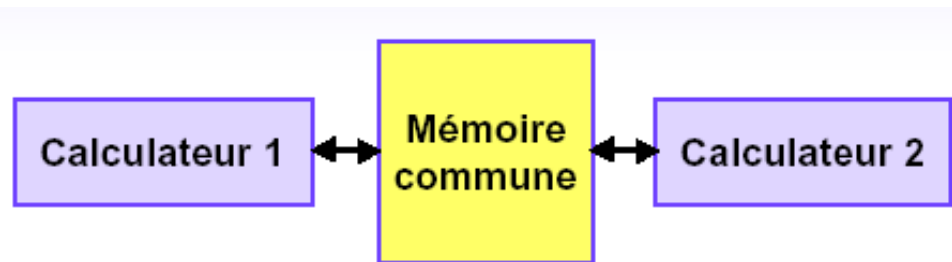
- pas de rupture de stock amont
- pas de blocage de flux aval



Réseaux de Petri

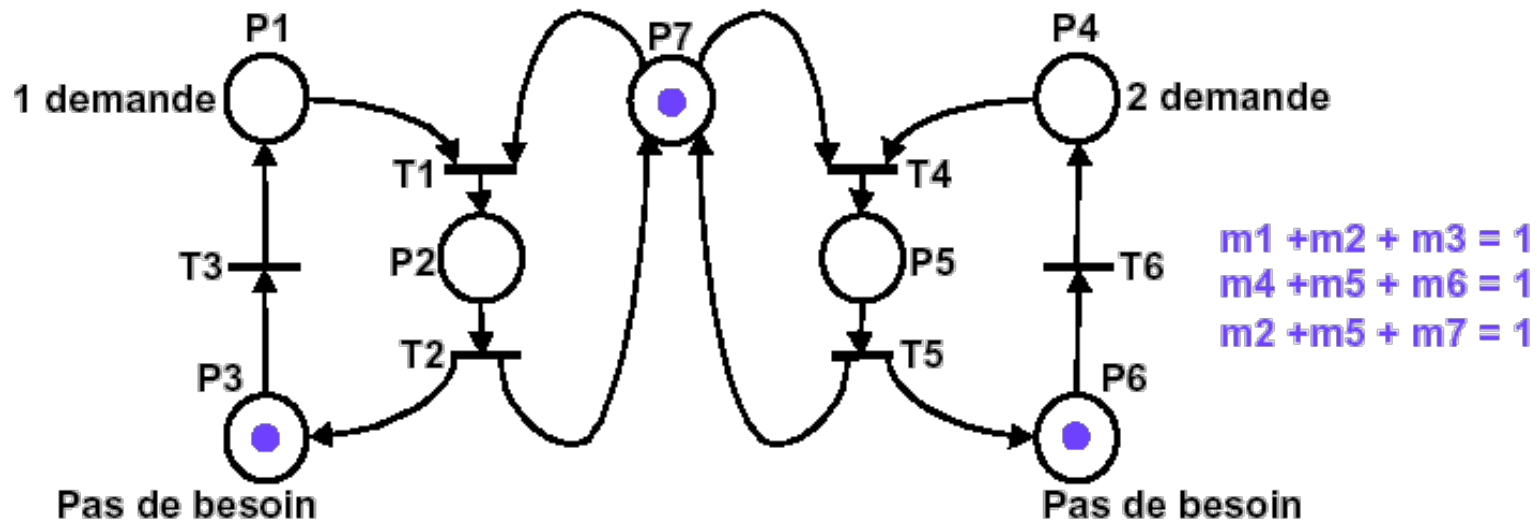


EXEMPLE D'APPLICATION DES RDP AUTONOMES



Chaque calculateur a 3 états :

- pas besoin de mémoire
- demande de la mémoire mais ne l'utilise pas encore
- utilise la mémoire





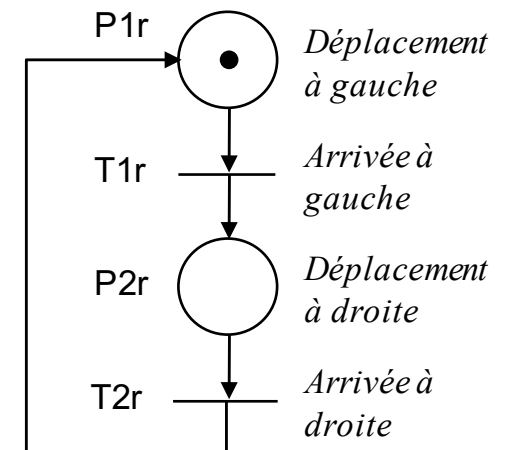
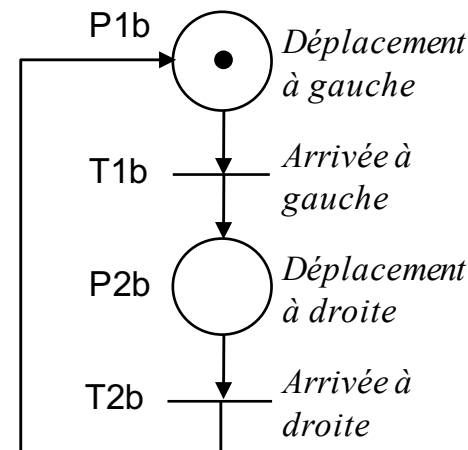
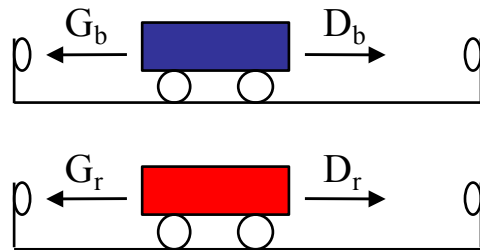
RESEAUX DE PETRI COLORES

Réseaux de Petri colorés



APPROCHE INTUITIVE

2 chariots identiques (rouge, bleu)

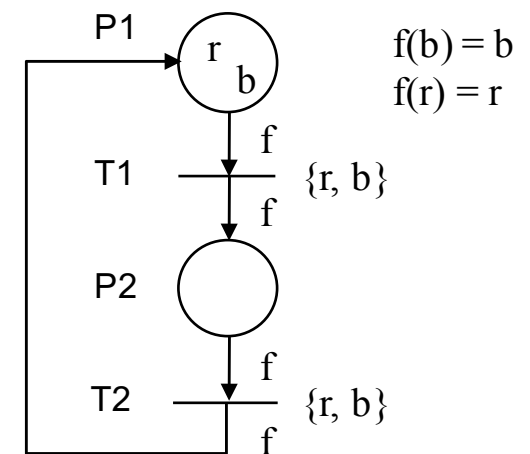


Les deux RdP sont identiques, peut-on les fusionner ?

Le **jeton** devient **porteur d'information** (pour pouvoir distinguer le chariot bleu du chariot jaune). On associe une couleur à chaque marque (r pour le chariot rouge et b pour le chariot bleu).

Les transitions peuvent alors être **validées pour chaque couleur** (T1 peut être validée pour r et b).

Une **fonction** est associée à chaque arc pour décrire, lors du franchissement d'une transition, la relation qu'il y a entre les couleurs associées à cette transition et les couleurs associées aux places amonts et aval. Ici, la fonction f est la fonction Identité (aucune transformations de couleurs) et est notée **Id**.

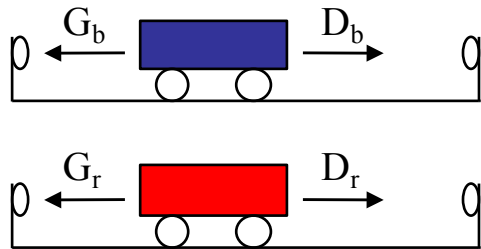


Réseaux de Petri colorés



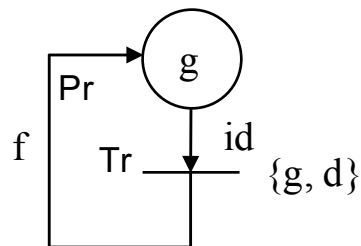
APPROCHE INTUITIVE

2 chariots identiques (rouge, bleu)



On peut également observer une similitude dans le déplacement des chariots. Lorsqu'un chariot arrive à une extrémité, il repart dans l'autre sens. Peut-on représenter les deux mouvements par la même place ?

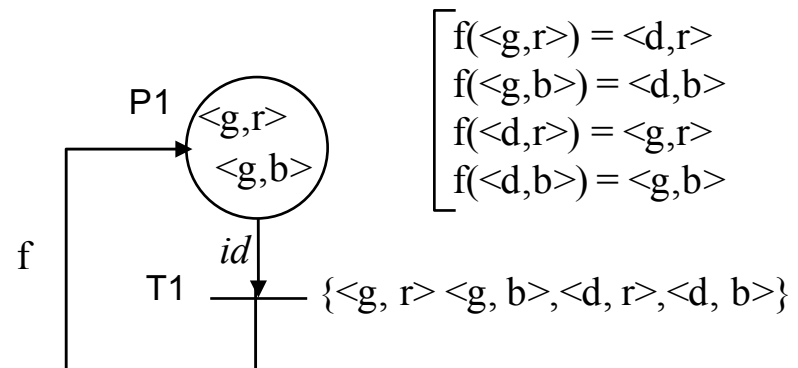
$$\begin{aligned} f(g) &= d \\ f(d) &= g \end{aligned}$$



Les couleurs g et d associées à la place Pr représente respectivement un mouvement vers la gauche et un mouvement vers la droite.

Le franchissement de Tr par rapport à la couleur g consiste à retirer une marque g dans la place Pr et à ajouter une marque d dans cette même place Pr.

