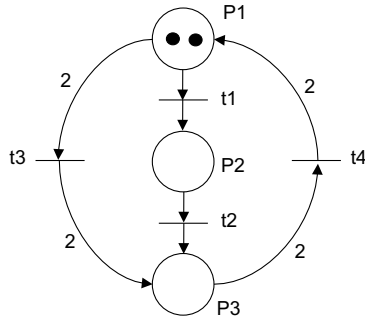
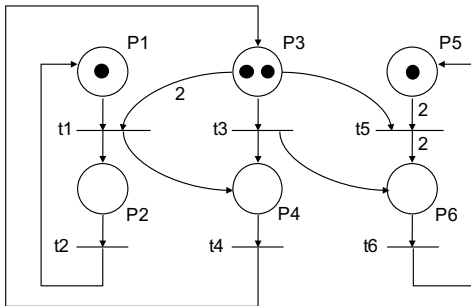


Exercice 1. Analyse d'un réseau de Petri généralisé (30 mn)



- 1) Donnez la matrice d'incidence W de ce réseau de Petri.
- 2) Soit le marquage initial $M_0 = (2, 0, 0)$. Donnez le marquage atteint par franchissement de la séquence $\sigma_1 = (t_3, t_4, t_1, t_2, t_1)$ à partir du marquage initial M_0 en utilisant l'équation algébrique caractéristique des RdP.
- 3) Donnez le graphe de marquage pour M_0 et en déduire les propriétés de ce réseau pour M_0 (vivacité, bornitude, réinitialisabilité, blocage, ...).
- 4) Soit le P-semi flot $F^T(a, b, c)$:
 - a. Donnez les équations caractérisant les paramètres a, b, c de F^T .
 - b. Proposez une solution admissible (un P-semi flot) de ces équations.
 - c. En déduire un invariant de marquage pour le marquage initial M_0 .
- 5) Quel est le marquage minimum $M_{\min}$ (et le démontrer) pour que la séquence $\sigma_2 = t_3 t_2 t_3$ soit franchissable ?

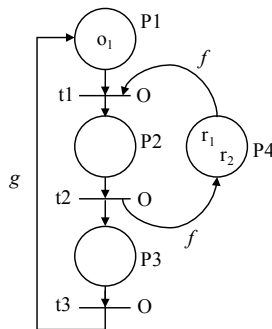
Exercice 2. Pliage d'un réseau de Petri coloré (15mn)



A l'aide de trois couleurs b, r et n , qui pourront être associées aux transitions et places de ce réseau, donnez le RdP coloré équivalent obtenu par une opération de pliage.

N'oubliez pas de définir les fonctions que vous utiliserez ainsi que le marquage initial. La couleur b pourra être associée aux transitions $t1$ et $t2$ et aux places $P1$ et $P2$, la couleur r à $t3, t4, P3$ et $P4$ et la couleur n à $t5, t6, P5$ et $P6$.

Exercice 3. Analyse d'un RdP coloré (15mn)



Soit les 2 ensembles de couleurs O et R

$$O = \{o_1, o_2\}$$

$$R = \{r_1, r_2\}$$

Les fonctions f et g sont définies par :

$$\begin{cases} f(o_1) = r_1 \\ f(o_2) = r_2 \end{cases}$$

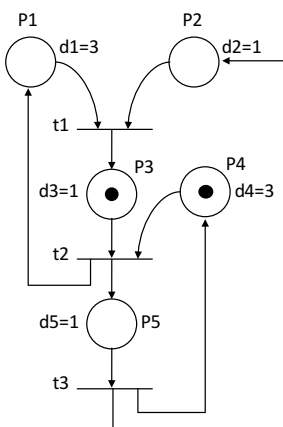
$$\begin{cases} g(o_1) = o_2 \\ g(o_2) = o_1 \end{cases}$$

- 1) Donnez la matrice d'incidence W du RdP coloré ci-contre.
- 2) A l'aide de cette matrice, démontrer que $F^T = (0, f, 0, id)$ est un P-semi flot pour ce réseau.
- 3) En déduire un invariant de marquage pour le marquage initial $M_0 = (o_1, 0, 0, r_1 + r_2)$.

Lorsqu'aucune fonction n'est précisée sur les arcs, c'est la fonction identité (id) qui s'applique.

Les jetons des places $P1, P2$ et $P3$ appartiennent à l'ensemble O tandis que ceux de la place $P4$ appartiennent à l'ensemble R .

