

### Exercice 1. Propriétés

#### 1) Rappels

Un RdP non marqué est un **graphe d'états** si et seulement si toute transition a **exactement 1 place d'entrée et 1 place de sortie**.

Un RdP est un **graphe d'événements** si et seulement si toute place a **exactement 1 transition d'entrée et 1 transition de sortie**.

Un RdP à **choix libre** est un RdP dans lequel pour tout conflit provoqué par des transitions  $T_j$ , aucune de ces transitions ne possède une autre place d'entrée que celle à partir de laquelle le conflit est provoqué.

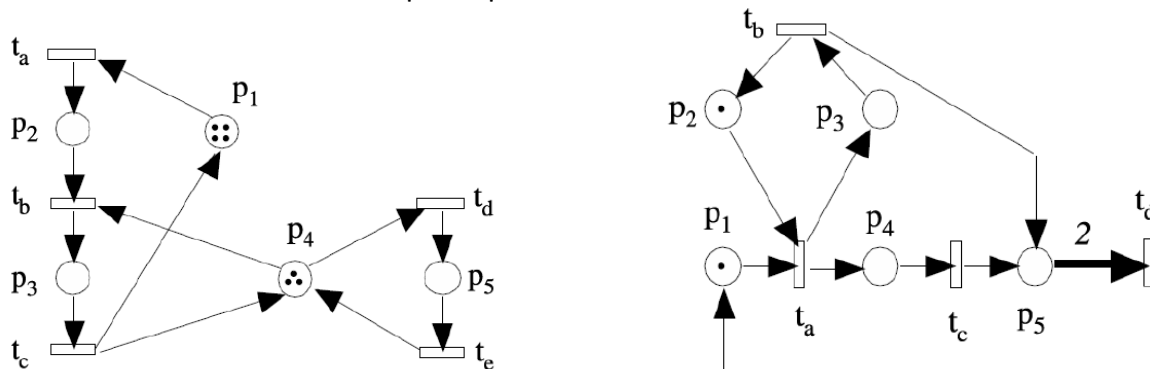
Un RdP est dit « **simple** » si chacune de ses transitions ne peut être concernée que par **un conflit au plus**.

Un RdP est dit « **pur** » si il n'existe pas de transition ayant **une place d'entrée qui soit aussi place de sortie** de cette même transition.

Un RdP **sans boucle** est tel que si il existe une transition  $T_j$  et une place  $P_i$  qui est à la fois place d'entrée et place de sortie de  $T_j$ , alors  $T_j$  a au moins une **autre place d'entrée**.

**Remarque** : l'ensemble des RdP sans boucle inclut l'ensemble des RdP purs.

1) Les RdP suivants sont-ils des graphes d'états ? des graphes d'événements ? des réseaux sans conflit ? à choix libre ? simples ? purs ? sans boucle ?



Graphe d'états :

RdP1 : non  $t_b$  a deux places d'entrée,  $t_c$  a deux places de sortie

RdP2 : non  $t_a$  a deux places d'entrée,  $t_b$  a deux places de sortie

Graphe d'événements :

RdP1 : non  $P_4$  a deux transitions d'entrée et deux transitions de sortie

RdP2 : non  $P_5$  a deux transitions d'entrée

Réseaux sans conflit

RdP1 : non  $P_4$  a deux transitions de sortie

RdP2 : oui

A choix libre

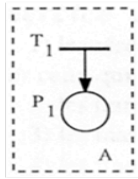
RdP1 : non conflit  $t_b$  et  $t_d$  depuis  $P_4$  mais  $P_2$  place d'entrée de  $t_b$

RdP2 : oui

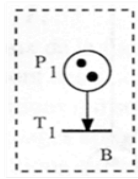
Simple RdP1 et RdP2 : oui

Purs et Sans boucle : oui pour les deux réseaux

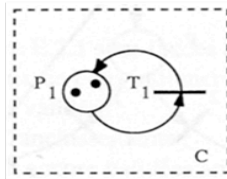
2)



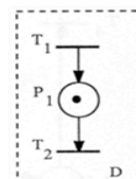
**Non borné**  
**Vivant**  
Sans blocage



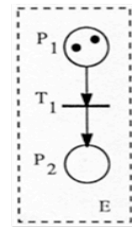
**Borné**  
**Non vivant**  
**Un blocage**



