

Probleme II

Flex $\frac{1}{EI}$ var. pos.
diffunks.

(1)

19/01/04

Partie I

$$F_{-1, \text{expl}}^d = \frac{1}{Re} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} \\ \frac{\partial v}{\partial n} \end{pmatrix}$$

1)

$$\int_{\Gamma_n} F_{-1, \text{expl}}^d \cdot \underline{n} = \frac{1}{Re} \left[\int_{\Gamma_e} \frac{\partial u}{\partial n} dy - \int_{\Gamma_w} \frac{\partial u}{\partial n} dy + \int_{\Gamma_n} \frac{\partial v}{\partial n} dx - \int_{\Gamma_s} \frac{\partial v}{\partial n} dx \right]$$

2)

$$\int_{\Gamma_e} \frac{\partial u}{\partial n} dy \approx \Delta y_j \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_e \approx \frac{\Delta y_j}{\Delta x_i} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) \quad (1)$$

$$\int_{\Gamma_w} \frac{\partial u}{\partial n} dy \approx \Delta y_j \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_w \approx \frac{\Delta y_j}{\Delta x_i} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \quad (2)$$

$$\int_{\Gamma_n} \frac{\partial v}{\partial n} dx = v_{i+1,j} - v_{i,j} \quad (3)$$

$$\int_{\Gamma_s} \frac{\partial v}{\partial n} dx = v_{i,j-1} - v_{i,j} \quad (4)$$

$$3) F_{1, \text{expl}, h}^d = \frac{1}{Re} \left[(1) - (2) + (3) - (4) \right] \quad (2)$$

en réarrangeant les termes :

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\Delta y_j}{\Delta x_{i+1}} (\mu_{i+1,j} - \mu_{i,j}) + (\sigma_{i+1,j} - \sigma_{i+1,j-1}) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{Re} \left[\frac{\Delta y_j}{\Delta x_i} (\mu_{i,j} - \mu_{i-1,j}) + (\sigma_{i,j} - \sigma_{i,j-1}) \right] \\
 &= \frac{1}{Re \Delta x_{i+1}} \times \text{Contiu}(\mu_{i+1,j}) - \frac{1}{Re \Delta x_i} \times \text{Contiu}(\mu_{i,j}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Partie II

$$F_{1, \text{impl}}^d = \frac{1}{Re} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 1) \int F_{1, \text{impl}}^d \cdot n &= \frac{1}{Re} \left[\int_{P_e} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_{P_w} \frac{\partial u}{\partial x} dy \right. \\
 &\quad \left. + \int_{P_n} \frac{\partial u}{\partial y} dx - \int_{P_s} \frac{\partial u}{\partial y} dx \right]
 \end{aligned}$$

les flux sur P_e et P_w sont déjà fait (cf (1) et (2))
il reste

$$\int_{P_n} \frac{\partial u}{\partial y} dx \approx \Delta x_i \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_n \approx \frac{\Delta x_i}{\Delta y_j} (\mu_{i,j+1} - \mu_{i,j}) \quad (5)$$

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\partial u}{\partial y} dx \cong \bar{\Delta x}_i \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j \cong \frac{\bar{\Delta x}_i}{\bar{\Delta y}_{j-1}} (u_{i,j} - u_{i,j-1}) \quad (6) \quad (3)$$

$$\text{dnc} \quad F_{x, \text{imp}}^d \cong \frac{1}{n_c} [(1) - (2) + (5) - (6)]$$

de la forme:

$$AE u_{i+1,j} + AW u_{i-1,j} + AP u_{i,j} + AN u_{i,j+1} + AS u_{i,j-1}$$

$$\text{avec :} \quad AE = \frac{1}{n_c} \frac{\Delta y_j}{\Delta x_{i+1}} \quad AW = \frac{1}{n_c} \frac{\Delta y_j}{\Delta x_i}$$

$$AN = \frac{1}{n_c} \frac{\bar{\Delta x}_i}{\bar{\Delta y}_j} \quad AS = \frac{1}{n_c} \frac{\bar{\Delta x}_i}{\bar{\Delta y}_{j-1}}$$

$$AP = -(AE + AW + AN + AS) .$$

3) évident

1) Pour $j=1$, il faut modifier (6), c.a.d.:

$$\int_{P_s} \frac{\partial u}{\partial y} du \cong \Delta y_i \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_s$$

on effectue la meth. du cours:

$$u_{i,1} \cong u_{i,0} + (y_1 - y_{1/2}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_s$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \cong \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{(y_1 - y_{1/2})}$$

$$d'au \int_{P_s} \frac{\partial u}{\partial y} du \cong \frac{\Delta y_i}{(y_1 - y_{1/2})} (u_{i,1} - u_{i,0}) \quad (7)$$

qui est de la forme (6) en posant $\Delta y_0 = y_1 - y_{1/2}$

les ~~interpolations~~ approx. (1), (2) et (5) sont inchangées.