En combinant les couleurs simples $\{r, b\}$ et $\{d, g\}$, on peut définir des couleurs complexes qui décrivent l'ensemble du comportement des deux chariots par le RdP ci-contre.



$$\begin{cases} f(<g, r>) = <d, r> \\ f(<g, b>) = <d, b> \\ f(<d, r>) = <g, r> \\ f(<d, b>) = <g, b> \end{cases}$$

Réseaux de Petri colorés



DEFINITION

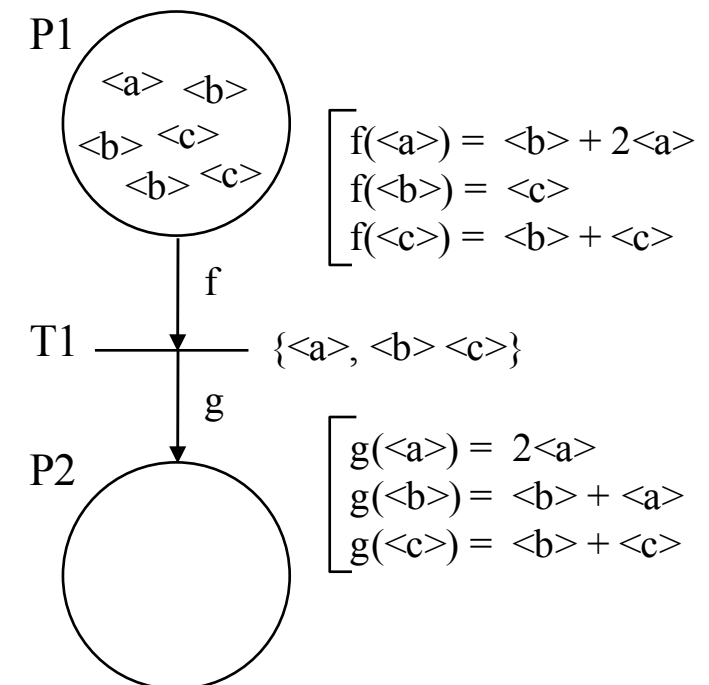
Un **RdP coloré** est un sextuplet $Q = (P, T, \text{Pré}, \text{Post}, M_0, C)$ où :

$C = \{C_1, C_2, \dots\}$ est l'ensemble des couleurs. Une couleur $C_k = \langle C_{k1}, C_{k2}, \dots, C_{kn} \rangle$ pourra être notée soit globalement, soit par le n-uplet qui la définit.

$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ est un ensemble fini non vide de Places. Les places peuvent **contenir des marques colorées**, plusieurs marques de la même couleur peuvent se trouver dans la même place.

$T = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ est un ensemble fini non vide de Transitions. **A chaque transition est associée un ensemble de couleurs**, chacune de ces couleurs indiquant une possibilité distincte de franchissement.

Pré et Post : fonctions relatives aux **couleurs de franchissement** qui définissent le poids des arcs. Elles établissent la correspondance entre chaque couleur de la transition et les couleurs de la place amont (PRE) et de la place avale (POST). Par rapport aux RdPG, les fonctions Pré et Post auront un argument supplémentaire qui est la couleur C_k : $\text{Pré}(P_i, T_j/C_k)$ et $\text{Post}(P_i, T_j/C_k)$



Réseaux de Petri colorés



FRANCHISSEMENT D'UNE TRANSITION

Validation de la transition

Soit $C(T_j)$ l'ensemble des couleurs associées à la transition T_j . Cette transition peut être franchie par une quelconque de ces couleurs. Soit C_k une couleur de $C(T_j)$ et M un marquage courant du RdP coloré. La transition T_j est **validée** par rapport à C_k pour le marquage M si et seulement si :

$$\forall P_i \in {}^oT_j \quad M(P_i) \geq \text{Pré}(P_i, T_j/C_k)$$

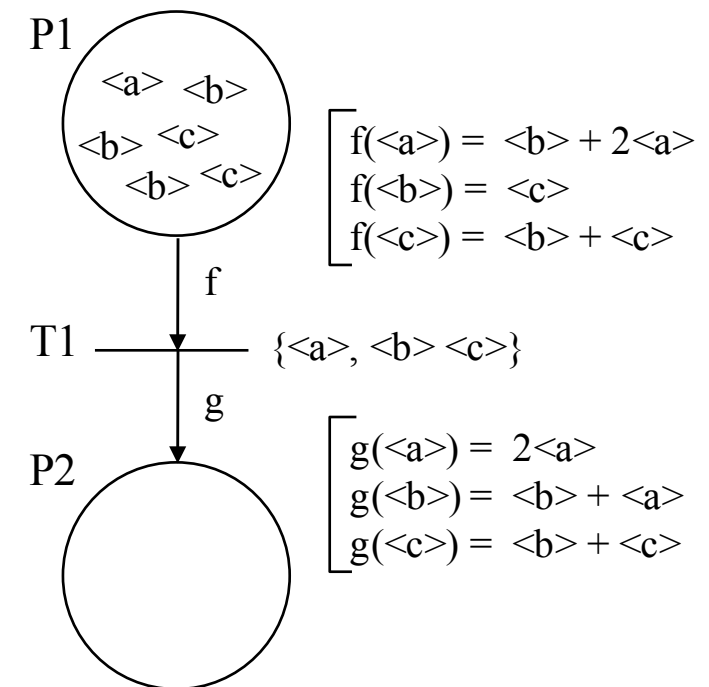
$$\text{Exemple : } \text{Pré}(P1, T1/<c>) = f(<c>) = + <c>$$

Franchissement de la transition

Une transition T_j validée pour une couleur C_k peut être franchie. Son franchissement, noté T_j / C_k consiste à :

- retrancher à toute place P_i en amont de T_j une quantité de marque égale à $\text{Pré}(P_i, T_j/C_k)$,
- ajouter à toute place P_i en aval de T_j une quantité de marque égale à $\text{Post}(P_i, T_j/C_k)$

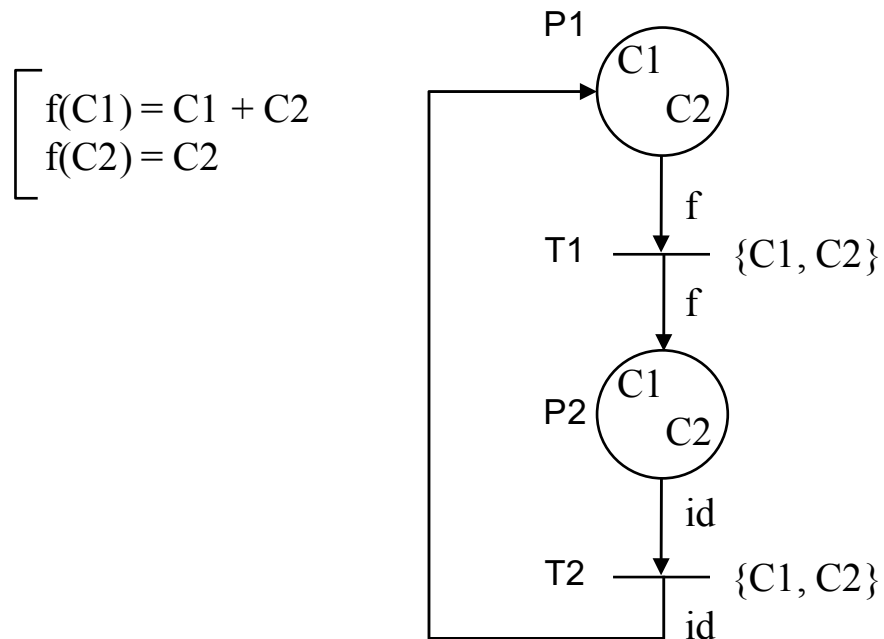
$$\forall P_i \quad M'(P_i) = M(P_i) + \text{Post}(P_i, T_j/C_k) - \text{Pré}(P_i, T_j/C_k)$$



Réseaux de Petri colorés



EXEMPLE: SEQUENCE DE FRANCHISSEMENT



Franchissement de T1/C1

Franchissement de T2/C1

Franchissement de T2/C2

Réseaux de Petri colorés



FONCTIONS USUELLES

	Fonction	Définition	Commentaire
couleur quelconque	id	$\text{id}(\langle c_i \rangle) = \langle c_i \rangle$	identité
	déc	$\text{déc}(\langle c_i \rangle) = \langle \bullet \rangle$	décoloration
couleur simple	succ	$\text{succ}(\langle c_i \rangle) = \langle c_{i+1} \rangle$	successeur (incrémentation)
	préc	$\text{préc}(\langle c_i \rangle) = \langle c_{i-1} \rangle$	précédent (décrémentation)
couleur complexe	succ1	$\text{succ1}(\langle c_i, c_j \rangle) = \langle c_{i+1}, c_j \rangle$	incrémentation d'une des composantes
	succ2	$\text{succ2}(\langle c_i, c_j \rangle) = \langle c_i, c_{j+1} \rangle$	
	proj1	$\text{proj1}(\langle c_i, c_j \rangle) = \langle c_j \rangle$	suppression d'une ou plusieurs composantes
	proj2	$\text{proj2}(\langle c_i, c_j \rangle) = \langle c_i \rangle$	

Réseaux de Petri colorés

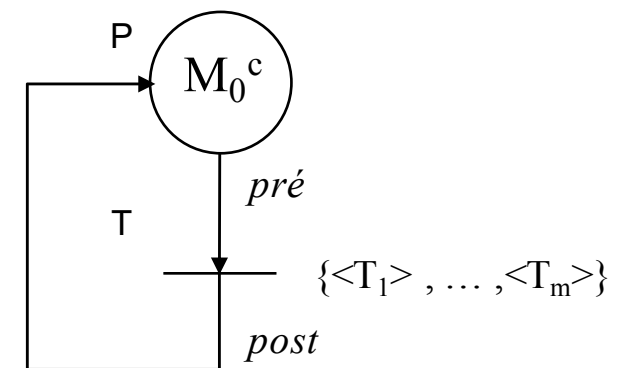


EQUIVALENCE AVEC UN RDP NON COLORE

Un RdP coloré peut être transformé en un RdP ordinaire par une opération de *dépliage*. L'opération inverse est une opération de *pliage*.

Considérons un RdP ordinaire R ayant n places et m transitions. Dans le réseau coloré ne contenant qu'une place et une transition:

- la place P résulte de la fusion des places P_i de R,
- la transition T résulte de la fusion des transitions T_i de R,
- l'ensemble des couleurs associées à la place P est l'ensemble des places P_i , soit $C(P) = \{ \langle P_1 \rangle, \dots, \langle P_n \rangle \}$,
- l'ensemble des couleurs associées à la transition T est l'ensemble des transitions T_i , soit $C(T) = \{ \langle T_1 \rangle, \dots, \langle T_m \rangle \}$
- le poids de l'arc en amont de T correspond à la fonction Pré de R
- le poids de l'arc en aval de T correspond à la fonction Post de R
- le marquage initial correspond à la somme de toutes les marques, chaque marque d'une place P_i correspondant à une marque de couleur $\langle P_i \rangle$ dans le RdP coloré.



