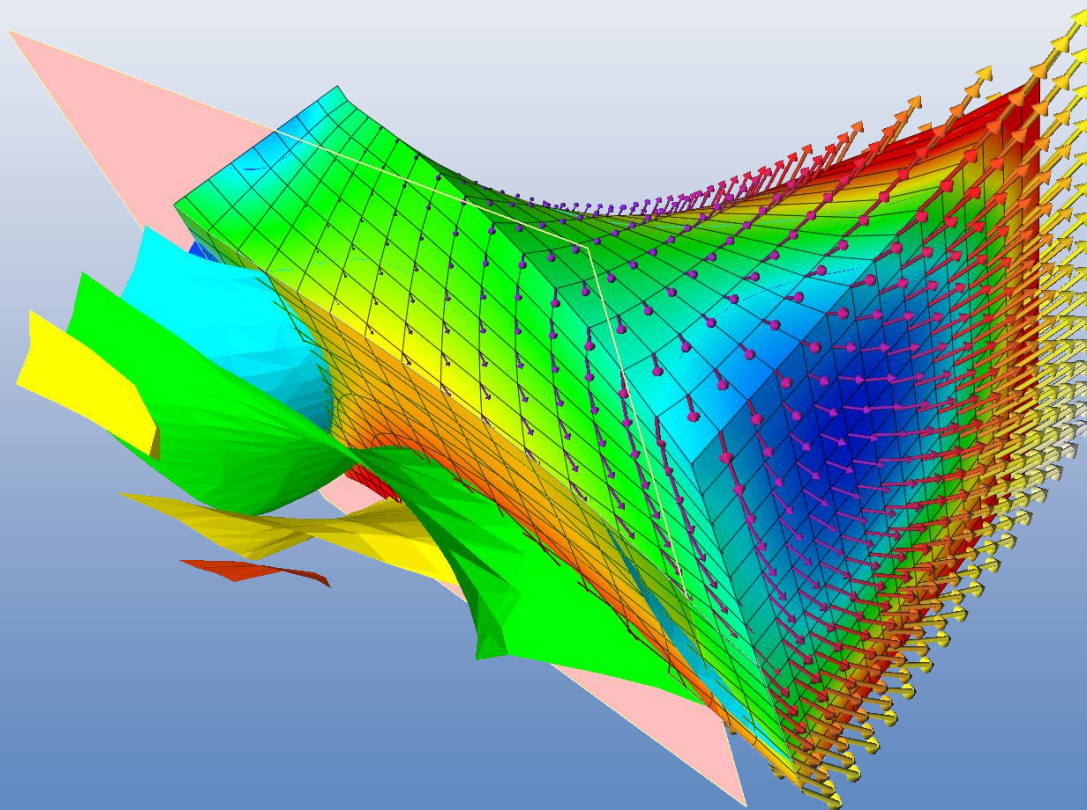


Mécanique des Milieux Continus (MMC)

ENSEM 1A NRJ - FISE

Cédric LAURENT, Professeur des universités
cedric.laurent@univ-lorraine.fr



DÉROULEMENT

CM 1 : Présentation, objectifs et rappels
CM 2 : Rappels de mécanique
TD1 : Stabilité du barrage pesant
CM 3 : Boîte à outils et représentation du mouvement
TD2 : Etude d'écoulements classiques
CM 4 : Déformation du milieu continu
TD3 : Ecrasement d'un pneu plein
CM 5 : Contraintes dans le milieu continu
TD4 : Contraintes dans un réservoir sous pression
Test de novembre
CM 6 : Loi de comportement d'un matériau solide
TD 5 : Essai de traction uniaxiale
CM 7 : Méthodes de résolution et dimensionnement
TD 6 : Dimensionnement d'un arbre de transmission
CM 8 : Introduction à la mécanique des fluides
TD 7 : Frottement fluide autour du volant d'inertie
Examen

EVALUATION

La note finale de cet EC sera calculée à partir des résultats du test de novembre à hauteur de 25% et de l'examen final à hauteur de 75%.

$$\text{note finale} = \text{novembre} \times 0.25 + \text{janvier} \times 0.75$$

REMERCIEMENTS

Ce cours de MMC est le fruit de la synthèse d'une douzaine de cours d'universités étrangères ou d'écoles d'ingénieurs françaises. Je remercie tout particulièrement Rachid Rahouadj (ENSEM), Emmanuel Plaut (ENSMN), Jean-Philippe Ponthot (Université de Liège), Nicolas Rimbert (ENSEM) pour avoir inspiré des parties de ce cours et aidé à sa construction.

COMPLÉMENTS AU COURS CONSULTABLES EN LIGNE

- <http://www.continuummechanics.org/>
- <http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc/>
- <http://www.mmaya.fr/MMC/>
- http://mms2.ensmp.fr/mmc_paris/mmc_paris.php

En complément du présent document, la consultation des nombreuses ressources disponible sur la page *Arche* du cours est largement recommandée pour assimiler les contenus présentés ci-après.

Présentation du cours.....	4
Positionnement	4
Qu'est-ce qu'un milieu continu ?.....	5
Quelles sont les applications ?	6
1. Quelques rappels de mécanique	8
1.1. Positionnement dans l'espace.....	8
1.1.1. Espace vectoriel utilisé.....	8
1.1.1. Le repérage des points.....	9
1.1.2. Convention d'Einstein	10
1.1.3. Systèmes de coordonnées	11
1.1.4. Changement de base.....	13
1.2. Mécanique du point matériel	15
1.2.1. Cinématique du point.....	15
1.2.2. Principes fondamentaux.....	17
1.3. Mécanique du solide indéformable.....	23
1.3.1. Du système de points matériels au solide indéformable	23
1.3.2. Rotation du solide autour d'un axe fixe	26
1.3.3. Cinématique du solide indéformable	29
1.3.4. Dynamique du solide indéformable.....	31
2. Introduction au calcul tensoriel.....	37
2.1. Définition générale des tenseurs	37
2.1.1. Pourquoi les tenseurs ?.....	37
2.1.2. Notion de produit tensoriel	38
2.1.3. Changement de base d'un tenseur	40
2.1.4. Algèbre tensorielle	41
2.1.5. Ecriture matricielle d'un tenseur d'ordre 1 ou 2.....	45
2.1.6. Les tenseurs d'ordre 2 comme applications linéaires ou bilinéaires.....	49
2.1.7. Quelques propriétés des tenseurs d'ordre 2	52
2.2. Analyse tensorielle	53
2.2.1. Champs de tenseurs.....	53
2.2.2. Gradient d'un champ de tenseurs.....	54
2.2.3. Divergence d'un champ de tenseurs.....	59
2.2.4. Laplacien d'un champ de tenseurs.....	63
2.2.5. Rotationnel d'un champ de tenseurs.....	64
3. Cinématique des milieux continus	68
3.1. Représentation du mouvement.....	68
3.1.1. Repérage des points matériels en mouvement	68
3.1.2. Description lagrangienne ou eulérienne?.....	70
3.1.3. Champs de déplacement, de vitesse et d'accélération.....	74
3.1.4. Quelques caractéristiques de la transformation.....	78
3.1.5. Gradient de la transformation	81
3.1.6. Décomposition polaire.....	84
3.1.7. Transport d'un volume.....	85
3.1.1. Taux de dilatation volumique.....	86
3.2. Déformation du milieu continu	87
3.2.1. Recherche d'un tenseur des déformations.....	87
3.2.2. Cas des transformations infinitésimales.....	90
3.2.3. Mouvement de corps rigide	95
3.2.4. Conditions de compatibilité d'un champ de déformations linéarisé.....	96
3.2.5. Taux de déformation.....	98
3.2.6. Conservation de la masse	99
4. Dynamique des milieux continus et modélisation des efforts.....	104
4.1. Principe des puissances virtuelles (PPV)	104

4.2.	Représentation des efforts intérieurs	107
4.2.1.	Position du problème	107
4.2.2.	Théorie du premier gradient	108
4.2.3.	Equation de la dynamique	110
4.2.4.	Théorème de l'énergie cinétique	111
4.3.	Tenseur des contraintes de Cauchy	113
4.3.1.	Vecteur-contrainte.....	113
4.3.2.	Tenseur des contraintes de Cauchy	114
4.3.3.	Interprétation des composantes du tenseur des contraintes	117
4.3.4.	Equilibre: équation de la dynamique.....	118
4.3.1.	Propriétés du tenseur des contraintes de Cauchy.....	120
5.	Note technique : les conditions aux limites.....	123
5.1.	Condition aux limites en efforts ou déplacements ?.....	123
5.2.	Condition aux limites écrite localement ou globalement ?	123
5.3.	Surface libre	124
5.4.	Tableau récapitulatif.....	125
6.	Application aux matériaux solides : élasticité linéaire	128
6.1.	Constatations expérimentales.....	128
6.1.1.	L'essai de traction	128
6.1.2.	Limite d'élasticité	130
6.1.3.	Cas unidimensionnel : définition du module d'Young	130
6.2.	Matériau élastique linéaire isotrope	131
6.2.1.	Considérations générales	131
6.2.2.	Loi de comportement élastique linéaire isotrope	132
6.2.3.	Interprétation du module d'Young et du coefficient de Poisson	133
6.2.4.	Notation de Voigt	135
6.3.	Méthodes de résolution d'un problème d'élastostatique	136
6.3.1.	Formulation du problème	137
6.3.2.	Principe de Saint-Venant.....	138
6.3.3.	Approche en déplacement.....	140
6.3.4.	Approche en contrainte.....	140
6.3.5.	Une méthode très utilisée : la méthode des éléments finis	141
6.4.	Introduction au dimensionnement des solides et structures	143
6.4.1.	Le dimensionnement.....	143
6.4.1.	Cas unidimensionnel.....	143
6.4.1.	Notion de contrainte équivalente	144
6.4.2.	Surface de charge.....	145
6.4.3.	Contrainte équivalente de Von Mises.....	145
7.	Applications aux fluides	149
7.1.	Cinématique des fluides	149
7.1.1.	Description de la transformation.....	149
7.1.2.	Vitesse de déformation	150
7.1.3.	Vorticité et tourbillon	151
7.2.	Lois de conservation	152
7.2.1.	Masse.....	152
7.2.2.	Quantité de mouvement.....	154
7.3.	Fluides newtoniens : loi de comportement	156
7.4.	Equation de Navier-Stokes	157
7.4.1.	Démonstration et énoncé	157
7.4.2.	Utilisation	158
7.4.3.	Résolution numérique : la CFD (Computational Fluid Dynamics)	161
	Résumé des notations utilisées	163