**Borné**  
**Vivant**  
Sans blocage

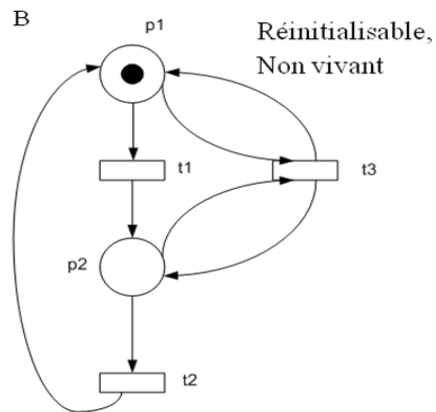
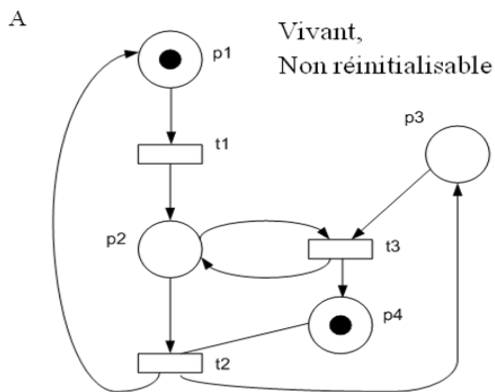


**Non borné**  
**Vivant**  
Sans blocage

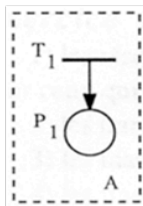


**Borné**  
**Non vivant**  
**Un blocage**

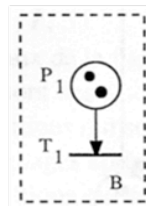
3)



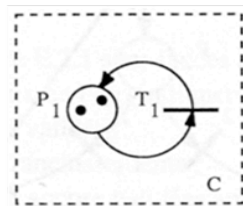
4)



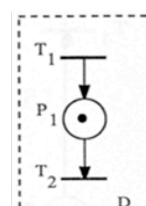
**NON**  
 $m_1$  augmente d'une  
unité à chaque  
franchissement de  $T_1$



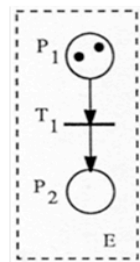
**NON**  
 $m_1$  diminue d'une  
unité à chaque  
franchissement de  $T_1$



**OUI**  
 $m_1 = 2$



**NON**  
 $m_1$  peut varier  
entre 0 et l'infini



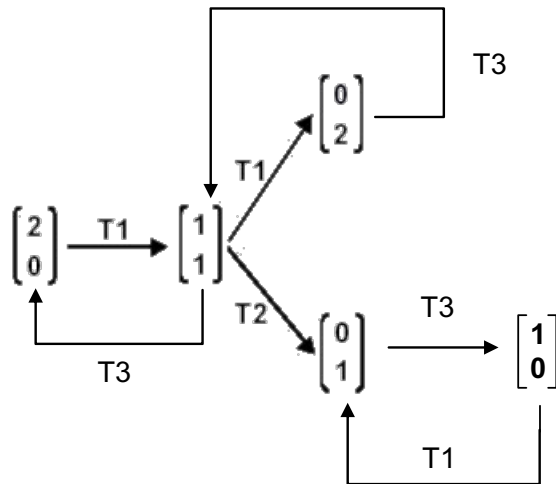
**OUI**  
 $m_1 + m_2 = 2$

## Exercice 2. Graphe de marquage et Matrice d'incidence

a)  $W = \begin{pmatrix} -1 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c)



d) Sauf : non (déjà deux jetons dans P1 au marquage initial)

Borné : oui (max 2)

Vivant : non (transition T2 non vivante depuis le marquage (0,1))