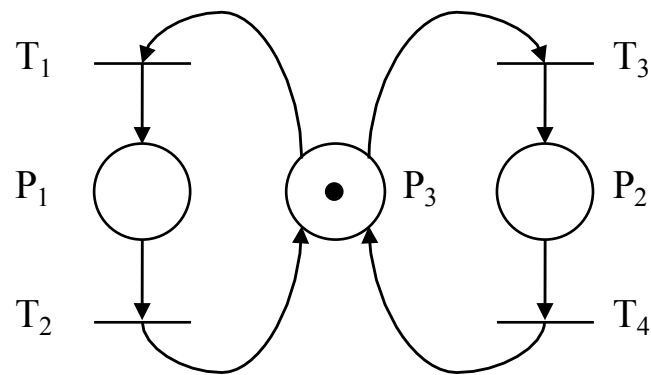
$$\begin{aligned}\text{Pré}(P, T/\langle T_j \rangle) &= \text{Pré}(P_1, T_j) \langle P_1 \rangle + \dots + \text{Pré}(P_n, T_j) \langle P_n \rangle \\ \text{Post}(P, T/\langle T_j \rangle) &= \text{Post}(P_1, T_j) \langle P_1 \rangle + \dots + \text{Post}(P_n, T_j) \langle P_n \rangle \\ M_0^c &= M_0(P_1) \langle P_1 \rangle + \dots + M_0(P_n) \langle P_n \rangle\end{aligned}$$

Réseaux de Petri colorés



EQUIVALENCE AVEC UN RDP NON COLORE

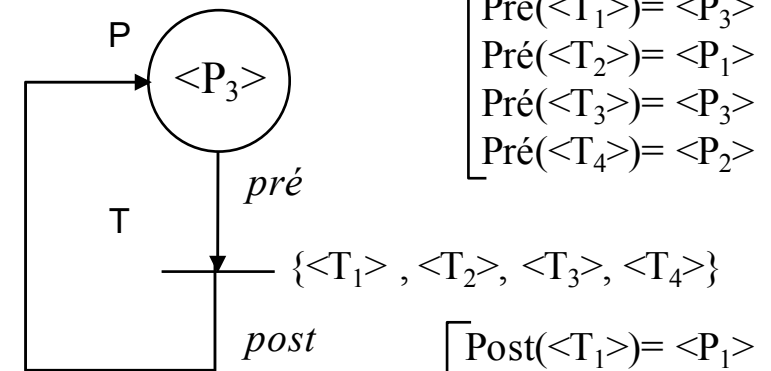
Exemple 1



PLIAGE



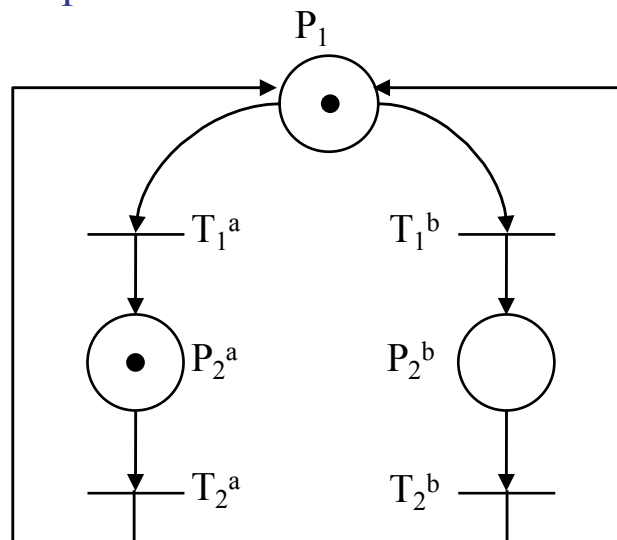
DEPLIAGE



$$\begin{cases} \text{Pré}(\langle T_1 \rangle) = \langle P_3 \rangle \\ \text{Pré}(\langle T_2 \rangle) = \langle P_1 \rangle \\ \text{Pré}(\langle T_3 \rangle) = \langle P_3 \rangle \\ \text{Pré}(\langle T_4 \rangle) = \langle P_2 \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Post}(\langle T_1 \rangle) = \langle P_1 \rangle \\ \text{Post}(\langle T_2 \rangle) = \langle P_3 \rangle \\ \text{Post}(\langle T_3 \rangle) = \langle P_2 \rangle \\ \text{Post}(\langle T_4 \rangle) = \langle P_3 \rangle \end{cases}$$

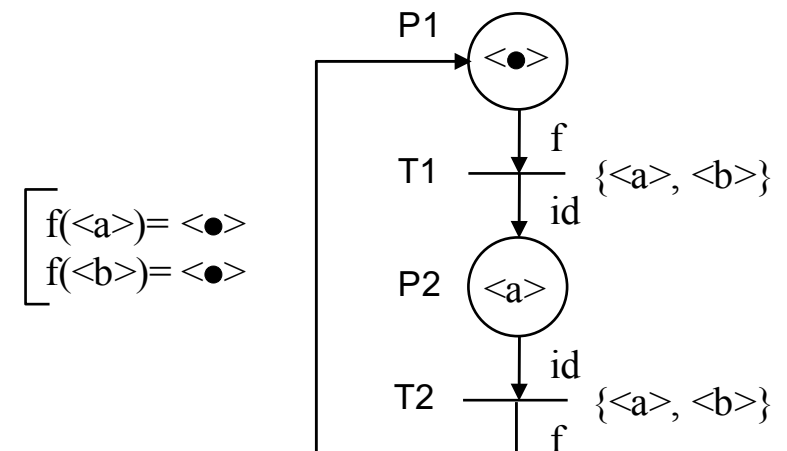
Exemple 2



PLIAGE



DEPLIAGE



$$\begin{cases} f(\langle a \rangle) = \langle \bullet \rangle \\ f(\langle b \rangle) = \langle \bullet \rangle \end{cases}$$

Réseaux de Petri colorés



PROPRIETES

Un RdP coloré est une transformation d'un RdP ordinaire ou généralisé par une opération de pliage. Il s'ensuit que les propriétés d'un RdP coloré sont les mêmes que celles d'un RdP non colorés mais peuvent se présenter de manière différente.

BORNITUDE

Un RdP coloré est **borné** si, pour tout marquage accessible, toute place contient un nombre fini de marques. On peut interpréter la notion de « sauf » en définissant un RdP coloré **sauf** comme un RdP tel que, pour tout marquage et pour toute place, on a, au maximum, une marque de chaque couleur.

VIVACITE

Un RdP coloré est **vivant** si son RdP déplié est vivant, donc si pour tout marquage accessible, il reste possible de franchir n'importe quelle transition par rapport à n'importe laquelle de ses couleurs de franchissement.

CONFLIT

Dans un RdP non coloré, il y a **conflit** structurel entre deux transitions T_1 et T_2 s'il existe une place d'entrée P_i commune à T_1 et T_2 .

Dans un RdP coloré, le conflit porte sur **deux couples (transition, couleur)**

- le conflit peut porter sur la même transition avec deux couleurs différentes ($C_k \neq C_h$),
- le conflit peut porter sur la même couleur avec deux transition différentes ($T_i \neq T_j$).

Réseaux de Petri colorés



EQUATION FONDAMENTALE

MARQUAGE

C'est un vecteur dont chaque composante est une somme pondérée de jetons colorés

$$M_0 = \begin{pmatrix} \langle \bullet \rangle \\ \langle a \rangle \end{pmatrix}$$

MATRICE D'INCIDENCE

L'élément (i, j) de la matrice d'incidence est égal à la différence des deux fonctions
 $\text{Post}(P_i, T_j) - \text{Pré}(P_i, T_j)$

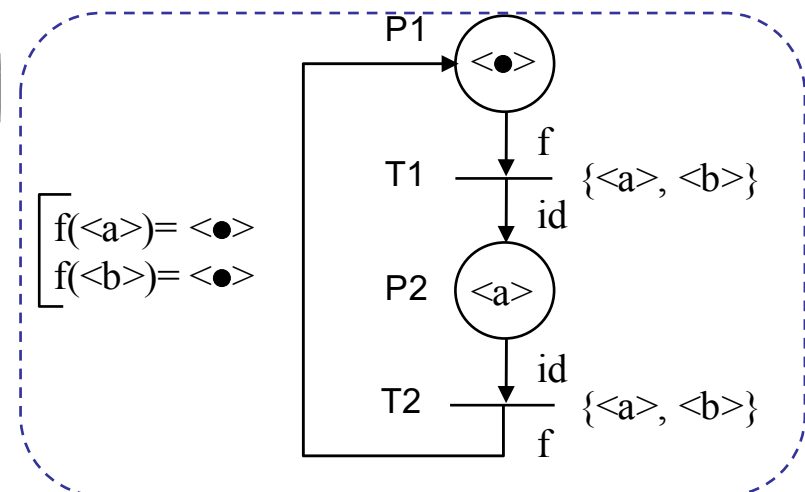
$$W = \begin{pmatrix} T1 & T2 \\ -f & +f \\ +id & -id \end{pmatrix} \begin{matrix} P1 \\ P2 \end{matrix}$$

FRANCHISSEMENT

Le franchissement d'une transition est toujours réalisé par rapport à une couleur. La séquence de franchissement $S = T1/\langle a \rangle \ T2/\langle a \rangle \ T1/\langle b \rangle \ T2/\langle a \rangle$ peut être représentée par le vecteur caractéristique S.

$$S = \begin{pmatrix} \langle a \rangle + \langle b \rangle \\ 2 \langle a \rangle \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_k &= M_i + W.S = \begin{pmatrix} \langle \bullet \rangle \\ \langle a \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f & +f \\ +id & -id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a \rangle + \langle b \rangle \\ 2 \langle a \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \bullet \rangle \\ \langle a \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f(\langle a \rangle) - f(\langle b \rangle) + 2f(\langle a \rangle) \\ \langle a \rangle + \langle b \rangle - 2 \langle a \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \bullet \rangle \\ \langle a \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\langle \bullet \rangle - \langle \bullet \rangle + 2(\langle \bullet \rangle) \\ \langle b \rangle - \langle a \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \bullet \rangle \\ \langle b \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Réseaux de Petri colorés



PROPRIETES

INVARIANT DE MARQUAGE

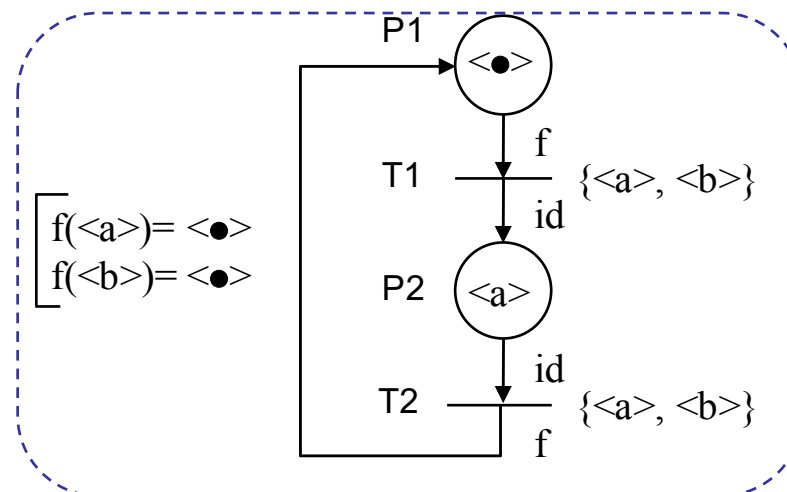
Dans un RdP non coloré, le semi-flot F qui vérifie l'équation $F^T.W=0$ est un **vecteur d'entiers naturels** (coefficients de pondération des marquages des places).