Présentation du cours

Positionnement

La mécanique du point matériel enseignée au lycée permet de prédire la cinématique (position, vitesse, accélération) et la dynamique (relations entre forces et mouvement) d'un **point** soumis à un environnement mécanique donné. Si ces outils sont suffisants pour décrire certains phénomènes (trajectoires des planètes par exemple), ils ne permettent pas de décrire la **rotation** des corps: c'est la mécanique des solides **indéformables** qui traite cet aspect, en prenant en compte notamment l'inertie et les moments des solides dans les équations qui régissent leur mouvement. Les premières sections du présent cours contiennent un **rappel très succinct des notions élémentaires** de mécanique qui seront utilisées et généralisées ensuite. Si cette seconde vision de la mécanique permet de décrire davantage de problèmes, elle ne permet toujours pas de traiter des phénomènes tels que la **mise en forme** d'une bouteille de verre ou l'**écoulement** de l'air autour d'une aile d'avion.

Un cadre plus général est donc nécessaire afin de traiter ce type de problématique: la **mécanique des milieux continus** (MMC) offre un cadre physique et mathématique permettant de résoudre des problèmes faisant intervenir **la déformation de corps soumis à un environnement mécanique donné**. Les simulations numériques, aujourd'hui très utilisées pour le calcul de structures et le dimensionnement de pièces mécaniques ou la modélisation des écoulements, ne doivent leur succès qu'à la **capacité de la MMC de décrire les relations qui régissent la déformation d'un corps soumis à un environnement mécanique**. La maîtrise de cette discipline, et des hypothèses qui peuvent ou ne peuvent pas être formulées selon le phénomène à décrire, est donc un **fondement nécessaire à l'ingénieur** qui sera amené à manipuler de tels outils.

Afin d'aborder **ce nouveau chapitre de la physique** qu'est la MMC, il paraît nécessaire de rappeler tout d'abord les notions fondamentales sur la mécanique du point et du solide indéformable: c'est l'objet du chapitre 1. Il s'agira ensuite de

s'approprier un certain bagage mathématique qui va faire l'objet du chapitre 2. Ensuite l'intérêt se portera sur la **cinématique** du milieu continu puis sur sa **dynamique**, avant d'étudier les cas particuliers des matériaux **solides** et **fluides** et leurs comportements.

Qu'est-ce qu'un milieu continu ?

La matière qui constitue les fluides et solides qui nous entourent est évidemment de **nature discrète** à l'échelle microscopique. Seulement, si on se place à une échelle suffisamment grande par rapport aux hétérogénéités de la matière, celle-ci peut être traitée comme un **milieu continu** : c'est une image de la réalité (Figure 1).

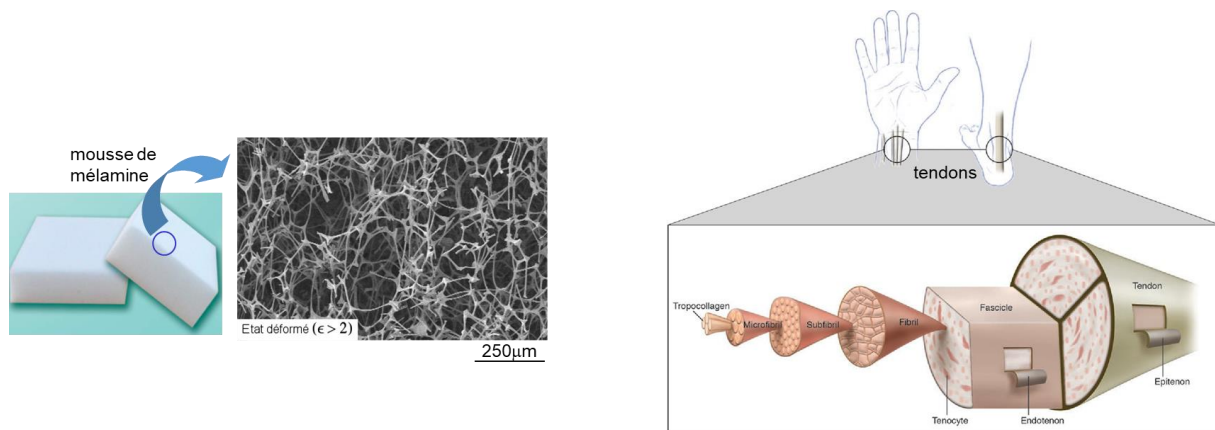


Figure 1 : Certains milieux peuvent être considérés continus à une certaine échelle, mais restent discontinus d'un point de vue microscopique. A gauche : une mousse de polymère ; à droite : un tendon.

Si on prend en revanche une échelle « trop » macroscopique, nous ne pouvons plus prétendre à exprimer l'état **local** de la matière, et on « moyenne » excessivement les hétérogénéités de l'état mécanique au sein du matériau.

L'hypothèse de milieu continu n'est donc valide qu'à condition de se placer à une échelle **suffisamment grande** pour que les variations locales des champs dues à l'hétérogénéité de la matière ne soient pas observables, mais **suffisamment petite** pour pouvoir parler de matière et non d'un système matériel. On se doute bien que cette définition déjà floue devient réellement problématique lorsqu'il s'agit d'étudier un milieu composé de fibres ou de grains...

Les matériaux (**fluides ou solides**, la distinction ne viendra qu'à la fin de ce cours d'introduction) qui seront étudiés seront considérés **homogènes** à l'échelle d'un **Volume Élémentaire Représentatif (VER)**, dont la taille dépend du type de matériau que l'on considère.

Quelles sont les applications ?

Comme souligné ci-dessus, la **simulation numérique** a pris une place conséquente dans les missions de l'ingénieur actuelles. Ces simulations n'ont de sens cependant que si une **validation** par l'expérience vient valider les résultats obtenus. Ce cours sera donc tourné vers l'apprentissage des outils nécessaires à **poser proprement le problème** avant de réaliser de telles simulations, et à **comprendre les résultats** qui en seront issus. Les méthodes numériques et les codes de calculs nécessaires seront vu ultérieurement dans le cursus ENSEM.

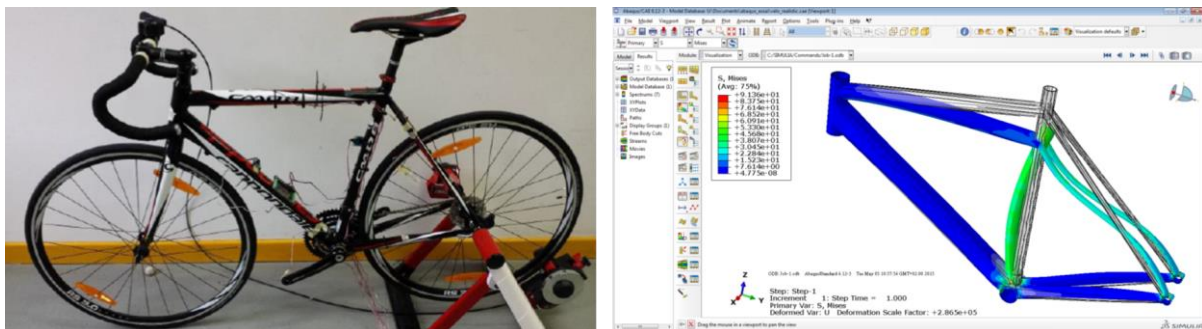
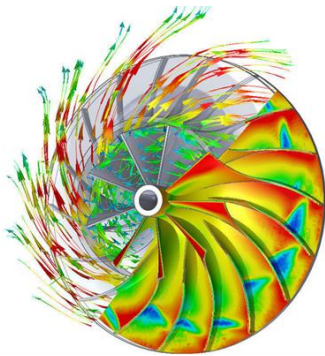


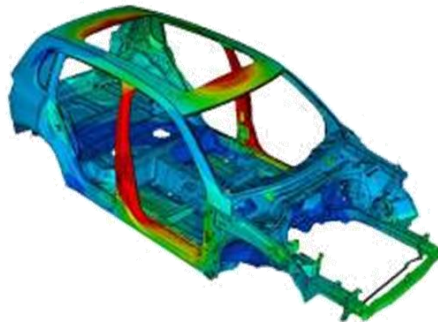
Figure 2 : Exemple d'étude réalisé à l'ENSEM en 2A et/ou 3A : étude expérimentale (gauche) et numérique (droite) de la déformation d'un cadre de vélo. Ces deux aspects nécessitent les notions de MMC qui seront abordés dans ce cours.