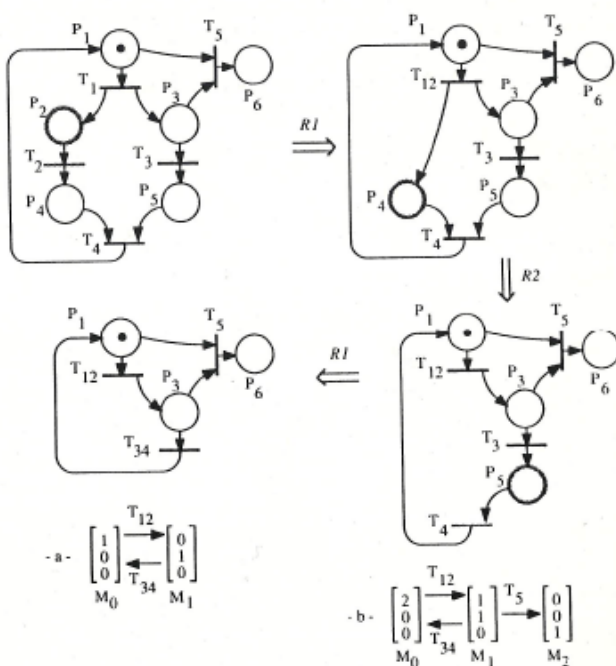
Réinitialisable : non

Sans blocage : oui (même s'il existe un groupe de marquage absorbant (0,1), (1,0) auquel on accède depuis le marquage initial par franchissement de T1 et T2).

### Exercice 3. Matrice d'incidence

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & +3 \\ 0 & -2 & +2 \\ 0 & +1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Exercice 4. Réduction



c) après la première réduction, la marque qui était dans P2 doit être placée dans P4. La deuxième réduction R2 est encore possible (place implicite) : P4 a une marque de plus que dans le cas a) et ce marquage ne peut empêcher le franchissement de T4. Son marquage peut se déduire du marquage des autres places ( $m_4 = m_3 + m_5 + 1$ ). Résultat final identique au cas a).

### Exercice 5. Modélisation, réduction et graphe de marquage

a)

ta: début d'enregistrement

tb : début d'embarquement

tc : fin d'embarquement

td : début de débarquement

te : fin de débarquement

P1 : Salles d'embarquement disponibles

P2 : Enregistrement

P3 : Embarquement

P4 : Passerelles disponibles

P5 : Débarquement

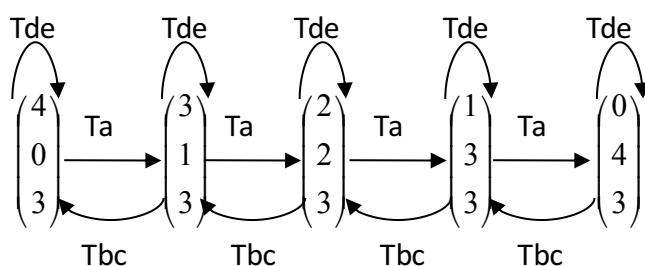
b)

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)

Réduction R1 (substitution de places) sur P3 puis sur P5.

d)



e)  $m_1 + m_2 = 4$

$m_4 = 3$

$m_1 + m_2 + m_4 = 7$

### Exercice 6. Modélisation

a) On peut associer les interprétations suivantes aux places et aux transitions :

- Place P0 : Système prêt pour un nouveau lot,
- Place P1 : demande de chauffage du lait en attente,
- Place P2 : demande de préparation du ferment en attente,
- Place P3 : chauffage du lait dans le réacteur R1,
- Place P4 : brassage du ferment dans le réacteur R2,

- Place P5 : réacteur R1 disponible,
- Place P6 : réacteur R2 disponible,
- Place P7 : fermentation dans le réacteur R3,
- Place P8 : vidange de R3 et refroidissement à l'aide de l'échangeur R4,
- Place P9 : réacteur R3 disponible,
- Place P10 : échangeur de chaleur R4 disponible,
- Transition ta: lancement de la fabrication d'un lot (interconnexion avec le logiciel d'ordonnancement et de pilotage de l'atelier, la transition est franchie sur demande du logiciel de pilotage de l'atelier),
- Transition tb: début du chauffage (la transition est franchie dès qu'elle est sensibilisée, elle envoie une commande aux contrôleurs locaux des vannes, des pompes et du réacteur R1 pour remplir le réacteur puis activer l'élément de chauffage),
- Transition tc: début du brassage (la transition est franchie dès qu'elle est sensibilisée, elle envoie des commandes aux contrôleurs locaux des vannes, des pompes et du réacteur R2 pour remplir le réacteur puis activer l'élément de brassage),
- Transition td : début de la fermentation (la transition est franchie sur la demande du logiciel de pilotage - après vérification qu'un temps minimal de chauffage et de brassage a été assuré – elle envoie des commandes aux contrôleurs locaux des vannes, des pompes et des réacteurs R1, R2 et R3 pour arrêter le chauffage et le brassage, assurer le transfert des deux produits dans le réacteur R3 et commander le début du processus de fermentation),
- Transition te : début du refroidissement (la transition est franchie sur la demande du logiciel de pilotage après vérification que la durée de fermentation est correcte - ni trop courte, ni trop longue, envoie des commandes aux contrôleurs locaux des vannes, des pompes, du réacteur R3 et de l'échangeur de chaleur R4 pour terminer la fermentation et assurer un débit correct dans R4),
- Transition tf : fin de fabrication (la transition est franchie dès que l'on détecte que le réacteur R3 est vide, elle envoie des commandes aux contrôleurs locaux des vannes, des pompes du réacteur R3 et de l'échangeur de chaleur R4 et elle communique au logiciel de pilotage et d'ordonnancement de l'atelier que la fabrication du lot est terminée).