Exercice 4. Graphe de marquage d'un réseau de Petri P-temporisé (15mn)



Soit le RdP P-temporisé ci-contre pour lequel des durées d_i sont associées aux places P_i . Son marquage initial est $M_0 = (0, 0, 1, 1, 0)$.

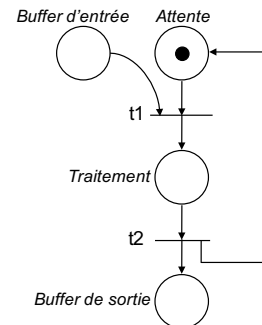
- 1) Construisez son graphe de marquage à vitesse maximale.
- 2) Peut-on déduire, de ce graphe de marquage, une estimation des fréquences de franchissement des transitions en régime stationnaire ?

Exercice 5. Modélisation en RdP (45mn)

Question 1

On considère le comportement cyclique d'un programme informatique décrit par le réseau de Petri ci-contre selon le cycle suivant : le programme récupère un paquet de données dans un buffer d'entrée, effectue un traitement sur ces données, les dépose dans un buffer de sortie et retourne dans son état initial, prêt à entamer un nouveau cycle. Nous considérons, dans un premier temps, que le programme ne peut traiter qu'un seul paquet à la fois.

Le programme est modifié de telle sorte à pouvoir traiter simultanément 2 paquets. Comment obtenir un nouveau RdP ordinaire qui prend en compte cette modification sans ajouter ni place ni transition, ni arcs ?



Question 2

On considère maintenant un système comportant trois programmes informatiques fonctionnant selon le cycle décrit précédemment. Le premier programme *pg1* dispose d'un buffer d'entrée *BE* pouvant recevoir des paquets à tout moment. Il récupère les données dans *BE*, les traite et les dépose dans une mémoire (*buffer1*). Le deuxième programme *pg2* récupère les données du *buffer1*, effectue un second traitement et dépose le paquet de données traité dans une deuxième mémoire (*buffer2*). La mémoire *buffer2* est en entrée du troisième programme *pg3* qui fera un troisième traitement du paquet de données puis le déposera sur une mémoire de sortie *BS* exploitée par le système. On considère que les programmes *pg1* et *pg3* ne peuvent traiter qu'un paquet de données à la fois tandis que le programme *pg2* peut en traiter 2 simultanément.

A partir du modèle générique d'un programme informatique présenté à la question 1, proposer un modèle de réseau de Petri ordinaire permettant de décrire le comportement de ce système.

Question 3

On souhaite maintenant éviter tout débordement des buffers.

*Proposez une modification du réseau de Petri précédent de telle sorte à limiter à 5 le nombre de paquets dans le système (c'est à dire en cours de traitement par les 3 programmes ou bien dans les mémoires *buffer1* et *buffer2* entre programmes). N'oubliez pas de préciser le marquage initial de votre réseau.*

Question 4

Les durées de traitement des paquets sont respectivement de deux unités de temps pour le premier programme et d'une unité de temps pour les deuxième et troisième programmes.

- Transformer le RdP ordinaire de la question 3 en RdP P-temporisé pour modéliser ces durées de traitement.*
- Est-ce que la modification apportée en question 3 est toujours justifiée ? Compte tenu de ces durées, quel est le nombre maximal de paquets présents dans le système ?*

Question 5

On souhaite maintenant pouvoir exécuter une tâche externe au système (par exemple une tâche de maintenance) si celui-ci n'est pas occupé, c'est à dire : le buffer d'entrée *BE* du système est vide, aucune donnée n'est en cours de traitement ou dans les mémoires *buffer1* et *buffer2*. Dans ce cas, la tâche peut être exécutée (elle ne fait pas appel aux trois programmes, ne suit pas le cycle générique défini pour un programme et ne récupère aucune donnée dans les buffers). Lorsque cette tâche externe s'exécute, les programmes *pg1*, *pg2* et *pg3* sont figés dans leur état d'attente et ne peuvent effectuer aucun traitement. Lorsque cette tâche est terminée, les programmes *pg1*, *pg2* et *pg3* sont à nouveau autorisés à exécuter un cycle si un paquet de données se présente dans leur buffer d'entrée.

Compléter votre RdP ordinaire en RdP généralisé pour modéliser ce fonctionnement.

Question 6

On définit un ensemble de couleurs *P*, associé aux trois programmes, avec $P = \{pg1, pg2, pg3\}$. Les paquets de données associés au buffer de sortie *BS* pourront être représentés par des jetons non colorés ($\bullet$).