Une attention particulière sera également apportée à l'étude **d'essais expérimentaux** permettant de valider de telles simulations, ou permettant de **caractériser le comportement** des matériaux étudiés.

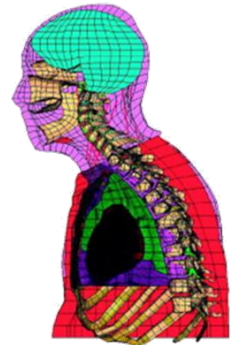
Les applications de ce type d'études en **recherche** ou dans l'**industrie** sont nombreuses : quelques exemples sont donnés ci-dessous et serviront d'illustrations aux concepts théoriques abordés dans ce cours.



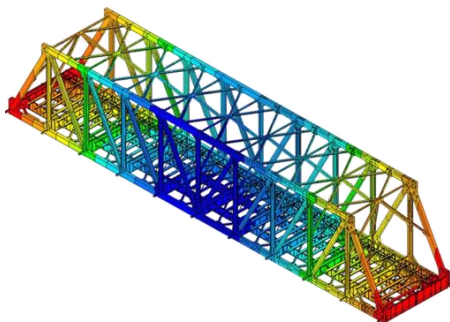
Etude de l'écoulement d'eau autour d'une turbine



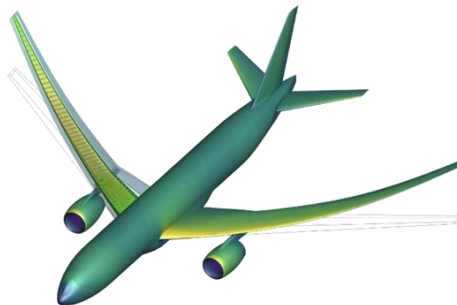
Dimensionnement d'un châssis d'automobile



Modèle biomécanique pour l'analyse de risque de blessure



Dimensionnement d'une structure en treillis pour le génie civil



Etude de la flexion d'ailes d'avion



Etude de l'écoulement d'air autour d'une éolienne

Figure 3 : Quelques exemples d'applications industrielles nécessitant les notions de mécanique de milieux continus abordées dans ce cours.

1. Quelques rappels de mécanique

1.1. Positionnement dans l'espace

1.1.1. Espace vectoriel utilisé

Dans toute la suite, l'espace physique que nous allons considérer est **l'espace vectoriel euclidien orienté** $\mathbb{R}^3$. Les éléments de cet espace, appelés *vecteurs*, seront soulignés une fois : ainsi on notera par exemple $\underline{x}$ et $\underline{y}$ deux éléments de cet espace. Tout ce qui suit dans ce cours peut néanmoins être généralisé à d'autres espaces, ce qui sortirait sort du cadre de l'introduction qui est faite ici.

Un vecteur $\underline{x}$ est **souligné une fois** : en s'avancant un peu sur les sections suivantes, ceci s'explique par le fait qu'un vecteur est un tenseur d'ordre 1. Un tenseur d'ordre 0 ne sera pas souligné, un tenseur d'ordre 2 sera souligné 2 fois, etc...

L'espace utilisé est muni d'un **produit scalaire**, fonction de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ notée par un point $\cdot$, qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}(\alpha \underline{x}) \cdot \underline{y} &= \alpha (\underline{x} \cdot \underline{y}) \\(\underline{x} + \underline{y}) \cdot \underline{z} &= \underline{x} \cdot \underline{z} + \underline{y} \cdot \underline{z} \\ \underline{x} > 0 &\Rightarrow \underline{x} \cdot \underline{x} > 0 \quad ; \quad \underline{x} \cdot \underline{x} = 0 \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}\end{aligned}$$

Le produit scalaire entre les vecteurs non nuls $\underline{x}$ et $\underline{y}$ s'écrit :

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \|\underline{x}\| \|\underline{y}\| \cos \theta(\underline{x}, \underline{y}) \quad \text{avec la norme } \|\underline{x}\| = (\underline{x} \cdot \underline{x})^{1/2}$$

où $\theta(\underline{x}, \underline{y})$ est l'angle entre $\underline{x}$ et $\underline{y}$ lorsque leurs origines coïncident.

On peut également définir le **produit vectoriel** entre deux vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{y}$, qui est une fonction de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ notée par le symbole $\wedge$ et qui satisfait les propriétés ;

$$\begin{aligned}(\alpha \underline{x}) \wedge \underline{y} &= \alpha (\underline{x} \wedge \underline{y}) \\(\underline{x} + \underline{y}) \wedge \underline{z} &= \underline{x} \wedge \underline{z} + \underline{y} \wedge \underline{z}\end{aligned}$$

Le vecteur $\underline{z} = \underline{x} \wedge \underline{y}$ est **perpendiculaire** aux deux vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{y}$, et la base formée par les trois vecteurs $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ est **directe**. La norme du vecteur $\underline{z} = \underline{x} \wedge \underline{y}$ est telle que :

$$\|\underline{z}\| = \|\underline{x} \wedge \underline{y}\| = \|\underline{x}\| \|\underline{y}\| \sin \theta(\underline{x}, \underline{y})$$

1.1.1. Le repérage des points

Dans l'espace vectoriel euclidien, l'observateur est réputé immobile et il est appelé **référentiel** $\mathcal{R}$. Cet observateur utilise un **repère orthonormé direct** (en général cartésien, cylindrique ou sphérique) noté R pour repérer les positions des objets matériels dans cet espace. Ce repère, qui est fixe dans $\mathcal{R}$, est caractérisé par un point d'origine et trois vecteurs formant une **base orthonormée directe** telle que :

$$\text{si } i \neq j, \text{ alors } \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = 0$$

$$\text{si } i = j, \text{ alors } \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = 1$$

On peut introduire dès maintenant le **symbole de Kronecker** δ_{ij} qui permet de reformuler la condition précédente plus élégamment :

$$\forall i, j \quad \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce repère, un vecteur quelconque $\underline{x}$ peut être repéré par ses **composantes** x_1, x_2, x_3 de sorte que :

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \underline{e}_i = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$$

De même, un point quelconque M peut être repéré par ses **coordonnées** x_1, x_2, x_3 qui sont les **composantes** du vecteur position $\underline{OM}$ dans le repère R :

$$\underline{OM} = \sum_{i=1}^3 x_i \underline{e}_i = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$$

Il apparaît bien évident ci-dessus que le vecteur possède trois composantes scalaires sur une base donnée de $\mathbb{R}^3$. Ces composantes changent si l'on change de base : le vecteur, lui, n'a pourtant pas changé : le vecteur est un **objet intrinsèque**. On ne devra en aucun cas par la suite mélanger les notations suivantes :

A retenir 1-1

$\underline{x}$: vecteur

x_i : composante du vecteur selon la direction $\underline{e}_i$

$$[\underline{x}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \text{vecteur-colonne des composantes de } \underline{x} \text{ dans la base } (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$$

1.1.2. Convention d'Einstein

Comme l'espace physique sera toujours $\mathbb{R}^3$ en 3D, un indice de coordonnées varie systématiquement de 1 à 3, et le signe somme ci-dessus peut paraître inutile. Pour alléger les notations, nous adopterons donc par la suite la **convention de sommation sur les indices répétés** dite **convention d'Einstein**.

A retenir 1-2

Lorsqu'un indice i apparaît deux fois dans la même expression, l'expression doit s'entendre comme la somme obtenue en donnant successivement à cet indice les valeurs : $i=1,2,3$.

L'indice répété est dit « **muet** », il peut changer de nom.

Exemple 1-1

Prenons quelques exemples où des indices sont répétés:

$$a_i b_{ij} c_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_{ij} c_j = a_1 b_{11} c_1 + a_1 b_{12} c_2 + a_1 b_{13} c_3 + a_2 b_{21} c_1 + a_2 b_{22} c_2 + a_2 b_{23} c_3 + a_3 b_{31} c_1 + a_3 b_{32} c_2 + a_3 b_{33} c_3$$

Les composantes du vecteur position $\underline{x}$ peuvent dorénavant apparaître de façon très compacte:

$$\underline{x} = x_i \underline{e}_i$$

Ainsi, le **produit scalaire** défini précédemment peut s'écrire dorénavant :

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = (x_i \underline{e}_i) \cdot (y_j \underline{e}_j) = x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

De même, la **norme** d'un vecteur peut facilement s'écrire :

$$\|\underline{x}\|^2 = \underline{x} \cdot \underline{x} = x_i x_i = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

1.1.3. Systèmes de coordonnées

L'étudiant issu de classes préparatoires est familier avec les différents systèmes des coordonnées orthonormés fréquemment utilisés en physique : on va en faire ici un rappel très succinct.

1.1.3.1 Coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, la position du point M s'écrit :

$$\underline{OM} = \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 = x_i \underline{e}_i$$

Un vecteur quelconque $\underline{a}$ dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ s'écrit $\underline{a} = a_i \underline{e}_i$.

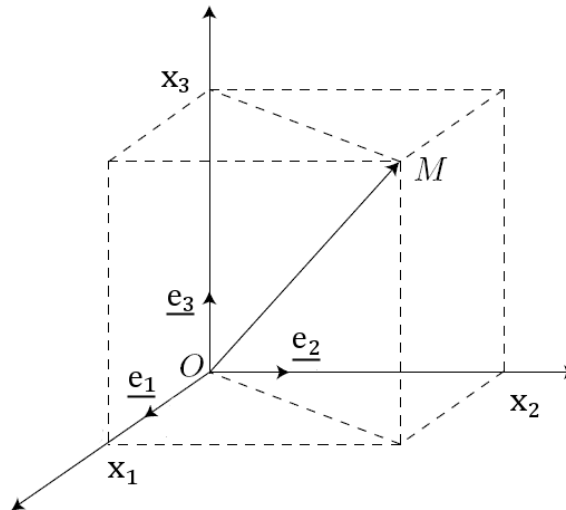


Figure 4: Coordonnées cartésiennes.