**b)** La place P0 représente le système prêt pour traiter un lot. Si on met deux jetons dans cette place, cela permet de franchir deux fois la transition ta. Le logiciel de pilotage et d'ordonnancement de la production peut donc lancer la production de deux lots simultanément. Le marquage initial des places P5, P6, P9 et P10 n'étant pas modifié, les ressources seront gérées convenablement. Il n'y a pas de mélange de lots car :

- Les transitions tb et tc ne laissent passer qu'un lot à la fois (unicité des réacteurs R1 et R2),
- la transition td ne peut être franchie que lorsque le réacteur R3 est disponible (un jeton dans la place P9) et ce n'est qu'après son franchissement que tb et tc peuvent être franchies une seconde fois.

Pendant que pour un lot on prépare le ferment et on chauffe le lait, un autre lot est en train de fermenter. En ayant un seul réacteur de chacun des lots, on est donc bien capable d'avoir deux lots simultanément en traitement dans l'atelier (fonctionnement de type *"pipe-line"*). L'efficacité est augmentée sans addition de matériel.

**c)** Avoir deux réacteurs de fermentation R3 se représente simplement en mettant deux jetons dans la place P9. On pourra alors avoir deux jetons dans la place P7 (mais non dans la place P8 car il n'y a toujours qu'un échangeur de chaleur R4). Physiquement les deux lots représentés par les deux jetons en P9 ne vont pas se mélanger puisqu'ils sont dans deux réacteurs différents. Par contre, avec un réseau de Petri ordinaire, le logiciel de pilotage n'est pas capable de les

différentier. Le réseau de la figure 2 représente le réseau avec le marquage initial correspondant aux questions b) et c).

Une autre solution est possible, elle consiste à dédoubler les places P9, P7 et P8 ainsi que les transitions td, te et tf. On obtient le réseau de Petri de la figure 3. Le logiciel de pilotage peut alors bien identifier et différencier les deux réacteurs de type R3, mais c'est au prix d'une forte augmentation de la taille du réseau.

d) voir RdP suivant

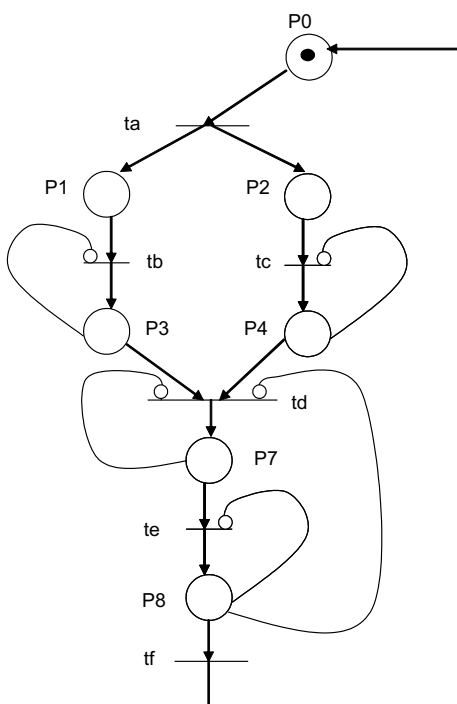
e) Par exemple ...