Proposez un RdP coloré du RdP de la question 2 en n'oubliant pas de décrire les fonctions que vous utiliserez.

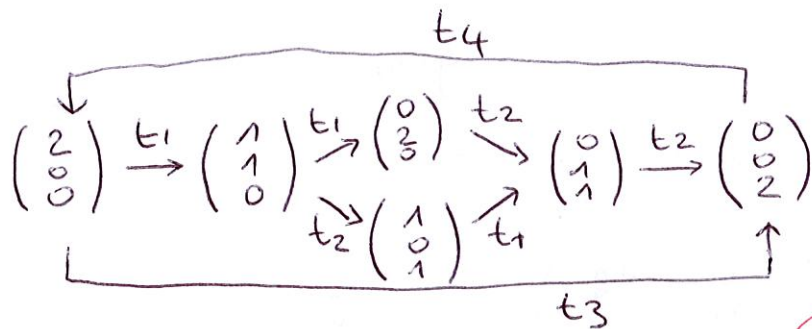
Exo 1 (5)

1) $W = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & +2 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +2 & -2 \end{pmatrix}$ (0,5)

2) $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\pi_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & +2 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \\ + \end{pmatrix}$

(0,5) $= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3)



vivant
borné (2)
reint
non bloquant

(1,5)

4) $F^T \cdot W = 0$

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ -b + c = 0 \\ -2a + 2c = 0 \\ 2a - 2c = 0 \end{cases}$$

$a = b = c$

(1)

$F^T = (1, 1, 1)$

$m(P_1) + m(P_2) + m(P_3) = F^T \cdot \pi_0 = 2$

5) PRE $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\pi_{min} \geq \text{pre}(-t_3) \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\pi_{min} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 2 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \text{pre}(-t_2)$

$\pi_{min} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\pi_{min} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(1,5)

$\pi_{min} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 2 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \text{pre}(-t_3)$

$\pi_{min} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ +3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\pi_{min} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

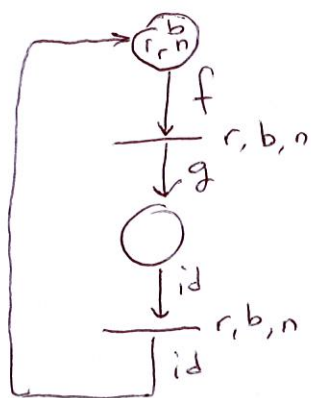
$\pi_{min} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exo2 (2)

(2)

SEP 2018

2pt



$$\begin{cases} f(b) = b + 2r \\ f(r) = r \\ f(n) = r + 2n \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(b) = b + r \\ g(r) = r + n \\ g(n) = 2n \end{cases}$$

Exo3 (2)

1)
$$W = \begin{pmatrix} -Id & 0 & +g \\ +Id & -Id & 0 \\ 0 & +Id & -Id \\ -f & +f & 0 \end{pmatrix}$$
 (0,5)

2) $F^T \cdot W = 0 \quad (0, f, 0, Id) \begin{pmatrix} -Id & 0 & +g \\ +Id & -Id & 0 \\ 0 & +Id & -Id \\ -f & +f & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$ (0,5)

$f \cdot m(p_2) + m(p_4) = F^T \cdot \vec{r}_0 = (0, f, 0, Id) \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0 \\ 0 \\ r_1 + r_2 \end{pmatrix} = r_1 + r_2.$

1

$$\underline{f \cdot m(p_2) + m(p_4) = r_1 + r_2}$$

Exo4 (3)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_2} \begin{pmatrix} 1(3) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1(1) \end{pmatrix} \xrightarrow{t_3/1} \begin{pmatrix} 1(2) \\ 1(1) \\ 0 \\ 1(3) \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1(1) \\ 1(1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