1.1.3.2 Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, la position du point M s'écrit :

$$\underline{OM} = \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 = r \cos \theta \underline{e}_1 + r \sin \theta \underline{e}_2 + z \underline{e}_3$$

La base locale en un point est donnée par:

$$\underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2$$

$$\underline{e}_\theta = -\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2$$

$$\underline{e}_z = \underline{e}_3$$

Par conséquent on a le vecteur position : $\underline{OM} = r \underline{e}_r + z \underline{e}_z$

Un vecteur quelconque $\underline{a}$ dans cette base locale s'écrit $\underline{a} = a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_z \underline{e}_z$.

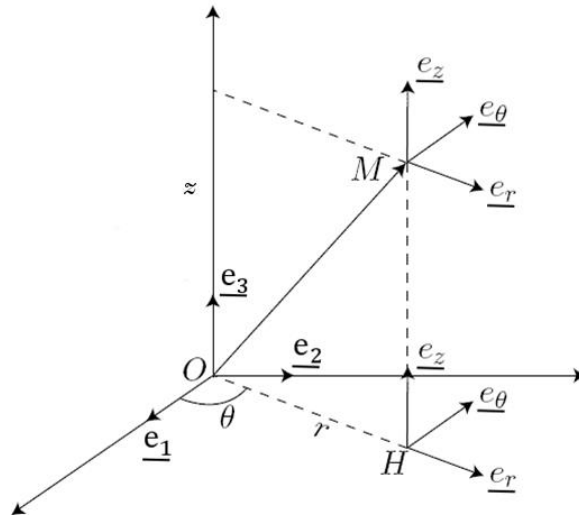


Figure 5: Coordonnées cylindriques.

1.1.3.3 Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, la position du point M s'écrit :

$$\begin{aligned}\underline{OM} = \underline{x} &= x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 \\ &= r \sin \theta \cos \varphi \underline{e}_1 + r \sin \theta \sin \varphi \underline{e}_2 + r \cos \theta \underline{e}_3 = r \underline{e}_r\end{aligned}$$

Un vecteur quelconque $\underline{a}$ dans cette base locale s'écrira $\underline{a} = a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_\varphi \underline{e}_\varphi$

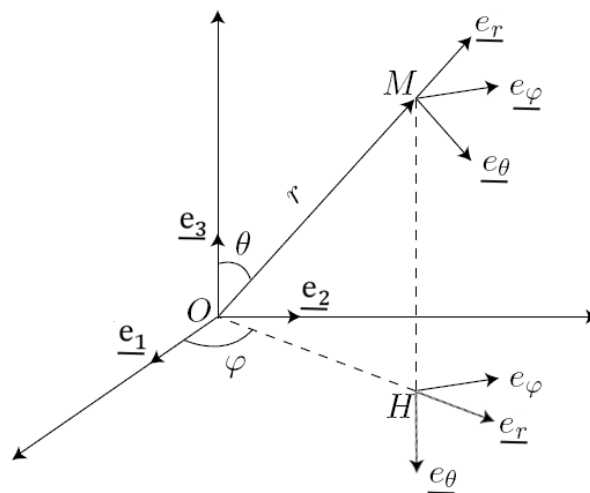


Figure 6: Coordonnées sphériques.

1.1.4. Changement de base

Un vecteur est un élément **intrinsèque**, et ne dépend pas du choix **arbitraire** de la base orthonormée utilisée. On peut donc écrire les composantes du vecteur quelconque $\underline{a}$ dans des bases orthonormées quelconques :

$$\underline{a} = a_i \underline{e}_i = a_i^* \underline{e}_i^*$$

Les bases sont décrites par des vecteurs, qui eux même peuvent être écrits dans une autre base:

$$\begin{cases} \underline{e}_1 = P_{11}^* \underline{e}_1^* + P_{12}^* \underline{e}_2^* + P_{13}^* \underline{e}_3^* \\ \underline{e}_2 = P_{21}^* \underline{e}_1^* + P_{22}^* \underline{e}_2^* + P_{23}^* \underline{e}_3^* \\ \underline{e}_3 = P_{31}^* \underline{e}_1^* + P_{32}^* \underline{e}_2^* + P_{33}^* \underline{e}_3^* \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \underline{e}_1^* = P_{11} \underline{e}_1 + P_{12} \underline{e}_2 + P_{13} \underline{e}_3 \\ \underline{e}_2^* = P_{21} \underline{e}_1 + P_{22} \underline{e}_2 + P_{23} \underline{e}_3 \\ \underline{e}_3^* = P_{31} \underline{e}_1 + P_{32} \underline{e}_2 + P_{33} \underline{e}_3 \end{cases}$$

soit en utilisant la convention d'Einstein :

$$\underline{e}_i = P_{ij}^* \underline{e}_j^* \quad \text{ou} \quad \underline{e}_i^* = P_{ij} \underline{e}_j$$

P et P^* représentent les **matrices de passage** entre les différentes bases.

Il est facile de voir que les composantes P_{ij} et P_{ij}^* correspondent aux produits scalaires entre une base et l'autre :

$$\begin{cases} \underline{e}_i = P_{ij}^* \underline{e}_j^* \\ \underline{e}_j^* = P_{ji} \underline{e}_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j^* = P_{ij}^* \underline{e}_j^* \cdot \underline{e}_j^* = P_{ij}^* \\ \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j^* = P_{ji} \underline{e}_i \cdot \underline{e}_i = P_{ji} \end{cases} \Rightarrow P^T = P^*$$

De plus, on peut facilement faire le raisonnement suivant :

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} = \underline{e}_i \cdot (P_{jk}^* \underline{e}_k^*) = P_{jk}^* (\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k^*) = P_{jk}^* (\underline{e}_i \cdot (P_{kl} \underline{e}_l)) = P_{jk}^* P_{kl} (\underline{e}_i \cdot \underline{e}_l) = P_{jk}^* P_{kl} \delta_{il} \Rightarrow \delta_{jl} = P_{jk}^* P_{kl} \Rightarrow P^* = P^{-1}$$

On vient de montrer par conséquent que les matrices P et P^* étaient **orthogonales**, c'est-à-dire qu'on peut écrire :

$$P^T = P^{-1} \quad \text{et} \quad (P^*)^T = (P^*)^{-1}$$

Par conséquent, on vient de montrer qu'un vecteur quelconque $\underline{a}$ écrit dans une première base orthonormée peut s'écrire dans une seconde base orthonormée selon la relation :

$$\underline{a} = a_i \underline{e}_i \Rightarrow \underline{a} = a_i P_{ij}^* \underline{e}_j^* \Rightarrow a_j^* = a_i P_{ij}^*$$

avec P^* la matrice de passage orthogonale contenant les coordonnées de l'ancienne base en fonction de la nouvelle base.

Inversement, on peut passer de la seconde base à la première en écrivant la relation :

$$\underline{a} = a_i^* \underline{e}_i^* \Rightarrow \underline{a} = a_i^* P_{ij} \underline{e}_j \Rightarrow a_j = a_i^* P_{ij}$$

avec P la matrice de passage orthogonale contenant les coordonnées de la nouvelle base en fonction de l'ancienne base.

Exemple 1-2

Pour illustrer ce qui vient d'être dit précédemment, prenons le cas simple et bidimensionnel d'une rotation de la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ vers la base $(\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*)$ (Figure 7).

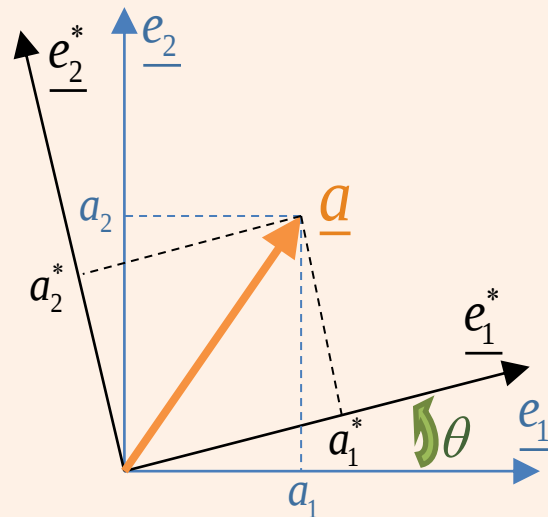


Figure 7: Exemple de changement de repère dans le plan

Le vecteur $\underline{a}$ a pour composantes dans les deux repères :

$$\begin{cases} \underline{a} = a_i \underline{e}_i = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 \\ \underline{a} = a_i^* \underline{e}_i^* = a_1^* \underline{e}_1^* + a_2^* \underline{e}_2^* \end{cases}$$

Il est facile d'exprimer l'une des bases dans l'autre base :

$$\begin{cases} \underline{e}_1 = \cos \theta \underline{e}_1^* - \sin \theta \underline{e}_2^* \\ \underline{e}_2 = \sin \theta \underline{e}_1^* + \cos \theta \underline{e}_2^* \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \underline{e}_1^* = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2 \\ \underline{e}_2^* = -\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2 \end{cases}$$

On en déduit les deux matrices P^* et P :

$$P^* = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

On vérifie donc facilement les relations $P^* = P^T$ et $P^* = P^{-1}$.