Dans un RdP coloré, les **composantes du semi-flot F sont des fonctions** car W est une matrice de fonctions.

$$\text{Semi-flot } F^T = (\text{id}, f) \quad F^T.W = (\text{id} \quad f) \begin{pmatrix} -f & +f \\ +\text{id} & -\text{id} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit un invariant de marquage donné par la relation $F^T.M = F^T.M_0$

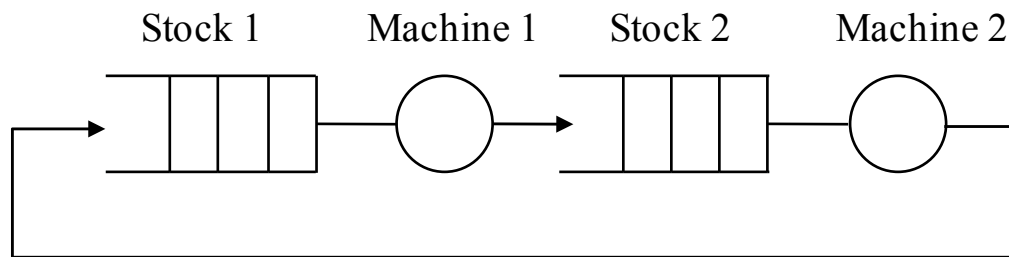
$$M(P1) + f[M(P2)] = (\text{id} \quad f) \begin{pmatrix} \langle \bullet \rangle \\ \langle a \rangle \end{pmatrix} = \text{id}(\langle \bullet \rangle) + f(\langle a \rangle) = 2. \langle \bullet \rangle$$



Réseaux de Petri colorés



EXEMPLE n°1



- Deux types de pièces p1 et p2 passant dans le même ordre sur les deux machines.
- Ordonnancement : envoi alternatif des deux types de pièces p1, p2, p1, p2, ...
- n1 pièces de type p1
- n2 pièces de type p2

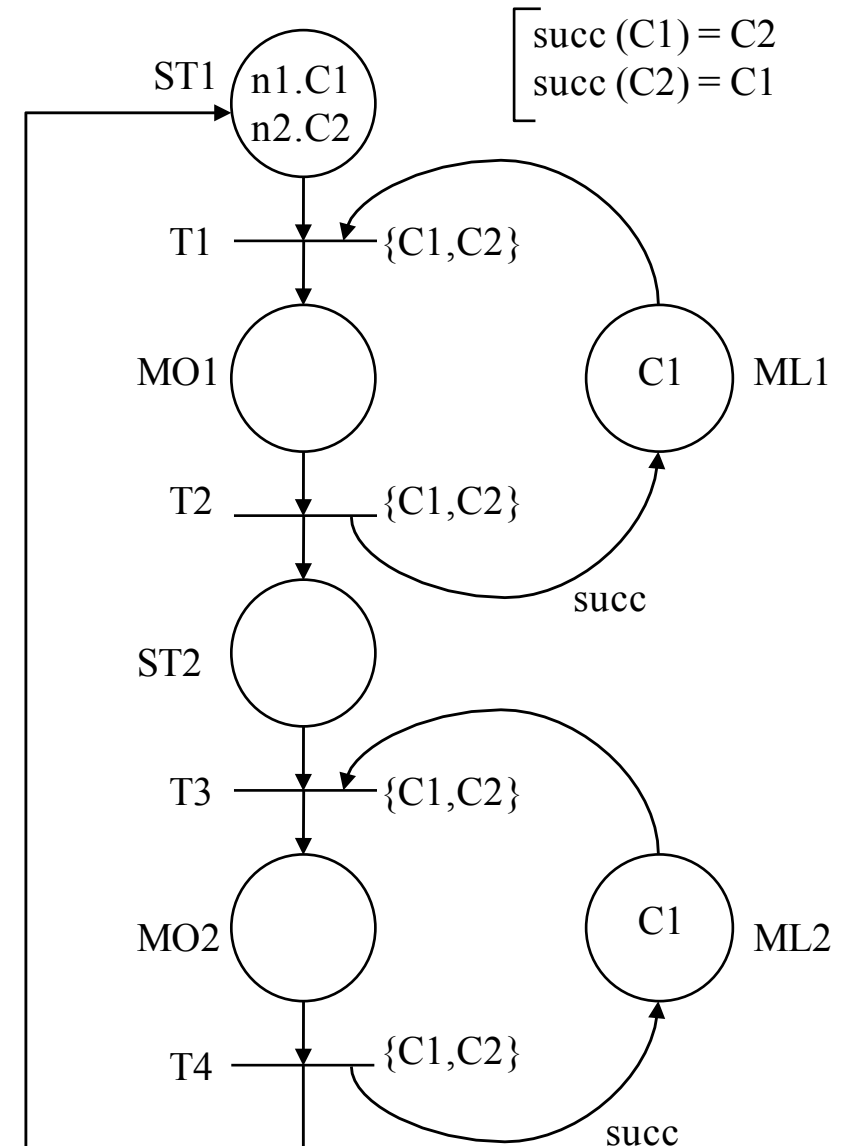
1) Coloration par rapport au type de pièce ?

Couleurs : C1 (pièce de type p1), C2 (pièce de type p2)

ST_i : stock i

MO_i : machine i occupée

ML_i : machine i libre



Réseaux de Petri colorés

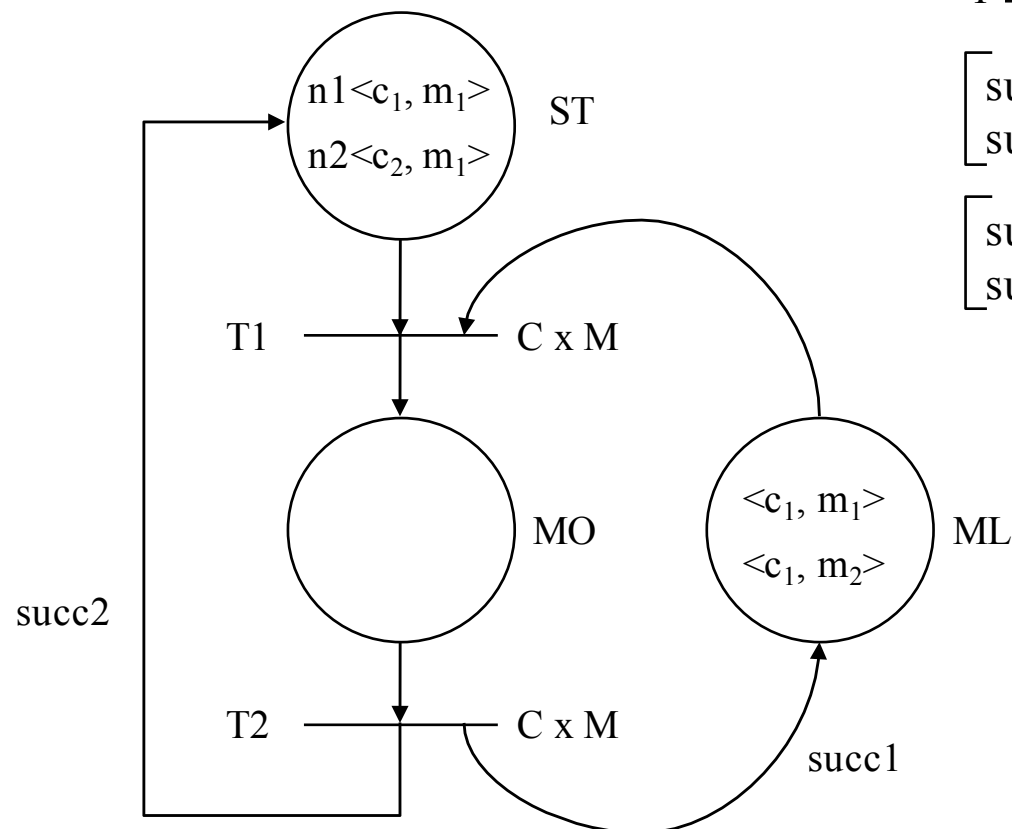


EXEMPLE n°1

2) Ajout d'une coloration par rapport aux machines ?

Couleur complexe : $C \times M = \{ \langle c_i, m_j \rangle \}$ avec i nombre de types de pièce et j nombre de machines

$$1 \leq i \leq 2 ; 1 \leq j \leq 2$$



$$\begin{cases} succ1(\langle c_1, m_j \rangle) = \langle c_2, m_j \rangle \\ succ1(\langle c_2, m_j \rangle) = \langle c_1, m_j \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} succ2(\langle c_i, m_1 \rangle) = \langle c_i, m_2 \rangle \\ succ2(\langle c_i, m_2 \rangle) = \langle c_i, m_1 \rangle \end{cases}$$

Réseaux de Petri colorés



AVANTAGES ET LIMITES

Modélisation

Représentation compacte de systèmes complexes

Analyse des propriétés

La construction du graphe de marquage est possible mais atteint une taille importante : utilisation d'outils pour la génération et l'analyse du graphe de marquage (exemple : CPNTool)

Les méthodes de réduction nécessitent des contraintes très fortes sur les fonctions du RdP coloré : peu applicable en pratique.

Utilisation de l'algèbre linéaire possible mais assez compliquée: recherche de propriétés difficile, vérification de propriétés possibles.

Simulation (CPNTool)



RESEAUX DE PETRI NON AUTONOMES

Réseaux de Petri



RDP NON AUTONOMES

Ils décrivent non seulement un **comportement**, mais de plus ils précisent **quand** se font les évolutions. Ils permettent donc une **modélisation quantitative**. Ils peuvent être **ordinaires** ou **généralisés**.

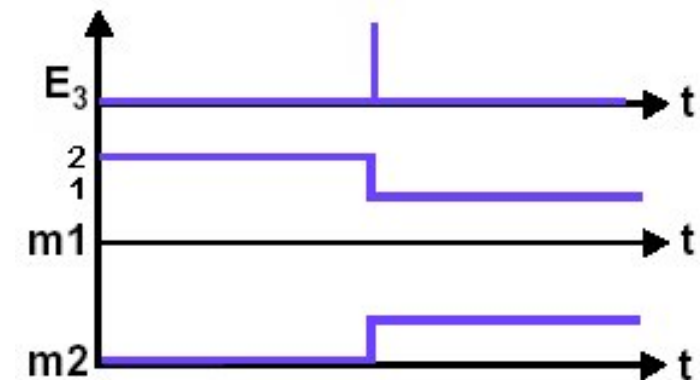
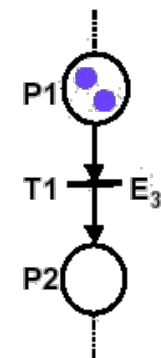
Les RdP Synchronisés (RdPS)

Dans un RdPS, un événement est associé à chaque transition. Une transition est franchie si elle est validée (toutes les places amont ont un jeton au moins), quand l'événement associé se produit.