↑ $t_2/1$

2

$f_{t_1} \leq 1/4$

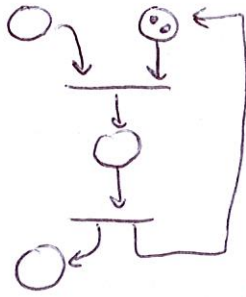
$f_{t_2} \leq 1/4$

$f_{t_3} \leq 1/4$

1

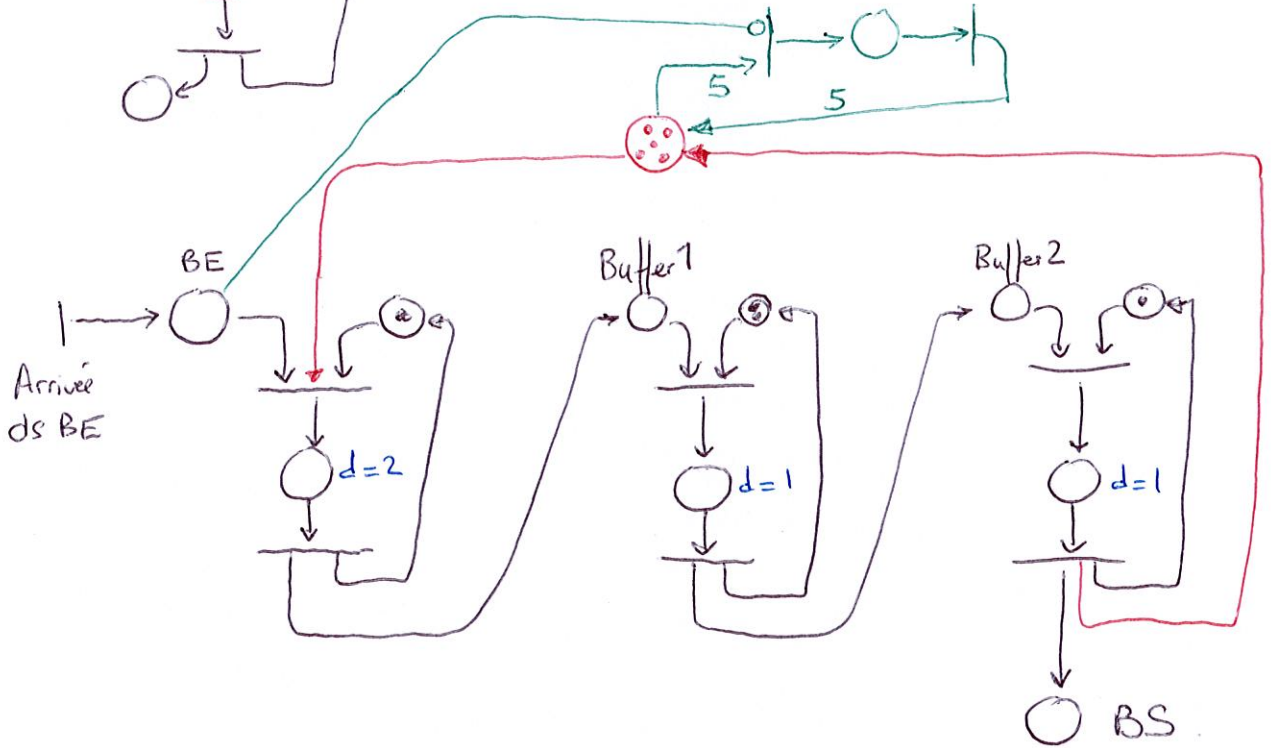
Exo 5.. (8)

1)



2 jetons ds place "Attente"

2)



3) Place supp avec 5 jetons en marquage init

4) a) Durée sur places de traitement.

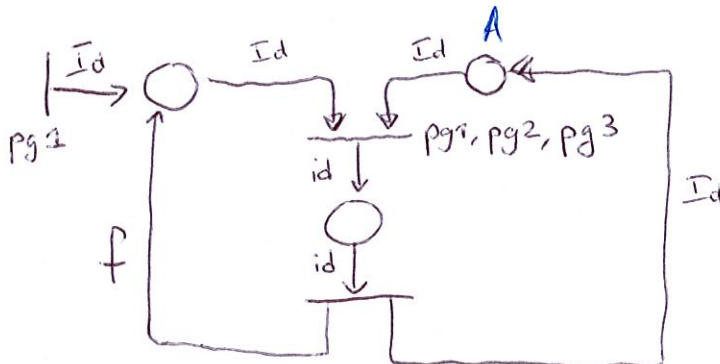
b) inutile car max 2 paquets ds syst $t_{trait 1} \geq \frac{2 \times t_{trait 2}}{2 \times 3}$

idem les 2 jetons ds place d'attente du serveur 2 $\rightarrow$ inutile.

5) Place supp. (on peut 5 pour vider la place ajoutée à la question 3)

$\hookrightarrow$ passage de RSP ordinaire à RSP Généralisée

6)



$$No(P_A) = \langle pg1 \rangle, \langle pg2 \rangle, \langle pg3 \rangle$$

$$\begin{cases} f(Pg1) = Pg2 \\ f(Pg2) = Pg3 \\ f(Pg3) = \bullet \end{cases}$$