On peut donc passer facilement des coordonnées a_i aux coordonnées a_i^* en utilisant l'une ou l'autre de ces matrices :

$$\begin{aligned} a_j^* = a_i P_{ij}^* = P_{ji} a_i &\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1^* = \cos \theta a_1 + \sin \theta a_2 \\ a_2^* = -\sin \theta a_1 + \cos \theta a_2 \end{cases} \\ a_j = a_i^* P_{ij} = P_{ji}^* a_i^* &\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \cos \theta a_1^* - \sin \theta a_2^* \\ a_2 = \sin \theta a_1^* + \cos \theta a_2^* \end{cases} \end{aligned}$$

1.2. Mécanique du point matériel

On considère ici un *point matériel* dotée d'une masse m . On fait donc ici abstraction de la forme de l'objet ou de la répartition de sa masse. Cette approximation a un sens si les dimensions d'un objet sont très petites devant le mouvement qu'il parcourt (e.g. planètes) ou si on ne s'intéresse qu'au mouvement du centre de masse d'un objet sans se soucier de son éventuelle rotation autour de ce centre (e.g. ballon).

1.2.1. Cinématique du point

1.2.1.1 Vecteur position

La **position** d'un point matériel noté M s'écrit comme rappelé précédemment :

$\underline{OM} = x_i \underline{e}_i = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$	dans un repère cartésien
$\underline{OM} = r \underline{e}_r + z \underline{e}_z$	dans un repère cylindrique
$\underline{OM} = r \underline{e}_r$	dans un repère sphérique

1.2.1.2 Vecteur vitesse

On définit la **vitesse** du point matériel par la dérivée temporelle du vecteur position dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$.

Dans le cas où on utilise un repère cartésien (fixe dans $\mathcal{R}$) on a alors :

$$\underline{v} = \underline{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \frac{d(x_i \underline{e}_i)}{dt} = \frac{d(x_i)}{dt} \underline{e}_i = \dot{x}_i \underline{e}_i \quad (\text{repère cartésien})$$

Dans le cas d'un repère cylindrique on obtient :

$$\underline{v} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \frac{d(r \underline{e}_r + z \underline{e}_z)}{dt} = \frac{dr}{dt} \underline{e}_r + r \frac{d\underline{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \underline{e}_z + z \frac{d\underline{e}_z}{dt} = \dot{r} \underline{e}_r + r \frac{d\underline{e}_r}{dt} + \dot{z} \underline{e}_z$$

Il convient dans ce cas de se rappeler que $\underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2$ et donc :

$$\frac{d\underline{e}_r}{dt} = \frac{d \cos \theta}{dt} \underline{e}_1 + \frac{d \sin \theta}{dt} \underline{e}_2 = -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \underline{e}_1 + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \underline{e}_2 = \dot{\theta} \overbrace{(-\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2)}^{\underline{e}_\theta} = \dot{\theta} \underline{e}_\theta$$

et donc au final :

$$\underline{v} = \underline{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_\theta + \dot{z} \underline{e}_z \quad (\text{repère cylindrique})$$

En effectuant la même démarche en coordonnées sphériques on arrive à :

$$\underline{v} = \underline{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi \quad (\text{repère sphérique})$$

1.2.1.3 Vecteur accélération

On définit l'**accélération** du point matériel comme la dérivée temporelle du vecteur vitesse dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$.

En suivant la démarche qui précède on arrive naturellement à :

$$\underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d\underline{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d^2 \underline{OM}}{dt^2} = \ddot{x}_i \underline{e}_i = \ddot{x}_i \underline{e}_i \quad (\text{repère cartésien})$$

$$\underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) \underline{e}_r + \left(2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} \right) \underline{e}_\theta + \ddot{z} \underline{e}_z \quad (\text{repère cylindrique})$$

$$\begin{aligned} \underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = & \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) \underline{e}_r \\ & + \left(2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \underline{e}_\theta \\ & + \left(r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + 2r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \right) \underline{e}_\varphi \end{aligned} \quad (\text{repère sphérique})$$

Exemple 1-3

Exemple: On considère le mouvement rectiligne uniformément accéléré, pour lequel on a : $\underline{a} = \underline{g}$

Par intégrations successives on déduit facilement le vecteur vitesse et le vecteur position :

$$\underline{a} = \underline{g}$$

$$\underline{v} = \underline{g}t + \underline{v}_0$$

$$\underline{x} = \frac{1}{2}\underline{g}t^2 + \underline{v}_0t + \underline{x}_0$$

On voit alors apparaître deux constantes données par les conditions initiales $\underline{v}_0 = \underline{v}(t=0)$ et $\underline{x}_0 = \underline{x}(t=0)$ nécessaire à la détermination de la position du point matériel.

1.2.1.4 Quantité de mouvement

On appelle *quantité de mouvement* le produit de la masse d'un point par son vecteur-vitesse (exprimé en $kg.m.s^{-1}$) :

$$\underline{p} = m\underline{v}$$

1.2.1.5 Moment cinétique

On appelle *moment cinétique* d'un point matériel le *moment* de la quantité de mouvement $\underline{p}$ par rapport au point O (exprimé en $kg.m^2.s^{-1}$). On l'écrit donc :

$$\underline{L}_0 = \underline{OM} \wedge m\underline{v}$$

1.2.2. Principes fondamentaux

1.2.2.1 Principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique (PFD) énonce que la somme vectorielle des efforts appliqués au point matériel (dont la masse est constante dans le temps) est égale à la variation de sa quantité de mouvement :

Equation fondamentale 1-1 : PFD pour un point matériel

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \frac{d(m\underline{v})}{dt} = m \frac{d\underline{v}}{dt} = m\underline{a} = \sum \underline{F}^{ext}$$

On en déduit que si la somme vectorielle des efforts extérieurs est nulle, il y a alors **conservation de la quantité de mouvement**.

On peut également se servir de cette définition pour introduire la notion d'effort extérieur : c'est ce qui conduit à une variation de la quantité de mouvement. Son unité est évidemment le Newton (N), équivalent au $kg.m.s^{-2}$.

1.2.2.2 Moment d'une force

On appelle *moment de la force $\underline{F}$ par rapport au point O* la quantité (en $N.m$) :

$$\mathfrak{M}_O(\underline{F}) = \underline{OM} \wedge \underline{F}$$

1.2.2.3 Conservation du moment cinétique

Tentons de dériver le moment cinétique défini ci-dessus :

$$\frac{d\underline{L}_0}{dt} = \frac{d\underline{OM}}{dt} \wedge m\underline{v} + \underline{OM} \wedge \frac{d(m\underline{v})}{dt}$$

Le premier terme est évidemment nul car : $\frac{d\underline{OM}}{dt} = \underline{v} \parallel m\underline{v}$

D'après le principe fondamental de la dynamique on a donc : $\frac{d\underline{L}_0}{dt} = \underline{OM} \wedge \sum \underline{F}^{ext}$

On remarque donc que la variation du moment cinétique par rapport au point O est égale à la somme des moments des efforts extérieurs par rapport au point O :

$$\frac{d\underline{L}_0}{dt} = \sum \mathfrak{M}_O(\underline{F}^{ext})$$

Si le moment des efforts extérieurs par rapport au point O est nul, il y a alors **conservation du moment cinétique**.

Exemple 1-4

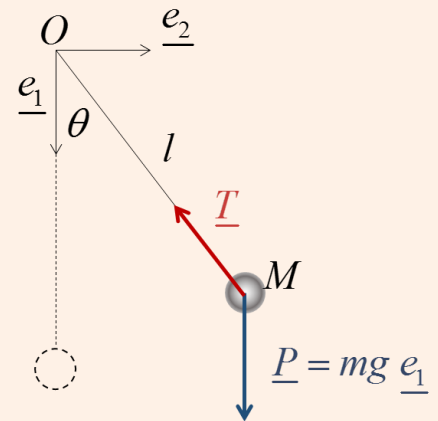
On cherche à connaître la période d'oscillation du pendule simple (il y a beaucoup de manières d'arriver à ce résultat). Le pendule de masse m est pendu à un fil de longueur l et soumis à deux efforts (le poids propre $\underline{P} = m\underline{g}$ et la tension du fil $\underline{T}$).

Calculons son moment cinétique :

$$\underline{v} = \dot{x}_1 \underline{e}_1 + \dot{x}_2 \underline{e}_2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{d}{dt}(l \cos \theta) = -l \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{x}_2 = \frac{d}{dt}(l \sin \theta) = l \dot{\theta} \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \underline{v} = l \dot{\theta} (\cos \theta \underline{e}_2 - \sin \theta \underline{e}_1)$$

$$\begin{aligned} \underline{L}_0 &= \underline{OM} \wedge m \underline{v} = (l \cos \theta \underline{e}_1 + l \sin \theta \underline{e}_2) \wedge ml \dot{\theta} (\cos \theta \underline{e}_2 - \sin \theta \underline{e}_1) \\ &= ml^2 \dot{\theta} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \underline{e}_3 = ml^2 \dot{\theta} \underline{e}_3 \end{aligned}$$



(Au passage : ce calcul est encore plus simple en utilisant un repère cylindrique !)