- transition validée
- transition receptive

Un RdPS est un triplet $\{R, E, \text{Sync}\}$ tel que

- R est un RdP marqué
- E est un ensemble d'événements externes
- Sync est une application $T \rightarrow E \cup \{e\}$ où e est l'événement toujours occurrent

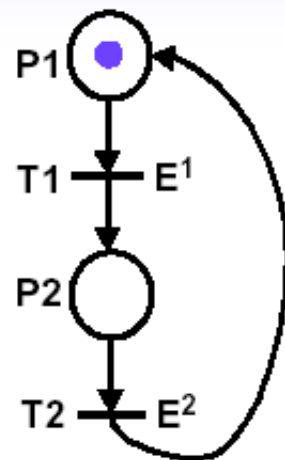


Réseaux de Petri

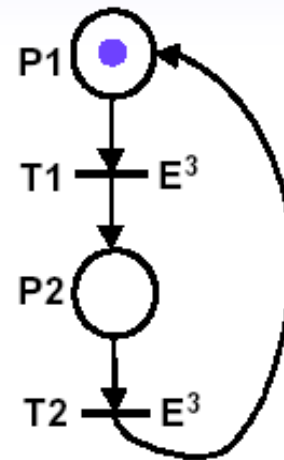


RDP NON AUTONOMES

Les RdP Synchronisés (suite)

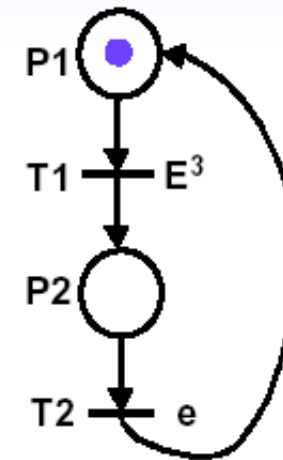


$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{T1/E^1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T2/E^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

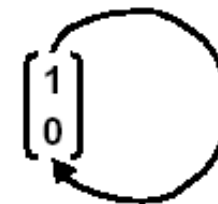


$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{T1/E^3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T2/E^3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Franchissement unique



T1 T2/E³



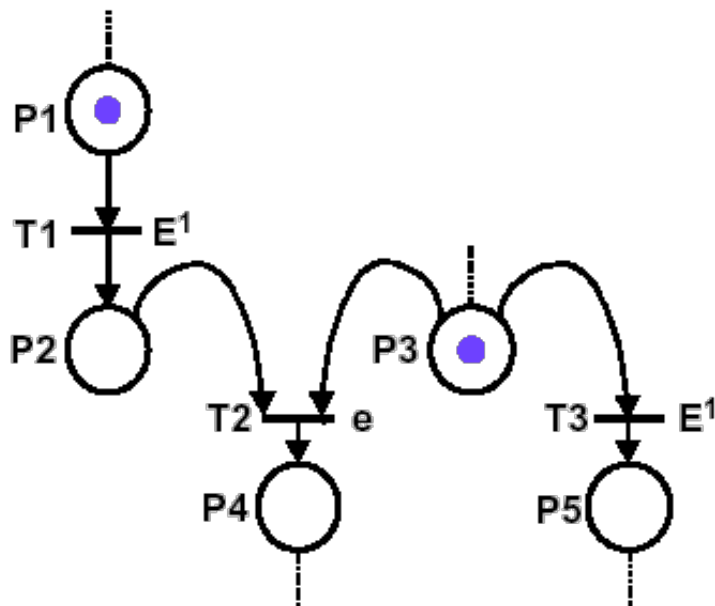
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un marquage instable

Réseaux de Petri



RDP NON AUTONOMES

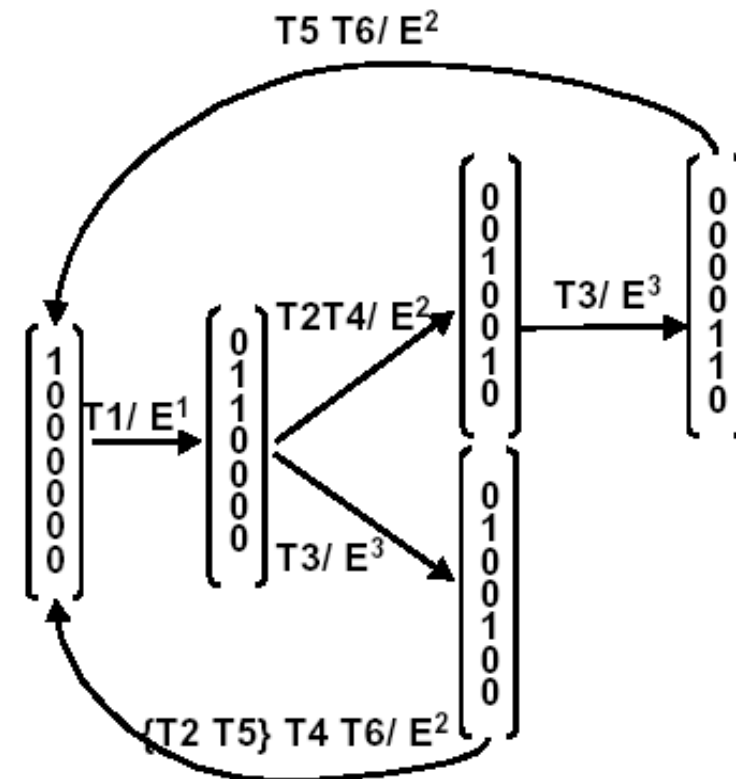
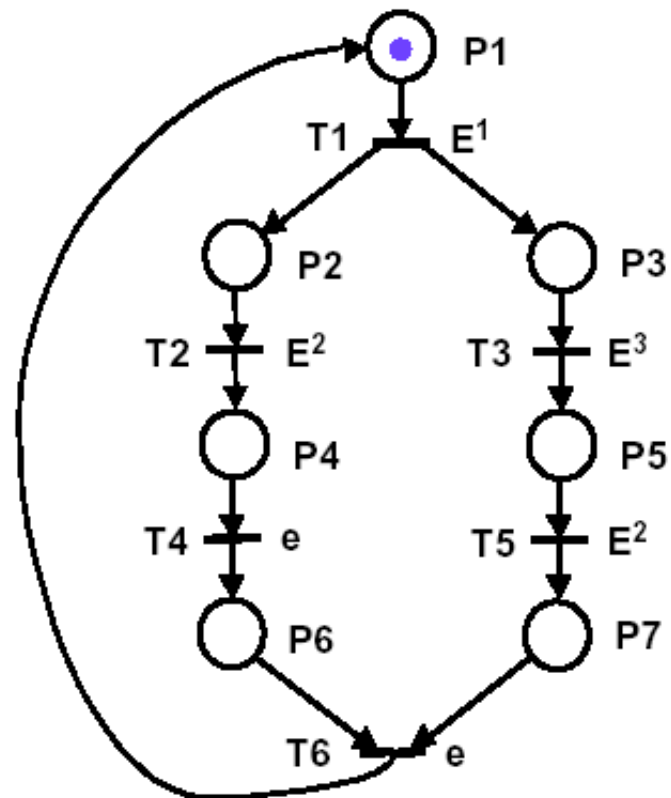
Les RdP Synchronisés (suite)



$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{T1T3/E^1 \text{ ou } T3T1/E^1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aucune ambiguïté : au moment de l'occurrence de E¹, on franchit dans n'importe quel ordre T1 et T3 et ensuite seulement on regarde s'il y a des transitions franchissables sur occurrence de l'événement e

Les RdP Synchronisés (suite)



Réseaux de Petri



RDP NON AUTONOMES

Les RdP Temporisés

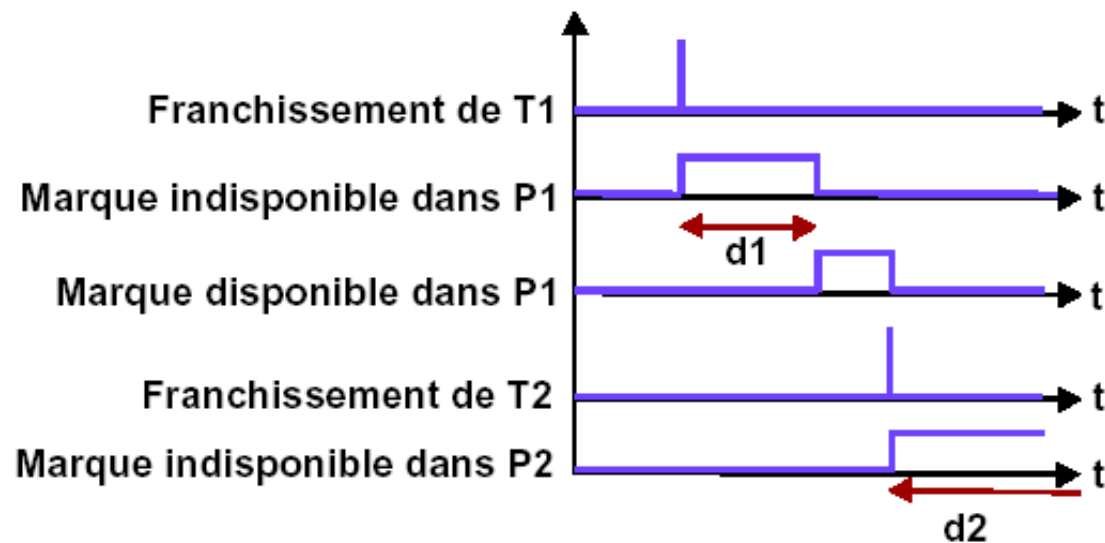
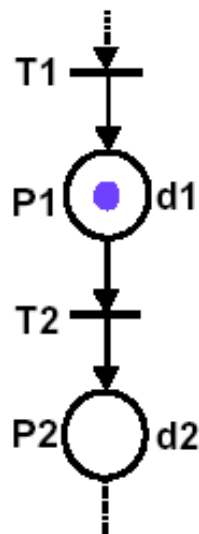
Ils décrivent les systèmes dont le fonctionnement dépend du **temps**

Les RdP P-Temporisés (RdPPT)