$$M(P3) + M(P5) = 1$$

$$M(P6) + M(P4) = 1$$

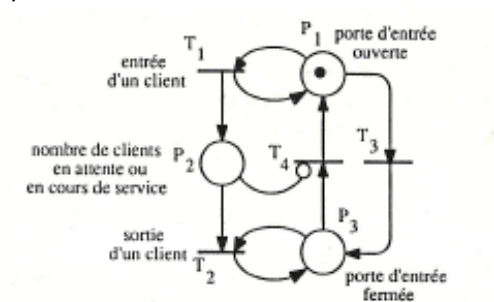
$$M(P7) + M(P8) + M(P9) = 1$$

$$M(P8) + M(P10) = 1$$

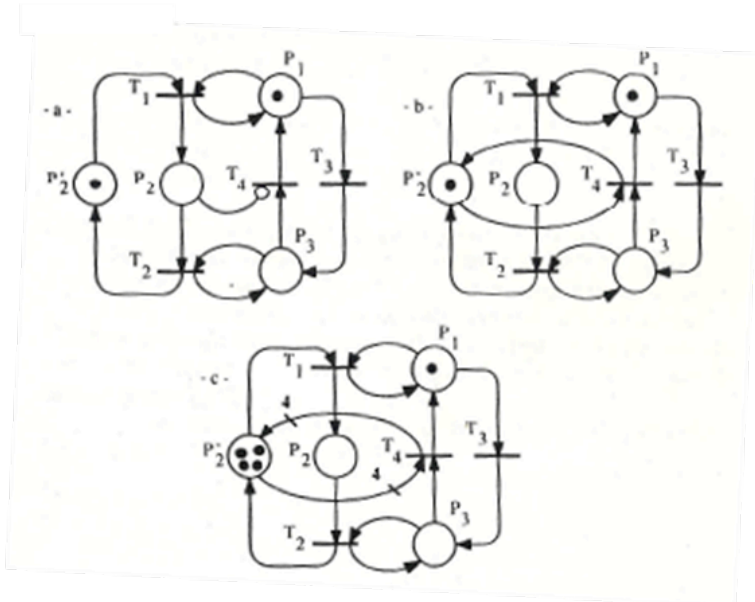


## Exercice 7. Modélisation

1)



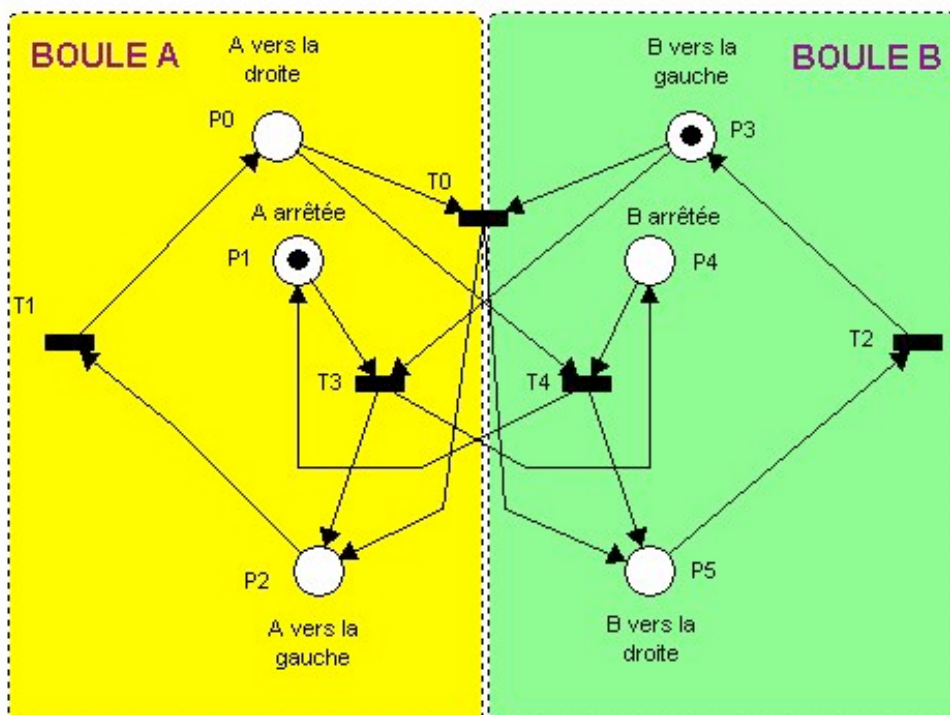
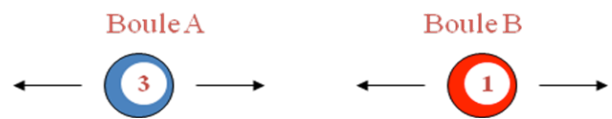
2)