Le moment des efforts $\underline{P}$ et $\underline{T}$ exprimé en O se calcule simplement :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_O(\underline{P}) &= \underline{OM} \wedge \underline{P} = (l \cos \theta \underline{e}_1 + l \sin \theta \underline{e}_2) \wedge mg \underline{e}_1 = -lmg \sin \theta \underline{e}_3 \\ \mathfrak{M}_O(\underline{T}) &= \underline{OM} \wedge \underline{T} = \underline{0} \quad \text{car} \quad \underline{OM} \parallel \underline{T} \\ \sum \mathfrak{M}_O(\underline{F}^{ext}) &= -lmg \sin \theta \underline{e}_3 \end{aligned}$$

Le théorème du moment cinétique nous permet donc d'écrire :

$$\frac{d\underline{L}_0}{dt} = \sum \mathfrak{M}_O(\underline{F}^{ext}) \Rightarrow \frac{d(ml^2 \dot{\theta} \underline{e}_3)}{dt} = -lmg \sin \theta \underline{e}_3$$

Et on en arrive à l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned} \Rightarrow l \ddot{\theta} &= -g \sin \theta \\ \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta &= 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \end{aligned}$$

1.2.2.4 Travail et puissance

On appelle *travail de la force* $\underline{F}$ du point A au point B la quantité suivante:

$$\mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F}) = \int_A^B \underline{F} \cdot d\underline{l} \quad \text{où } d\underline{l} \text{ est une longueur élémentaire sur le trajet } A \rightarrow B$$

Si le chemin $A \rightarrow B$ correspond à la trajectoire réelle du point, on parle de *travail réel*.

Dans le cas contraire, on parle de *travail virtuel*.

On appelle *puissance* la quantité suivante : $\mathcal{P} = \underline{F} \cdot \underline{v}$.

On montre facilement le lien entre le travail d'une force et la puissance associée :

$$\mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F}) = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F} \cdot \frac{d\underline{l}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F} \cdot \underline{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt$$

1.2.2.5 Théorème de l'énergie cinétique

On appelle *énergie cinétique* du point matériel de masse m la quantité (en *Joule*):

$$\mathcal{K}(\underline{v}) = \frac{1}{2} m (\underline{v} \cdot \underline{v})$$

Le théorème de l'énergie cinétique énonce que **la variation d'énergie cinétique entre A et B est égale au travail des efforts appliqués**, ce qui s'écrit :

$$\mathcal{K}(\underline{v}_A) - \mathcal{K}(\underline{v}_B) = \sum \mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F})$$

On en fait facilement la démonstration en multipliant (au sens du produit scalaire) chaque terme du PFD par la vitesse $\underline{v}$:

$$\begin{aligned} m \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \underline{v} &= \sum \underline{F}^{ext} \cdot \underline{v} \\ \Rightarrow \frac{d\left(\frac{1}{2} m \underline{v} \cdot \underline{v}\right)}{dt} &= \sum \underline{F}^{ext} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} \\ \Rightarrow d\left(\frac{1}{2} m \underline{v} \cdot \underline{v}\right) &= \sum \underline{F}^{ext} \cdot d\underline{x} \end{aligned}$$

Si le travail des efforts extérieurs est nul, on a donc **conservation de l'énergie cinétique**.

Si l'on exprime le même théorème en termes de puissance, on arrive naturellement à la relation suivante :

$$m \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \underline{v} = \sum \underline{F}^{ext} \cdot \underline{v} \Rightarrow \frac{d\mathcal{K}}{dt} = \sum \mathcal{P}(\underline{F}^{ext})$$

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique est donc égale à la puissance des efforts extérieurs reçus par le point matériel.

1.2.2.6 Théorème de l'énergie mécanique

Lorsque le travail d'une force ne dépend pas du chemin suivi, on parle alors de *force conservative*. C'est le cas de la force de pesanteur, car on montre facilement que :

$$\mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{P}) = \int_A^B \underline{P} \cdot d\underline{l} = \underline{P} \cdot \int_A^B d\underline{l} = \underline{P} \cdot \underline{AB}$$

On définit dans ce cas l'énergie potentielle E_p telle que : $\mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F}) = E_p(A) - E_p(B)$

On peut réécrire le théorème de l'énergie cinétique vu précédemment en dissociant les forces conservatives (indice C .) des forces non conservatives (indice $N.C$.) qui sont dues à des dissipations par frottement ou pertes thermique, de telle sorte que :

$$\mathcal{K}(\underline{v}_A) - \mathcal{K}(\underline{v}_B) = \sum \mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F}) = \sum \mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F}^{C.}) + \sum \mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F}^{N.C.})$$

La définition précédente de l'énergie potentielle entraîne donc :

$$\mathcal{K}(\underline{v}_A) - \mathcal{K}(\underline{v}_B) = - \sum_{A \rightarrow B} \Delta E_p + \sum \mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F}^{N.C.})$$

ou encore : $\sum_{A \rightarrow B} \Delta \mathcal{K} + \sum_{A \rightarrow B} \Delta E_p = \sum \mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F}^{N.C.})$

On introduit alors la notion d'énergie mécanique du point matériel $E_M = \mathcal{K} + \sum E_p$.

On vient donc d'écrire ci-dessous que **la variation d'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives.**

$$\sum_{A \rightarrow B} \Delta E_M = \sum \mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F}^{N.C.})$$

Exemple 1-5

Reprenons l'exemple du pendule précédent. On va tenter de retrouver l'équation du mouvement à partir du théorème de l'énergie cinétique.

On a vu que : $\underline{v} = l \dot{\theta} (\cos \theta \underline{e}_2 - \sin \theta \underline{e}_1)$

Par conséquent l'énergie cinétique vaut : $\mathcal{K}(\underline{v}) = \frac{1}{2} m (\underline{v} \cdot \underline{v}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

Le travail de l'effort de tension du fil $\underline{T}$ est nul car sa direction est perpendiculaire à la direction du mouvement. On a vu que de plus le poids propre $\underline{P} = m \underline{g}$ était une force conservative.

Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit donc :

$$\Delta_{A \rightarrow B} E_M = \sum \mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F}^{N.C.}) = 0$$

$$\frac{dE_M}{dt} = \frac{d\mathcal{K}(\underline{v})}{dt} + \frac{dE_P}{dt} = 0$$

L'énergie potentielle de pesanteur vaut $E_P = -mgx_1 + cste$ et donc $\frac{dE_P}{dt} = -mg \dot{x}_1 = mgl \dot{\theta} \sin \theta$

On obtient au final l'équation :

$$\frac{d\mathcal{K}(\underline{v})}{dt} + \frac{dE_P}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} + mgl \dot{\theta} \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow l \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

ce qui correspond au résultat trouvé précédemment.

(Au passage : ce calcul est encore plus simple en utilisant un repère cylindrique !)

1.2.2.7 Une introduction au Principe des Puissance Virtuelles (PPV)

Contrairement aux différents principes énoncés précédemment, le PPV n'a pas été abordé en classes préparatoires : il constitue pourtant un outil très puissant pour la démarche de modélisation du milieu continu qui sera présentée ensuite, et pour étendre ce cours à d'autres cas plus complexes.

De façon vulgarisée, on peut chercher à tester l'équilibre d'un système en quantifiant la puissance ou le travail des efforts qui résultent de sa mise en mouvement (par exemple, on peut imaginer soulever une masse pour évaluer son poids, en évaluant la puissance nécessaire à bouger cette masse).

Il est facile de montrer que les principes fondamentaux énoncés précédemment possèdent leur équivalent formulé en termes de puissances, si l'on s'autorise juste à multiplier les équations obtenues par une vitesse virtuelle notée $\hat{\underline{v}}$:

- En statique : $\sum \underline{F}^{ext} = \underline{0} \Rightarrow \sum \underline{F}^{ext} \cdot \hat{\underline{v}} = 0 \Rightarrow \mathcal{P}_e(\hat{\underline{v}}) = 0$

où le $\mathcal{P}_e(\hat{\underline{v}})$ est la « *puissance virtuelle de efforts extérieurs* »

- En dynamique : $\sum \underline{F}^{ext} = m \frac{d\underline{v}}{dt} \Rightarrow \sum \underline{F}^{ext} \cdot \hat{\underline{v}} = m \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \hat{\underline{v}} \Rightarrow \mathcal{P}_e(\hat{\underline{v}}) = \mathcal{A}(\hat{\underline{v}})$

où le $\mathcal{A}(\hat{\underline{v}})$ est la « puissance virtuelle des quantités d'accélération »

Si l'on effectue le même calcul en prenant une vitesse *virtuelle* $\hat{\underline{v}}$ égale à la vitesse *réelle* $\underline{v}$, on retrouve immédiatement le théorème de l'énergie cinétique :

$$\sum \underline{F}^{ext} \cdot \underline{v} = m \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \underline{v} \Rightarrow \sum \mathcal{P}_e(\underline{F}^{ext}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \underline{v} \cdot \underline{v} \right) = \frac{d\mathcal{K}}{dt}$$

En l'état, il est légitime de ne pas comprendre ce qu'ajoute cette nouvelle formulation par rapport aux précédentes. En revanche, nous verrons que pour un milieu continu, cette démarche conduit à chercher un moyen de prendre en compte la « *puissance virtuelle des efforts intérieurs* », et conduit à une modélisation des efforts intérieurs... un peu de patience (paragraphe 4.1).

1.3. Mécanique du solide indéformable

1.3.1. Du système de points matériels au solide indéformable

On définit désormais un système de N points, et on note donc les points $M^{(i)}$ de masse $m^{(i)}$, avec $i \in 1, N$. Nous allons reprendre les points précédents et observer ce qui est toujours vrai et ce qui ne l'est plus.