À chaque **PLACE** est associée une temporisation di éventuellement nulle

Un **RdPPT** est un doublet $\{R, \text{Tempo}\}$ tel que

- R est un RdP marqué
- Tempo est une application $P \rightarrow \mathbb{R}^+ / \text{Tempo}(P_i) = d_i$



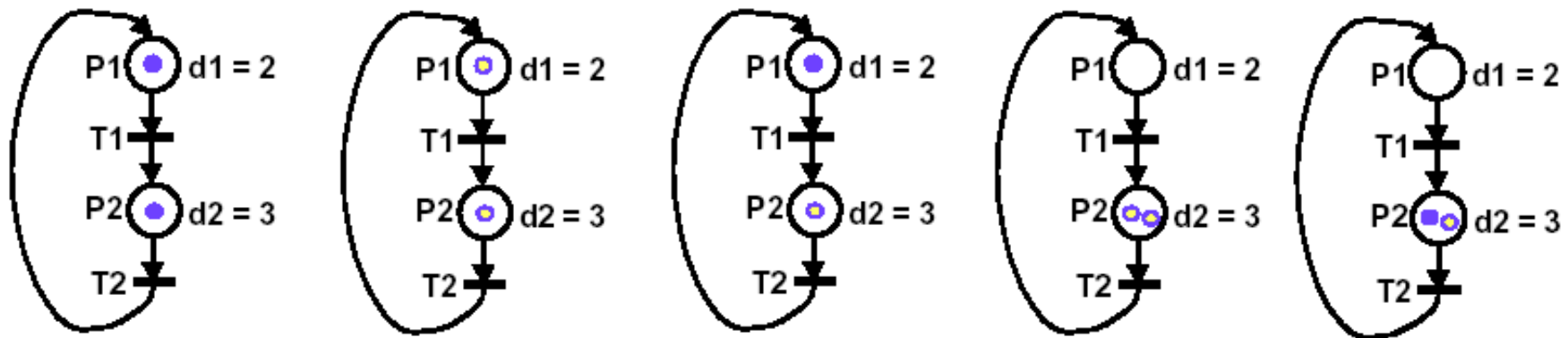
Réseaux de Petri



RDP NON AUTONOMES

Les RdP P-Temporisés (suite)

Un **RdP P-Temporisé** possède des **marques disponibles** et des **marques non disponibles**. Une transition est validée si les marques **disponibles** sont en nombre suffisant. À l'instant initial toutes les marques sont disponibles.



Fonctionnement à « vitesse maximale »

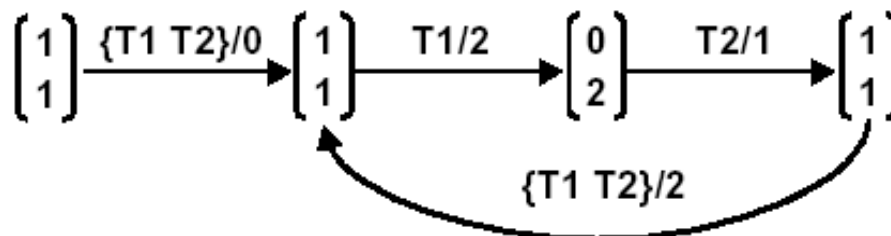
$T = 0$

$0 < t < 2$

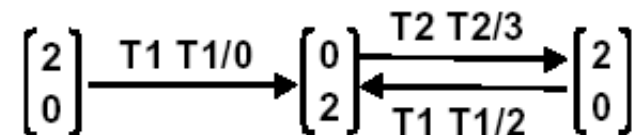
$t = 2$

$2 < t < 3$

$t = 3$



Même question avec $M0 = (2,0)$



Réseaux de Petri



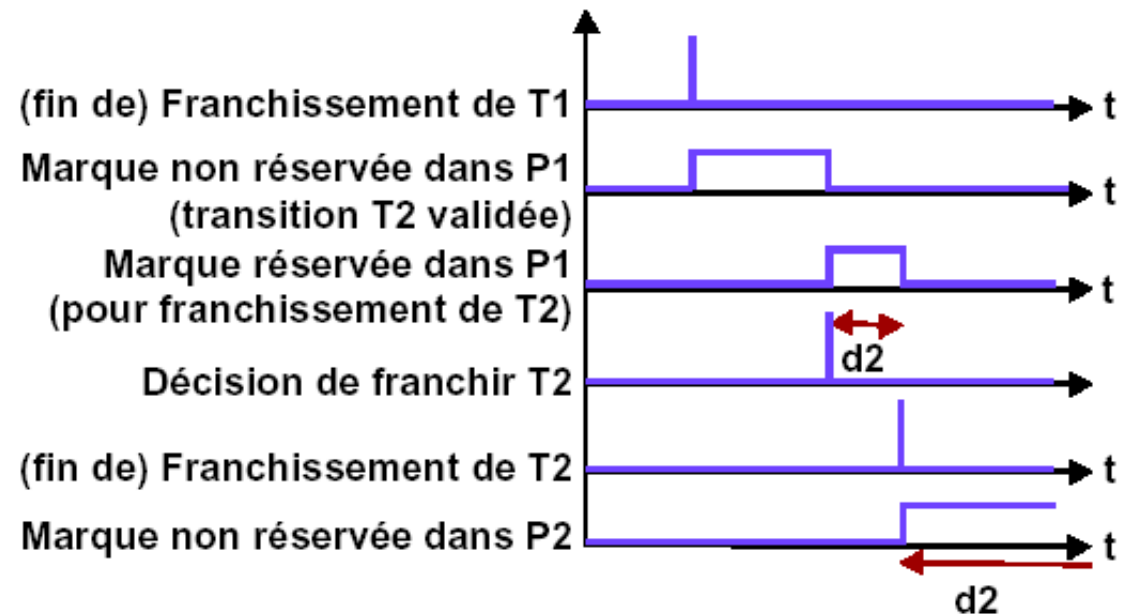
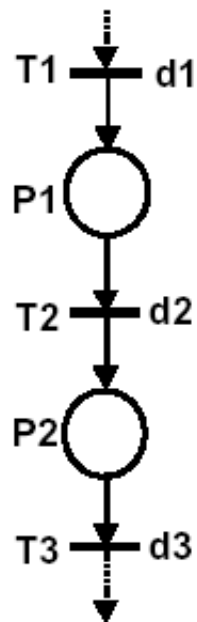
RDP NON AUTONOMES

Les RdP T-Temporisés

À chaque **TRANSITION** est associée une temporisation di éventuellement nulle.

Un **RdPTT** est un doublet $\{R, \text{Tempo}\}$ tel que

- R est un RdP marqué
- Tempo est une application $T \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $\text{Tempo}(T_j) = d_j$



Réseaux de Petri



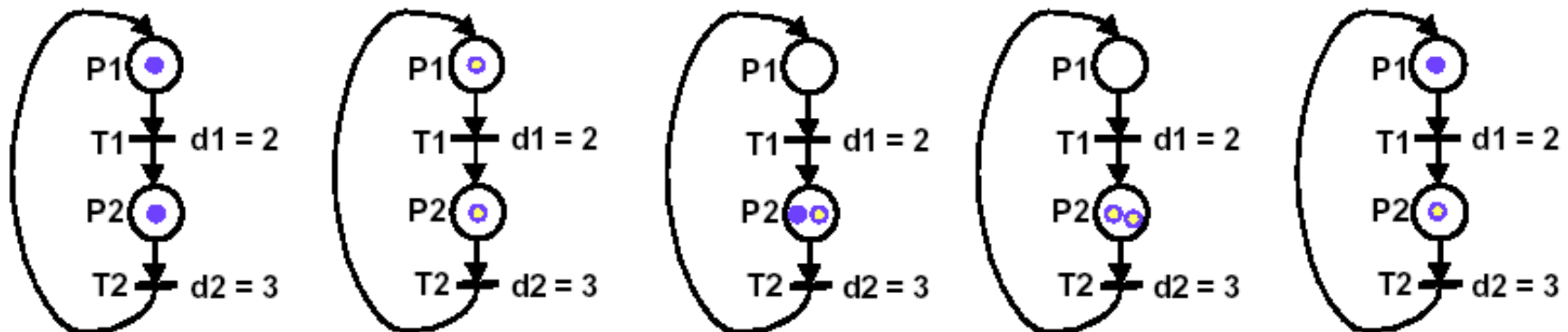
RDP NON AUTONOMES

Les RdP T-Temporisés (suite)

Un **RdP T-Temporisé** possède des **marques réservées** et des **marques non réservées**.

Une transition est validée si les marques **non réservées** sont en nombre suffisant.

À l'instant initial, toutes les marques sont non réservées.



Fonctionnement à « vitesse maximale »

$T = 0$

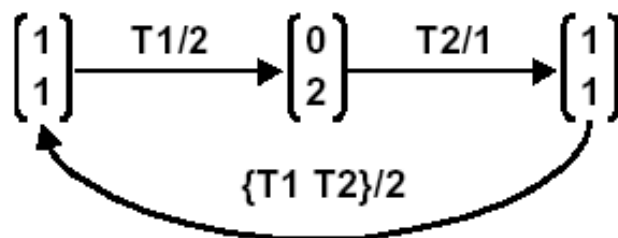
$0 < t < 2$

$t = 2$

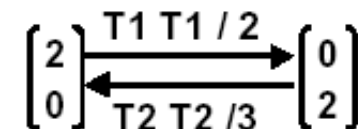
$2 < t < 3$

$t = 3$

Graphe des marquages du fonctionnement à « vitesse maximale »



