

Problème 3

Navier - Stokes par Schéma de Projection

20 Janv 2004

(1)

Partie I

1) Le volume de contrôle V_n de taille $\Delta x_i \Delta y_j$:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_n} u \, dV \approx \Delta x_i \Delta y_j \frac{d}{dt} u_{ij}$$

$$\int_{P_n} p \vec{e}_n \cdot \vec{n} \, dV \approx (P_{i+1,j} - P_{i,j}) \Delta y_j.$$

On obtient donc matriciellement:

$$\underline{M}_{n,h} \frac{d}{dt} U + \underline{C}_{n,h}(U, U) U - \underline{K}_{n,h} U + \underline{G}_{n,h} P = 0$$

avec, pour $i = 1, \dots, N_x - 1$, $j = 1, \dots, N_y$:

$$(M_{n,h})_{(i,j), (i,j)} = \Delta x_i \Delta y_j \quad (\text{matrice de masse diagonale})$$

$$(G_{n,h} P)_{ij} = \Delta y_j (P_{i+1} - P_{i,j}) \quad (\text{vecteur})$$

2) La "S-forme" de ERT-PROD :

(2)

• Prediction pour U:

$$(1) \quad M_{x,h} \frac{(\tilde{U} - U^n)}{\Delta t} + \mathcal{E}_{x,h}(U^n, V^n) U^n - K_{x,h} \tilde{U} + G_{x,h} P^n = 0$$

• Prediction pour V:

$$(2) \quad M_{y,h} \frac{(\tilde{V} - V^n)}{\Delta t} + \mathcal{E}_{y,h}(U^n, V^n) V^n - K_{y,h} \tilde{V} + G_{y,h} P^n = 0$$

• Projection

$$(3) \quad M_{x,h} \frac{U^{n+1} - \tilde{U}}{\Delta t} + G_{x,h} (P^{n+1} - P^n) = 0$$

$$(5) \quad \begin{cases} D_{x,h} U^{n+1} + D_{y,h} V^{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad M_{y,h} \frac{V^{n+1} - \tilde{V}}{\Delta t} + G_{h,y} (P^{n+1} - P^n) = 0.$$

Partie II

1) L'eqt (1) donne:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\Delta t} M_{x,h} - K_{x,h} \right)}_L \tilde{U} = \underbrace{M_{x,h} \frac{U^n}{\Delta t} - \mathcal{E}_{x,h}(U^n, V^n) U^n}_{RHS}$$

Indiciellement, on obtient:

$$RHS(i, j) = \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{\Delta t} u_{i,j}^n - F_{x,h}^L(i, j)$$

Cf Probleme I.

2) D'après le pbme 2, on obtient:

(3)

$$HP(i, j) = d \frac{\sum \Delta \tilde{u}_i \Delta y_j}{\Delta t} - AP^\varepsilon(i, j)$$

$$HE(i, j) = -AE^\varepsilon(i, j), \quad HW(i, j) = -AW^\varepsilon(i, j)$$

$$HS(i, j) = -AS^\varepsilon(i, j), \quad HN(i, j) = -AN^\varepsilon(i, j)$$

$$\text{et } \overline{RHS}^\varepsilon(i, j) = \overline{RHS}(i, j)$$

$$- (\varepsilon_\mu^S(j) - 1) AS(i, j) \mu_{i, j-1}$$

$$- (\varepsilon_\mu^N(j) - 1) AN(i, j) \mu_{i, j+1}$$

$$- (\varepsilon_\mu^W(i) - 1) AW(i, j) \mu_{i-1, j}$$

$$- (\varepsilon_\mu^E(i) - 1) AE(i, j) \mu_{i+1, j}$$

Partie III

On connaît $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ et P^n .

④

On cherche U^{n+1} , V^{n+1} (à discr. nulle) et P^{n+1} .

1) D'après Eq. (3):

$$U^{n+1} = \tilde{U} - M_{x,h}^{-1} G_{x,h} (\Delta t (P^{n+1} - P^n))$$

$$\text{on pose } \phi = \frac{P^{n+1} - P^n}{2} \text{ avec } \Delta t = \frac{1}{\Delta t}$$

$$\text{dnc } U^{n+1} = \tilde{U} - M_{x,h}^{-1} G_{x,h} \phi \quad (6)$$

De même, d'après Eq. (4):

$$V^{n+1} = \tilde{V} - M_{y,h}^{-1} G_{y,h} \phi \quad (7)$$

On reporte (6) et (7) dans la continuité discrète (5):

$$\underbrace{(D_{x,h} M_{x,h}^{-1} G_{x,h} + D_{y,h} M_{y,h}^{-1} G_{y,h}) \phi}_{\text{matrice } \underline{A}_h \text{ du cours, chap. 17}} = \underbrace{(D_{x,h} \tilde{U} + D_{y,h} \tilde{V})}_{\substack{\text{RHS} \\ \text{Dérivée discrète} \\ \text{de } (\tilde{U}, \tilde{V})}}$$

On doit donc résoudre l'eqt:

$$\underline{A}_h \phi = \text{RHS} \quad (8)$$

avec, pour $i = 1, \dots, N_x$, $j = 1, \dots, N_y$

$$\text{RHS}(i,j) = \Delta y_j (\tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i-1,j}) + \Delta x_i (\tilde{v}_{i,j} - \tilde{v}_{i,j-1})$$

2) Une fois le potentiel ϕ calculé, on utilise (6) pour récupérer la vitesse U^{n+1} : (5)

pour $i = 1, \dots, N_x - 1$, $j = 1, \dots, N_y$:

$$u_{i,j}^{n+1} = \bar{u}_{i,j} - \frac{1}{\Delta x_i} (\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j})$$

Pour la vitesse V^{n+1} , on utilise Eq. (7):

pour $i = 1, \dots, N_x$; $j = 1, \dots, N_y - 1$:

$$v_{i,j}^{n+1} = \bar{v}_{i,j} - \frac{1}{\Delta y_j} (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j})$$

Pour la pression, on utilise la def de ϕ :

pour $i = 1, \dots, N_x$, $j = 1, \dots, N_y$

$$p_{i,j}^{n+1} = \alpha \phi_{i,j} + p_{i,j}^n$$

3) Supposons que l'Eq^e pour ϕ , Eq. (8), soit résolue avec un algo. itératif jusqu'à ce que la tolérance $\|RES\| \leq \epsilon$ soit vérifiée, avec $RES = RHS - A_h \phi$ le résidu.

En reportant (6) et (7) dans (5), on obtient:

$$D_{x,h} U^{n+1} + D_{y,h} V^{n+1} = RHS - A_h \phi \\ = RES$$

Ainsi, en conséquence, la divergence discrète est aussi vérifiée avec la tolérance ϵ , qui doit être

suffisamment petite pour que les pp's de conservation du schéma (p'm's I et II) soient vérifiées. (6)

Concl: La tolérance ε de l'Eq^t $A_h \phi = RHS$ permet de contrôler la divergence (u^{n+1}, v^{n+1}) .