1.3.1.1 Centre de masse du système de points

On appelle centre de masse G (ou barycentre) le point qui « concentre » la masse du système, et on le calcule simplement à partir de sa définition :

$$\sum_{i=1}^N m^{(i)} \underline{GM}^{(i)} = \underline{0}$$

1.3.1.2 Grandeurs extensives

On dit d'une grandeur qu'elle est *extensive* si elle est proportionnelle à la quantité de matière mise en jeu (on dit sinon qu'elle est *intensive*).

- La masse est évidemment une grandeur extensive et on écrit : $m = \sum_{i=1}^N m^{(i)}$

- La quantité de mouvement est donc une grandeur extensive : $\underline{p} = \sum_{i=1}^N \underline{p}^{(i)} = \sum_{i=1}^N m^{(i)} \underline{v}^{(i)}$

On montre qu'elle est tout simplement égale à la quantité de mouvement du centre de masse du système de points.

- Le moment cinétique est une grandeur extensive et on a :

$$\underline{L}_0 = \sum_{i=1}^N \underline{L}_0^{(i)} = \sum_{i=1}^N \left(\underline{OM}^{(i)} \wedge m^{(i)} \underline{v}^{(i)} \right)$$

- Enfin, l'énergie cinétique est une grandeur extensive et par conséquent :

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^N \mathcal{K}^{(i)} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m^{(i)} \left(\underline{v}^{(i)} \cdot \underline{v}^{(i)} \right) \right)$$

1.3.1.3 Efforts extérieurs et efforts intérieurs

On a précédemment introduit la notions d'efforts extérieurs $\underline{F}^{ext}$, qu'il convient maintenant de distinguer des efforts intérieurs $\underline{F}^{int}$ qui peuvent résulter d'interactions entre les différents points matériels. Ainsi le nœud i est soumis à des efforts extérieurs sur ce point, et aux efforts intérieurs $\underline{F}^{(j \rightarrow i)}$ que peuvent exercer les $N-1$ autres points du système :

$$\underline{F}^{(i)} = \underline{F}^{(ext \rightarrow i)} + \underline{F}^{(int \rightarrow i)} = \underline{F}^{(ext \rightarrow i)} + \sum_{j \neq i} \underline{F}^{(j \rightarrow i)}$$

Les efforts totaux qui s'exercent sur le système de points s'écrivent donc :

$$\underline{F} = \underline{F}^{ext} + \underline{F}^{int} = \sum_{i=1}^N \underline{F}^{(ext \rightarrow i)} + \sum_{i=1}^N \underline{F}^{(int \rightarrow i)}$$

Il en serait évidemment de même pour le moment des efforts extérieurs et intérieurs. Or, par actions réciproques (3^{ème} loi de Newton « *les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et de sens contraires* ») on comprend aisément que la somme de tous les efforts intérieurs s'annule, et que l'on peut donc écrire :

$$\underline{F} = \underline{F}^{ext} = \sum_{i=1}^N \underline{F}^{(ext \rightarrow i)}$$

Par conséquent, on montre que les lois de **conservation de la quantité de mouvement** et de **conservation du moment d'inertie** sont toujours vérifiées dans le cas d'un système de N points.

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \sum \underline{F}^{ext}$$

$$\frac{d\underline{L}_0}{dt} = \sum \mathfrak{M}_O(\underline{F}^{ext})$$

1.3.1.4 Puissance des efforts intérieurs

Si l'on vient de voir que certains théorèmes énoncés en mécanique du point restent vérifiés pour un système de N points, il n'en est néanmoins pas de même pour les théorèmes portant sur les énergies. En effet, pour un système de points, le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} = \sum \mathcal{P}(\underline{F}) = \sum \left(\mathcal{P}(\underline{F}^{ext}) + \mathcal{P}(\underline{F}^{int}) \right)$$

Or, même si les efforts internes au sein du système de points s'annulent deux à deux, il n'en est pas moins que la puissance exercée par ces efforts n'est pas nécessairement nulle lors du mouvement... l'écriture de la puissance des efforts intérieurs viendra beaucoup plus tard dans ce cours, lorsque l'on aura correctement formalisé la nature de ces efforts intérieurs (section 4.2).

1.3.1.5 Cas particuliers du solide indéformable (ou corps solide)

Si le corps est indéformable, la puissance des efforts intérieurs s'annule puisque les vitesses relatives entre les différents points du système s'annulent :

$$\mathcal{P}(\underline{F}^{int}) = \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^N \underline{F}^{(int \rightarrow i)}\right) = \sum_{i=1}^N \underline{F}^{(int \rightarrow i)} \cdot \cancel{\underline{v}^{(i \rightarrow j \rightarrow i)}}$$

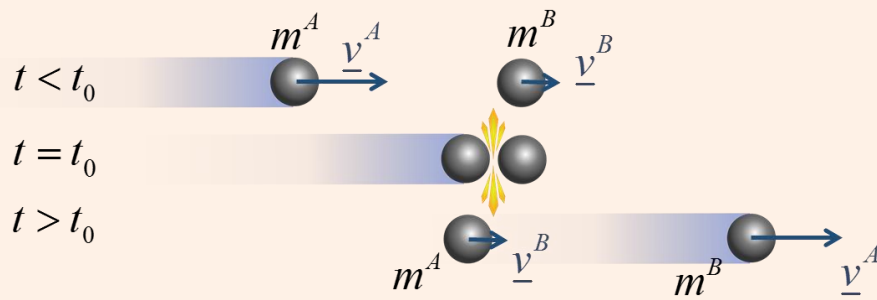
Dans ce cas, et dans ce cas uniquement, l'énergie cinétique est conservée et on peut se passer de la notion de *puissance des efforts intérieurs* que l'on abordera plus tard.

Exemple 1-6

On considère deux particules A et B qui vont s'entrechoquer au temps t_0 .

La conservation de la quantité de mouvement permet d'écrire une relation entre les vitesses avant et après le choc (on considère que les particules vont conserver leur masse malgré le choc) :

$$m^A \underline{v}^A(t < t_0) + m^B \underline{v}^B(t < t_0) = m^A \underline{v}^A(t > t_0) + m^B \underline{v}^B(t > t_0)$$



Si on connaît les vitesses des deux particules avant l'impact, on ne connaît en revanche par leur vitesses après l'impact, et on écrit une seule équation pour 2 inconnues.

L'énergie cinétique sera conservée *si et seulement si* la collision est dite parfaitement élastique : dans ce cas, et seulement dans ce cas, on a une seconde équation venant de la conservation de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m^A (\underline{v}^A \cdot \underline{v}^A)(t < t_0) + \frac{1}{2} m^B (\underline{v}^B \cdot \underline{v}^B)(t < t_0) = \frac{1}{2} m^A (\underline{v}^A \cdot \underline{v}^A)(t > t_0) + \frac{1}{2} m^B (\underline{v}^B \cdot \underline{v}^B)(t > t_0)$$

La considération d'un corps (plutôt qu'un ensemble de points matériels) revient à faire tendre le nombre de points matériels qui constituent le système vers l'infini. Les sommations qui viennent d'être faites deviennent maintenant des intégrales, de telle sorte que la masse du solide devienne par exemple :

$$M = \int_{\Omega} dm = \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad \text{où } \Omega \text{ est le volume du solide et } \rho \text{ sa masse volumique}$$

1.3.2. Rotation du solide autour d'un axe fixe

1.3.2.1 Moment d'inertie d'un solide

Reprenons la formule précédente concernant le moment cinétique d'un système de points matériels en l'adaptant à la nouvelle définition du corps solide :

$$\underline{L}_0 = \int_{\Omega} \underline{OM} \wedge \underline{v} dm$$

On obtient un vecteur moment cinétique calculé à partir du point O , centre du repère que l'on va considérer cylindrique étant donné que l'on étudie un solide en rotation.

Admettons que le solide soit en rotation autour d'un axe fixe d'axe $\underline{e}_z$ dans le repère cylindrique $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$. On peut alors chercher à calculer le moment cinétique autour de cet axe, c'est-à-dire à projeter le moment cinétique sur cet axe :

$$L_{0z} = \left(\int_{\Omega} \underline{OM} \wedge \underline{v} \, dm \right) \cdot \underline{e}_z$$

Dans ce cas on considère uniquement l'une des composantes du *vecteur* moment cinétique. D'après les rappels de cinématique précédents, on peut réécrire ce terme en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} L_{0z} &= \left(\int_{\Omega} (r \underline{e}_r + z \underline{e}_z) \wedge \left(\dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_\theta + \dot{z} \underline{e}_z \right) dm \right) \cdot \underline{e}_z \\ L_{0z} &= \int_{\Omega} \left(r^2 \dot{\theta} \underline{e}_z - r \dot{z} \underline{e}_\theta + z \dot{r} \underline{e}_\theta - z r \dot{\theta} \underline{e}_r \right) \cdot \underline{e}_z \, dm \\ L_{0z} &= \int_{\Omega} r^2 \dot{\theta} \, dm = \dot{\theta} \int_{\Omega} r^2 \, dm \end{aligned}$$

On vient donc d'introduire la notion de **moment d'inertie** I_{0z} par rapport à l'axe $(0, \underline{e}_z)$ en montrant que celui-ci est tel qu'on écrit le moment cinétique par rapport à cet axe :

$$L_{0z} = \dot{\theta} \int_{\Omega} r^2 \, dm = \dot{\theta} I_{0z}$$

Les valeurs de ces moments d'inerties pour quelques formes particulières (parallélépipèdes, cylindres, sphères) se trouvent aisément dans des tables.