Même question avec $M_0 = (2, 0)$



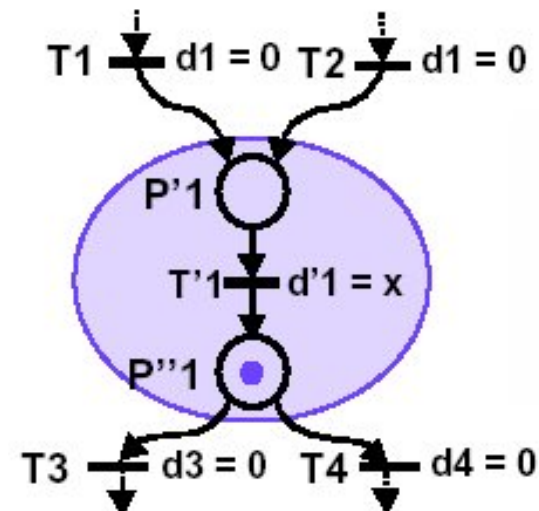
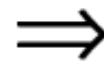
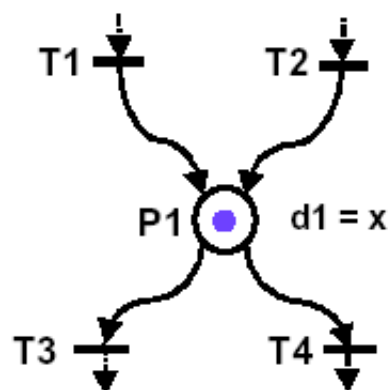
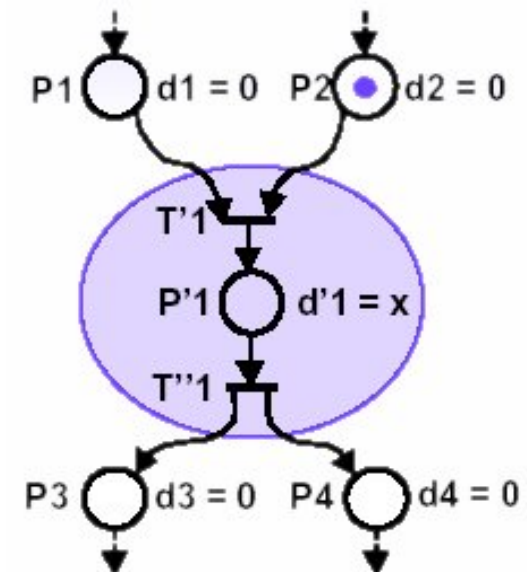
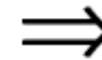
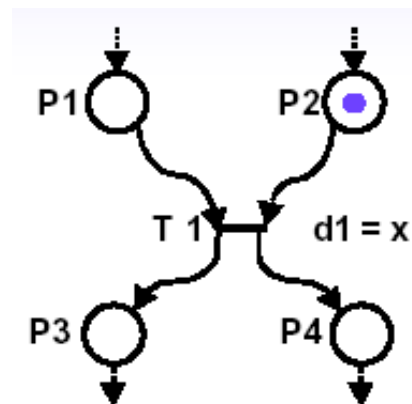
Réseaux de Petri



RDP NON AUTONOMES

Les RdP Temporisés : équivalence

Passage d'un RDP
T-Temporisé à un
RdP P-Temporisé

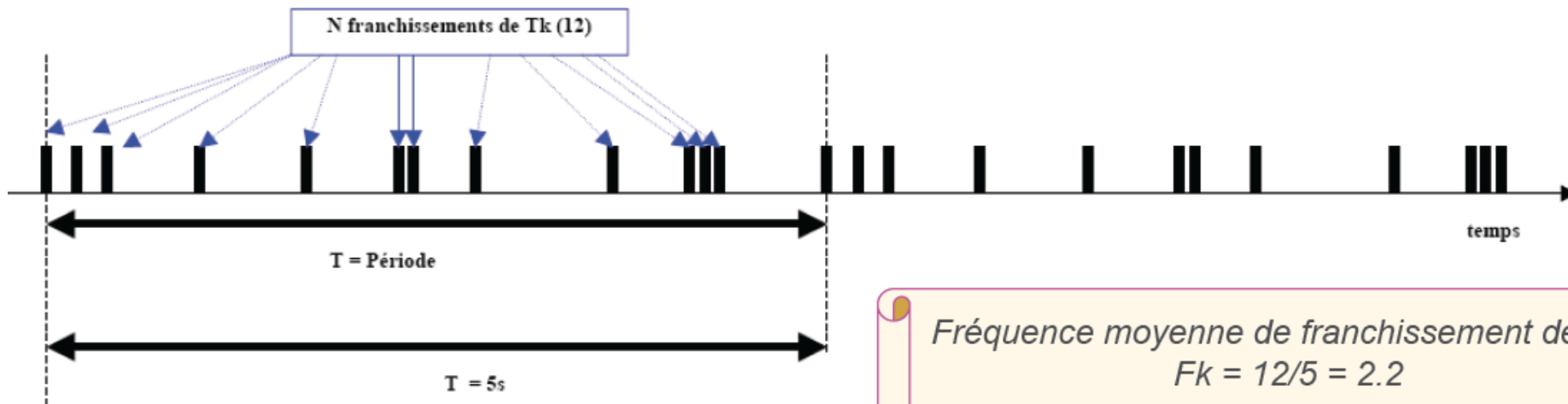


Passage d'un RDP
P-Temporisé à un
RdP T-Temporisé

Réseaux de Petri



- Ces RdP permettent d'obtenir des informations de **performances temporelles**
- **Régime stationnaire**: le fonctionnement à vitesse maximale conduit à un régime périodique (stationnaire) au bout d'un temps fini, pour tout marquage initial tel que le réseau soit borné et non bloquant.
- **Fréquence moyenne de franchissement d'une transition**: nb moyen de franchissements par unité de temps quand le régime stationnaire est établi.



Fréquence moyenne de franchissement de Tk :
 $Fk = 12/5 = 2.2$

Réseaux de Petri



Calcul des fréquences moyennes de franchissement

Invariants de place



X est un P-semi-flot (invariant de marquage)

On a donc : $X^T \cdot M_i = X^T \cdot M_o$

Nombre moyen de jetons dans une place P_i est donné par le produit entre la durée de séjour dans la place P_i et la fréquence d'entrée dans P_i .

$W^+ \cdot F$: fréquences des transitions avales associées à aux places (dimension n , n = nombre de places), F vecteur des fréquences, W^+ matrice POST

$D \cdot W^+ \cdot F$: marquage moyen (D une matrice diagonale telle que $D_{ii} = d_i$)

Si on applique la relation $X^T \cdot M_i = X^T \cdot M_o$ au marquage moyen, on a donc $X^T \cdot M_{\text{moyen}} = X^T \cdot M_o$ d'où

$$X^T \cdot D \cdot W^+ \cdot F = X^T \cdot M_o$$

En réalité, on transforme cette égalité en une inéquation car les fréquences réelles peuvent être inférieures à celles qui correspondraient à un fonctionnement à vitesse propre.

$$X^T \cdot D \cdot W^+ \cdot F \leq X^T \cdot M_o$$

Invariants de transitions



Pour chaque invariant de transition on a :

$$W \cdot S = 0$$

où S est un T-semi-flot et W la matrice d'incidence.

On en déduit une relation entre fréquence de franchissement correspondant au rapport entre les nombres de transitions contenues dans S .

Par exemple, pour deux transitions T_1, T_2

- *T-semi-flot = (1,1), correspondant à un invariant de transitions $T_1 T_2$, on en déduit $F_1 = F_2$*
- *T-semi-flot = (2,1), correspondant à un invariant de transition $T_1 T_1 T_2$, on en déduit $F_1 = 2F_2$*

Réseaux de Petri



Exemple

Invariant de places :

$M(P1) + M(P2) = 1$ d'où $X^T = (1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d1 & 0 \\ 0 & d2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Fa \\ Fb \end{pmatrix} \leq 1$$

d'où $d1.Fb + d2.Fa \leq 1$

Invariant de transition

. (Ta, Tb) composante répétitive d'où $S = (1,1)$

. TaTb franchissable

D'où $Fa = Fb$

On en déduit

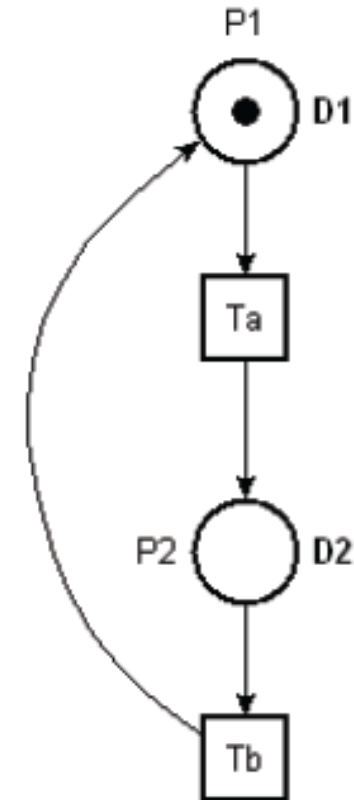
$$Fa \leq 1 / (d1 + d2)$$

$$Fb \leq 1 / (d1 + d2)$$

PS : si plusieurs inéquations, on aurait pris $Fa = \min$ (bornes de Fa)

Application numérique avec $d1 = 2$ et $d2 = 5$

$$Fa = Fb \leq 1/7$$



Réseaux de Petri

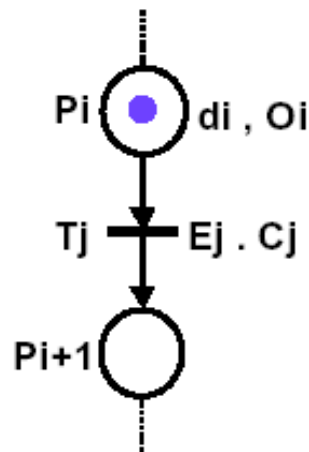


RDP NON AUTONOMES

Les RdP Interprétés (RdPI)

Un **RdP Interprété (RdPI)** possède 3 caractéristiques :

- il est **synchronisé**
- il est **P-Temporisé**
- l'interprétation de ce RdP permet de décrire les **opérations** (associées aux places) modifiant l'état du système modélisé et les **conditions** (prédicats associés aux transitions) qui permettent l'évolution du réseau.



Le franchissement de la transition T_j s'effectuera si la **transition T_j est validée** et si la **condition C_j est vraie** lorsque l'événement E_j se produira.

Si une marque est déposée dans la place P_i , on effectue l'opération O_i et la marque est **indisponible pendant di** .