### Exercice 8. Modélisation

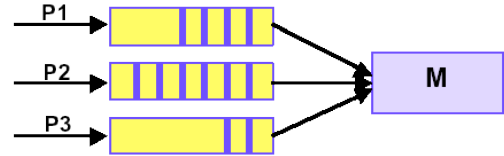
On considère **2 boules de billard** (A et B) qui se déplacent sur une même ligne parallèle à une des **bandes**. Chaque boule peut avoir **3 états** : en mouvement vers la gauche, vers la droite ou arrêtée. On demande de modéliser le comportement de ces boules par un RdP en supposant que (on considérera plusieurs états initiaux possibles) :

- une boule qui **heurte une bande** repart dans l'autre sens à la même vitesse,
- si les 2 boules sont en mouvement (elles sont supposées avoir la même vitesse) elles repartent chacune en sens inverse **quand elles se heurtent**,
- Si une boule est **arrêtée et heurtée** par l'autre, la première se met en mouvement et l'autre s'arrête (on suppose qu'il n'y a pas de ralentissement ou d'arrêt par frottement).



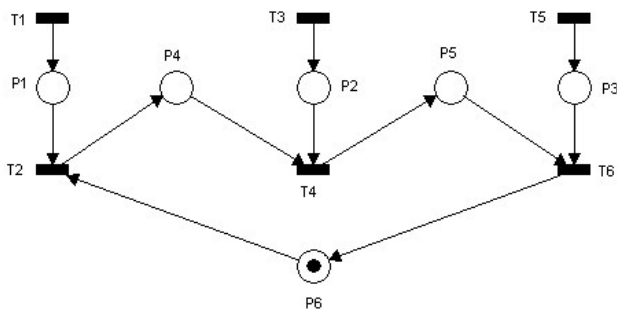
## Exercice 9. Modélisation

1) Une cellule de fabrication M est en mesure de fabriquer 3 types de produits notés P1, P2 et P3. 3 stocks de capacité infinie reçoivent ces produits devant la cellule. La cellule les fabrique dans l'ordre P1, P2, P3, P1, P2, P3, ... et la fabrication se poursuit tant qu'il n'y a pas de stock vide. Modéliser ce système par un RdP et donner son équation de comportement.



2) On s'intéresse à la même cellule de production, mais on s'autorise cette fois à fabriquer autant de produits que l'on veut d'un même type (dans la limite des stocks) tout en ne permutant que dans l'ordre P1, P2, P3. Par exemple : P1 P1 P2 P2 P3 P1 P2 P2 P2 est une séquence de production valide, P1 P1 P3 P2 P2 P3 ne l'est pas. Répondre aux 2 questions du problème 1).

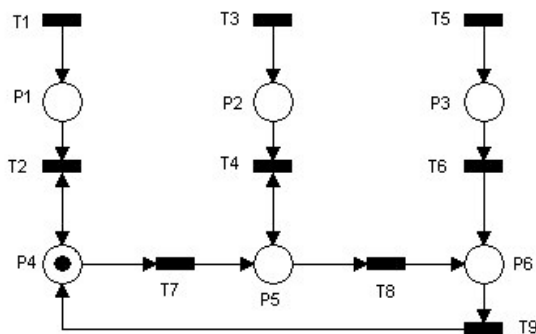
1)



avec  $W =$

|    | T1 | T2 | T3 | T4 | T5 | T6 |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| P1 | -1 | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | P1 |
| P2 | 0  | 0  | 1  | -1 | 0  | 0  | P2 |
| P3 | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | -1 | P3 |
| P4 | 0  | 1  | 0  | -1 | 0  | 0  | P4 |
| P5 | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | -1 | P5 |
| P6 | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 1  | P6 |

2)



avec  $W =$

|    | T1 | T2 | T3 | T4 | T5 | T6 | T7 | T8 | T9 |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| P1 | 1  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | P1 |
| P2 | 0  | 0  | 1  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | P2 |
| P3 | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | -1 | 0  | 0  | 0  | P3 |
| P4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | 1  | P4 |
| P5 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | -1 | 0  | P5 |
| P6 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | -1 | P6 |