2) Pour $j = N_y$, il faut modifier (5):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_n \cong \frac{u_{i,N_y+1} - u_{i,N_y}}{\Delta y_{N_y}} \quad (8)$$

$$\text{avec } \Delta y_{N_y} = y_{N_y+1/2} - y_{N_y}$$

Portie III

(5)

1) Pour $j=1$, on réécrit Eq. (9) sous la forme:

$$AE(i,1)u_{i+1,1} + AW(i,1)u_{i-1,1} + AP(i,1)u_{i,1} + AN(i,1)u_{i,2} \\ + \underbrace{AS(i,1) \sum_{n=1}^S u_{i,0}}_{\substack{\text{ME} \\ AS(i,1)}} = \underbrace{RHS(i,1) + (\sum_{n=1}^S u_{i,0})}_{\substack{\text{ME} \\ RHS(i,1)}} u_{i,0}$$

2) Forme générale:

$$\underbrace{AE}_{\text{ME}} u_{i+1,j} + \underbrace{AW}_{\text{ME}} u_{i-1,j} + \underbrace{AP}_{\text{ME}} u_{i,j} + \underbrace{AN}_{\text{ME}} u_{i,j+1} + \underbrace{AS}_{\text{ME}} u_{i,j-1} \\ = \widetilde{RHS}(i,j)$$

avec:

$$\underbrace{AE}_{\text{ME}}(i,j) = \sum_n^E(i) AE(i,j)$$

$$\underbrace{AW}_{\text{ME}}(i,j) = \sum_n^W(i) AW(i,j)$$

$$\underbrace{AP}_{\text{ME}}(i,j) = AP(i,j)$$

$$\underbrace{AN}_{\text{ME}}(i,j) = \sum_n^N(j) AN(i,j)$$

$$\underbrace{AS}_{\text{ME}}(i,j) = \sum_n^S(j) AS(i,j)$$

Les coeff. AE, AW, etc... sont définies dans Portie II, q 1)

$$\underbrace{RHS}_{\text{ME}}(i,j) = RHS(i,j) \\ + (\sum_n^S(j) - 1) AS(i,j) u_{i,j-1} \\ + (\sum_n^N(j) - 1) \underbrace{AN}_{\text{ME}}(i,j) u_{i,j+1} \\ + (\sum_n^W(j) - 1) AW(i,j) u_{i-1,j} \\ + (\sum_n^E(j) - 1) AE(i,j) u_{i+1,j}$$

Partie V

(6)

$$P(U^{h+1} - U^h) = 2 R^h$$

avec $R^h = \text{RHS} - \underline{\kappa}_{x,h} U^h$ le résidu.

1) initialisation: U^0 donné
 $R^0 = \text{RHS} - \underline{\kappa}_{x,h} U^0$

itérations, $h \geq 0$:
 $\underline{P} S U = R^0$
 $U^{h+1} = U^h + 2 S U$
 $R^{h+1} = \text{RHS} - \underline{\kappa}_{x,h} U^h$.

2) Les bûches à outils

a) On pose $\underline{P} = \text{diag}(\underline{\kappa}_{x,h}) = \sum_{(i,j), (i,j)} \tilde{A} P(i,j) \{_{(i,j), (i,j)}$.
d'après Eq (13).

calcul de $\underline{P} S U = R$

pour $j = 1, \dots, N_y$

pour $j = 1, \dots, N_x - 1$

$$S U(i, j) := \frac{1}{\tilde{A} P(i, j)} R(i, j)$$

fin pour

fin ~~for~~ pour.

On appelle cet algo:

$$\boxed{S U := \text{INVP}(\tilde{A} P, R)}$$

b) Operation $Y := 2X + Y$

(7)

Pour $j = 1, \dots, N_y$

Pour $i = 1, \dots, N_x - 1$

$$Y(i, j) := Y(i, j) + 2X(i, j)$$

fin Pour

fin Pour

c'est l'algo

$$X := \text{AXPY}(2, X, Y)$$

c) Operation $R = \text{RHS} - K_{n,h} U$

D'après l'Eq^t (13) de l'énoncé:

pour $j = 1, \dots, N_y$

pour $i = 1, \dots, N_x - 1$

$$R(i, j) = \text{RHS}(i, j) - \left[\tilde{A}^2_E(i, j) U(i+1, j) + \tilde{A}^2_W(i, j) U(i-1, j) + \dots \right]$$

end Pour .

end pour

c'est l'algo

$$R := \text{RES}(\text{RHS}, U, \tilde{A}^2_P, \tilde{A}^2_E, \dots)$$

3) Utilisation de la boîte à outils:

8

U est donné

$R := \text{RES}(RHS, U, \tilde{A}P, \tilde{A}E, \dots)$

ds $k = 1$ jusqu'à $k_{\max}$

$SU := \text{INVP}(\tilde{A}P, R)$

$U := \text{AXPY}(\alpha, SU, U)$

$R := \text{RES}(R, U, \tilde{A}P, \tilde{A}E, \dots)$

end pour.

4) Calcul du produit scalaire $\Theta = U^T V$

$AUX := 0$

pour $j = 1, \dots, N_y$

pour $i = 1, \dots, N_x - 1$

$AUX := AUX + U(i, j) * V(i, j)$

End Pour

End pour

$\Theta := AUX$.

Opérateur: $\Theta := \text{PRODSCAL}(U, V)$.