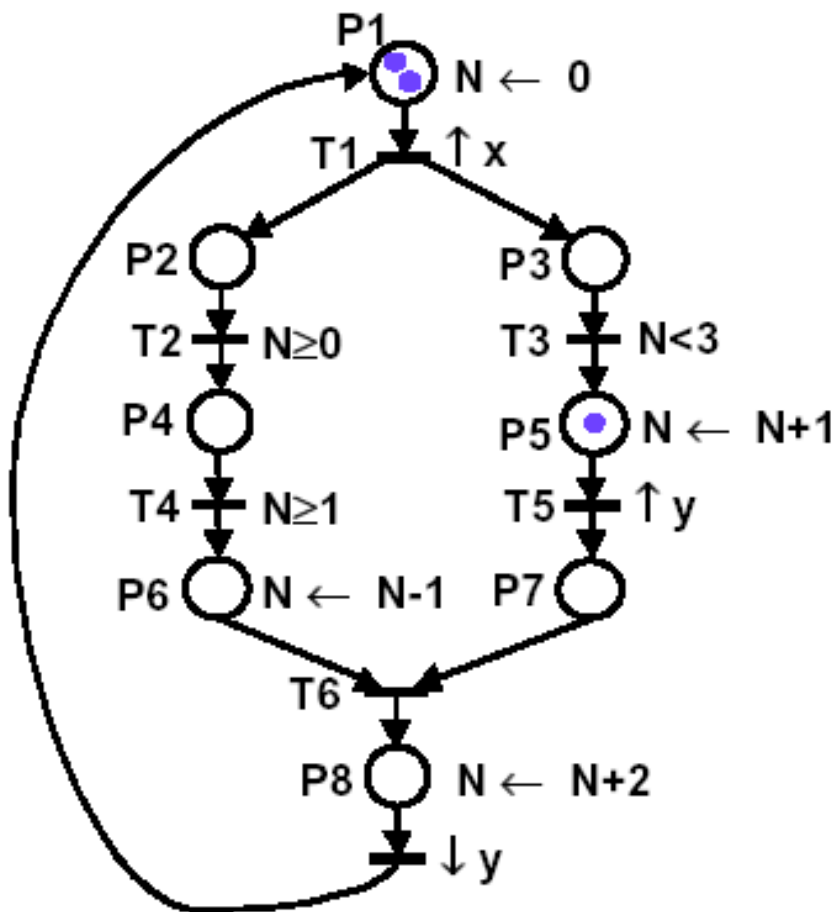
Réseaux de Petri



RDP NON AUTONOMES

Les RdP Interprétés (RdPI)

Des classes de RdP dérivées des RdPI et **non temporisés** sont plus fréquemment utilisés.



Algorithme d'interprétation :

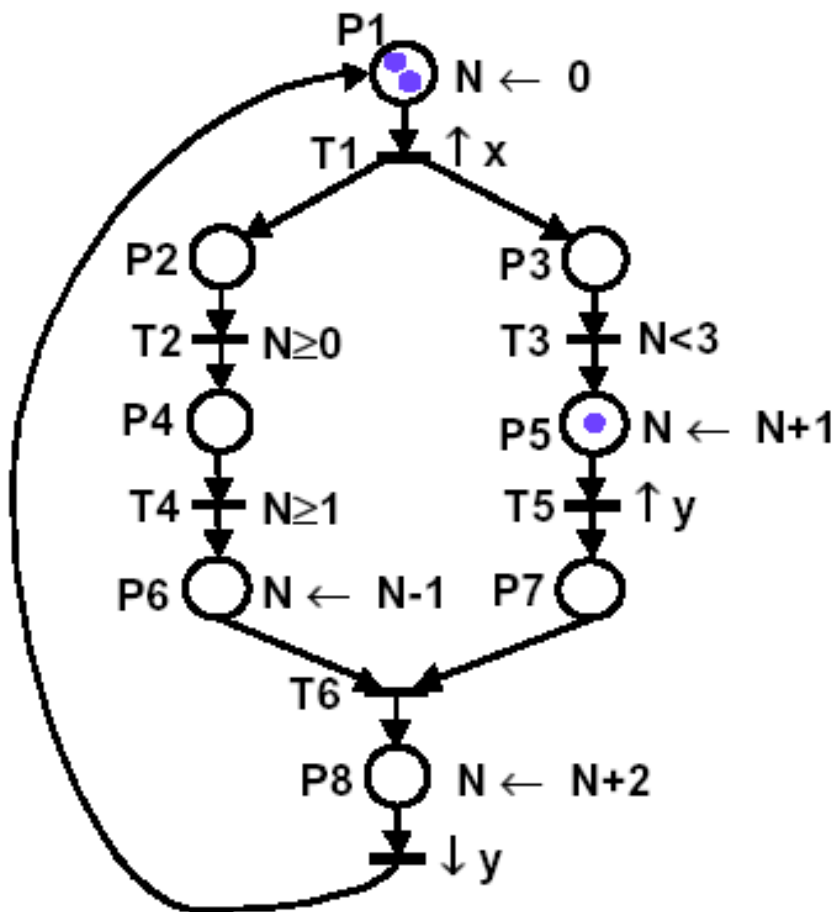
- **Pas 1** : initialiser le marquage et l'échéancier des événements externes. Effectuer les opérations associées aux places marquées. Considérer que l'événement externe est $X=e$ et aller au pas 3.
- **Pas 2** : considérer l'instant suivant de l'échéancier. Faire $X= E_i(t)$. Aller au pas 3.
- **Pas 3** : itérer la séquence :
 - Pas 3.1 : si l'ensemble des transitions franchissables sur occurrence de X est vide aller au pas 2, sinon tirer les transitions,
 - Pas 3.2 : effectuer les opérations associées aux places dont le marquage a augmenté. Faire $X=e$. Aller au pas 3.1

Réseaux de Petri



RDP NON AUTONOMES

Les RdP Interprétés (suite)



PAS 1 $M0 = \{2,0,0,0,1,0,0,0\}$

on choisit $N = 0$; $X = e$

PAS 3.1 Rien

PAS 2 $X = x$

PAS 3.1 $M1 = \{1,1,1,0,1,0,0,0\}$

PAS 3.2 Pas d'opération; $X = e$

PAS 3.1 $M2 = \{1,0,0,1,2,0,0,0\}$

PAS 3.2 $N = 1$; $X = e$

PAS 3.1 $M3 = \{1,0,0,0,2,1,0,0\}$

PAS 3.2 $N = 0$; $X = e$

PAS 3.1 Rien

PAS 2 $X = \downarrow y$

PAS 3.1 Rien

PAS 2 $X = y$

PAS 3.1 $M4 = \{1,0,0,0,1,1,1,0\}$

PAS 3.2 Pas d'opération; $X = e$

PAS 3.1 $M5 = \{1,0,0,0,1,0,0,1\}$

PAS 3.2 $N = 2$; $X = e$

PAS 3.1 Rien

...

GRAFCET ET RDPI



Points communs entre les RdPI et le GRAFCET :

- graphes orientés bipartis (place/transition ou étape/transition)
- évolution du marquage synchrone avec l'occurrence d'événements externes



Différences principales entre les RdPI et le GRAFCET :

- le **marquage** d'une étape d'un GRAFCET est **booléen**, celui d'une place d'un RdPI est **numérique**
- les **entrées/sorties** d'un GRAFCET sont **booléennes**, celles d'un RdPI sont **plus générales**
- **pas de franchissement simultané** de plusieurs transitions en RdPI
- pas de notion de **variable d'état d'étape** en RdPI (différence pouvant être contournée par des opérations associées aux places et testées dans les transitions)
- pas de **mécanisme de préemption** en RdPI (forçage en GRAFCET)

Réseaux de Petri



LES RDPI DE COMMANDE

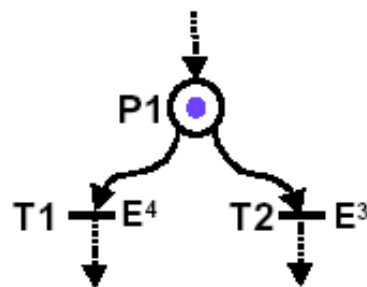
Un **RdP Interprété de Commande (RdPIC)** possède 4 caractéristiques :

- il est **sauf**
- il est **non temporisé**
- il est **déterministe**
- ses **entrées/sorties** peuvent être à **niveau** ou **impulsionnelles**

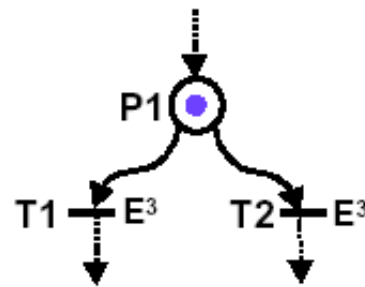
Déterminisme : même relation causale entre entrées/sorties

Donc, le **marquage** du RdPIC doit être **déterministe** ET son **interprétation** également (pas d'opérations incompatibles)

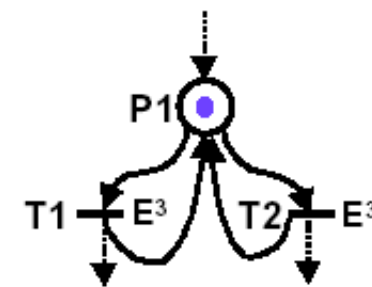
Marquage déterministe : pas de conflit réel.



Pas de conflit
réel



Conflit réel



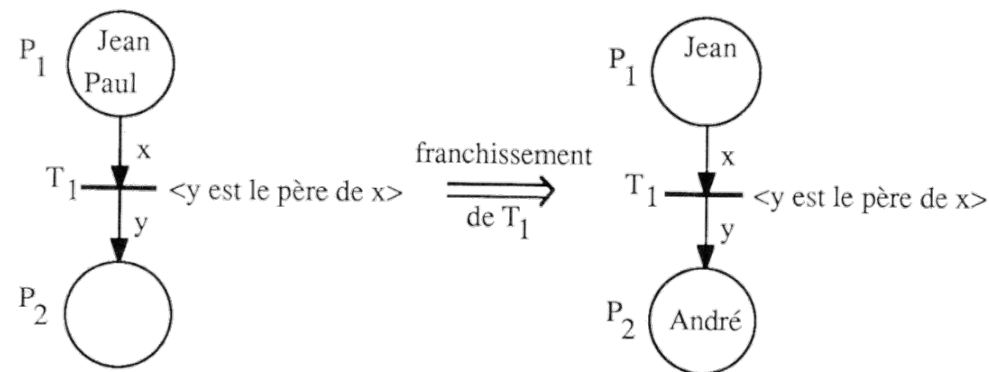
Conflit réel
mais persistance

Réseaux de Petri



CONCLUSION SUR LES RDP

- D'autres classes de **RdP** sont très adaptées à la modélisation des SAP : les **RdP Stochastiques** pour les études de **sûreté de fonctionnement**, les **RdP Continus** très efficaces en **simulation**, les **RdP Hybrides** pour décrire le comportement des **Systèmes Dynamiques Hybrides**, les **RdP à Prédicats**, les **RdP Objets**, ...



Exemple de RdP à prédicats

CONCLUSION SUR LES RDP

- **Automates à états finis** et **Statecharts**, **RdP** et **GRAFCET** sont des modèles issus d'une même famille, ils constituent la **base scientifique** des SED.
- Les multiples possibilités des RdP en font un outil très utilisé en **Recherche** (Automatique, Génie Industriel, Gammes de Fabrication, Gestion de Production, Informatique, ...). Son **utilisation industrielle** concerne les domaines de **l'évaluation de performances**, de la **sûreté de fonctionnement**, des **réseaux de communication**, ...

En **commande industrielle**, on lui préférera les STATECHARTS ou le **GRAFCET** (qui fait l'objet d'une **norme internationale** IEC 60848) qui permettent un passage aisé à des **réalisations** câblées ou programmées.