1.3.2.2 Moment d'une force par rapport à un axe

La rotation de ce solide autour de l'axe $(0, \underline{e}_z)$ peut être due à l'application d'un effort $\underline{F}$ au point M entraînant un moment autour de cet axe. On en profite pour introduire la notion de moment d'une force par rapport à un axe, qui est la projection du moment de la force $\underline{F}$ sur cet axe $(0, \underline{e}_z)$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{Oz}(\underline{F}) &= (\underline{OM} \wedge \underline{F}) \cdot \underline{e}_z \\
\mathfrak{M}_{Oz}(\underline{F}) &= \left((r\underline{e}_r + z\underline{e}_z) \wedge (F_r\underline{e}_r + F_\theta\underline{e}_\theta + F_z\underline{e}_z) \right) \cdot \underline{e}_z \\
\mathfrak{M}_{Oz}(\underline{F}) &= (rF_\theta\underline{e}_z - rF_z\underline{e}_\theta + zF_r\underline{e}_\theta - zF_\theta\underline{e}_r) \cdot \underline{e}_z \\
\mathfrak{M}_{Oz}(\underline{F}) &= rF_\theta
\end{aligned}$$

Ce dernier résultat est le plus important : r correspond communément au « bras de levier », c'est-à-dire à la plus courte distance entre l'axe $(0, \underline{e}_z)$ et le point d'application de l'effort, tandis que F_θ correspond à la composante de l'effort qui fait entrer le solide en rotation.

1.3.2.3 Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation

Reprenons le théorème du moment cinétique énoncé précédemment :

$$\frac{d\underline{L}_0}{dt} = \sum \mathfrak{M}_O(\underline{F}^{ext})$$

Si on considère le solide en rotation autour de l'axe fixe $(0, \underline{e}_z)$ en raison de l'application d'un seul effort $\underline{F}$, on utilise les résultats précédents pour trouver :

$$\frac{dL_{0z}}{dt} = \frac{d(\dot{\theta} I_{0z})}{dt} = rF_\theta$$

Si on généralise à plusieurs efforts extérieurs $\underline{F}^{ext(i)}$, et qu'on les associe à leurs bras de leviers $d^{(i)}$, on arrive alors au résultat :

$$\ddot{\theta} I_{0z} = \sum_i d^{(i)} F_\theta^{(i)} = \sum_i \mathfrak{M}_{Oz}(\underline{F}^{(i)})$$

Le résultat de ce théorème constitue l'équivalent du **PFD** pour un solide en rotation autour d'un axe fixe en raison de l'applications des efforts extérieurs $\underline{F}^{ext(i)}$. Il est cité ici compte tenu de sa large application dans le domaine de la production ou du stockage d'énergie, ainsi que dans le domaine des transports, dans lesquels il est souvent question de corps considérés indéformables en rotation autour d'un axe fixe.

1.3.2.4 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation

On reprend également la définition précédente de l'énergie cinétique pour un corps solide :

$$\mathcal{K} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\underline{v} \cdot \underline{v}) dm$$

Dans le cas particulier du solide en rotation autour de l'axe fixe $(0, \underline{e}_z)$ on a :

$$\underline{v} = \cancel{r \dot{\theta} \underline{e}_r} + r \dot{\theta} \underline{e}_{\theta} + \cancel{z \dot{\theta} \underline{e}_z} = r \dot{\theta} \underline{e}_{\theta}$$

La définition de l'énergie cinétique de rotation vient donc tout simplement :

$$\mathcal{K} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\underline{v} \cdot \underline{v}) dm = \int_{\Omega} \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}^2 dm = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \int_{\Omega} r^2 dm = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 I_{Oz}$$

La variation d'énergie cinétique s'écrit donc (d'après le théorème du moment cinétique et en l'absence de puissance des efforts intérieurs pour un corps solide) :

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} = \dot{\theta} \ddot{\theta} I_{Oz} = \dot{\theta} \sum_i \mathfrak{M}_{Oz}(\underline{F}^{(i)})$$

1.3.3. *Cinématique du solide indéformable*

En classes préparatoires, les notions de champs **scalaires** et **vectoriels** ont déjà été abordées : on montre ci-dessous (Figure 8) deux exemples de ces champs, à travers un champ de température et un champ de vitesses. On comprend vite à partir de ces deux exemples une définition intuitive d'un champ de vecteurs vitesses : c'est une application qui, à un point de l'espace, associe un vecteur vitesse.

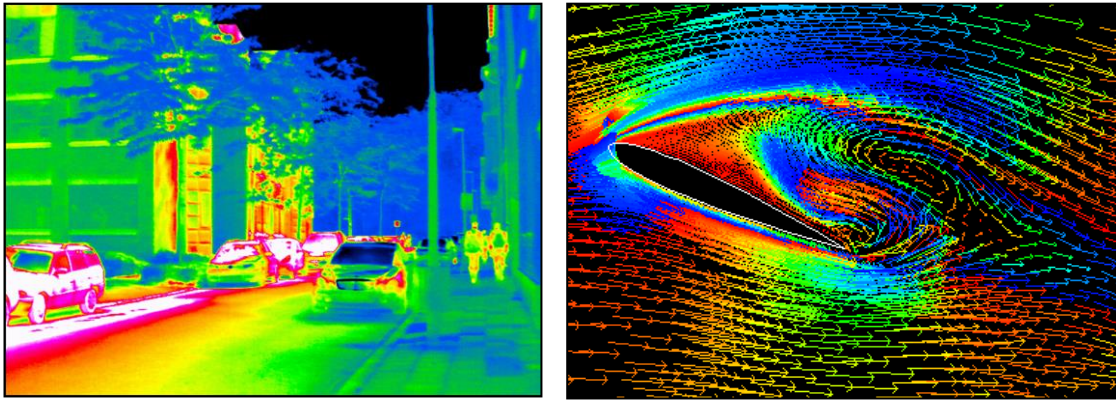


Figure 8: Exemples de champs. A gauche : champ de température (champ scalaire). A droite : profil des vitesses autour d'une aile (champ vectoriel).

On va poser (sans la démontrer) la définition du champ de vecteur vitesses au sein d'un corps solide. Si l'on connaît le vecteur $\underline{\Omega}$, correspondant à la rotation du solide, alors on peut connaître la vitesse du point N appartenant au solide à partir de la vitesse du point M appartenant au solide en utilisant la relation primordiale :

$$\underline{v}(N) = \underline{v}(M) + \underline{NM} \wedge \underline{\Omega}$$

C'est la propriété de **distribution des vecteurs vitesse**.

- Vecteur rotation $\underline{\Omega}$: 3 degrés de liberté ; identique en tout point du solide
- Vecteur vitesse $\underline{v}$: 3 degrés de liberté du solide ; différent en chaque point du solide

NB : on peut regrouper ces deux vecteurs sous la forme d'un objet « torseur », de même que pour les forces et les moments. La notion de « torseur » ne sera pas utilisée dans ce cours, car non nécessaire à sa compréhension, et prêtant à confusion avec la notion de « tenseur » à venir.

Si le vecteur rotation $\underline{\Omega}$ est nul, on observe que tous les points ont la même vitesse : on dit alors que le corps est en *translation pure*.

On parle d'un mouvement de *rotation pure* s'il existe au moins un point du solide pour lequel le vecteur vitesse est nul.

Exemple 1-7

On s'intéresse à nouveau au cas du solide en rotation autour d'un axe fixe $(0, \underline{e}_z)$. On a vu dans ce cas que les vecteurs position et vitesse s'écrivaient :

$$\underline{OM} = r\underline{e}_r + z\underline{e}_z$$
$$\underline{v} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta + \dot{z}\underline{e}_z$$

Sur l'axe, la vitesse est nulle et on a nécessairement $\underline{v}(O) = \underline{0}$.

On en déduit naturellement la vitesse en un point quelconque M :

$$\underline{v}(M) = \cancel{\underline{v}(O)} + \underline{MO} \wedge \underline{\Omega}$$
$$\underline{v}(M) = (-r\underline{e}_r - z\underline{e}_z) \wedge (\Omega_r \underline{e}_r + \Omega_\theta \underline{e}_\theta + \Omega_z \underline{e}_z) = -r\Omega_\theta \underline{e}_z + r\Omega_z \underline{e}_\theta - z\Omega_r \underline{e}_\theta + z\Omega_\theta \underline{e}_r$$
$$\text{Par identification on obtient donc : } \begin{cases} \dot{r} = z\Omega_\theta \\ r\dot{\theta} = -z\Omega_r + r\Omega_z \\ \dot{z} = -r\Omega_\theta \end{cases}$$

Cette relation est vraie $\forall z$ ce qui implique $\Omega_\theta = 0$ et $\Omega_r = 0$ et donc : $\underline{\Omega} = \Omega_z \underline{e}_z = \dot{\theta} \underline{e}_z$

On en déduit une interprétation du vecteur rotation : sa direction constitue l'axe de rotation tandis que son intensité correspondant à la vitesse angulaire de rotation.

1.3.4. Dynamique du solide indéformable

1.3.4.1 Efforts extérieurs agissant sur un solide

On va distinguer ici les différents types d'efforts extérieurs pouvant agir sur un solide indéformable : efforts ponctuels, efforts linéiques, efforts surfaciques, pression et efforts volumiques (gravité ou champ magnétique).

- un **effort ponctuel** $\underline{F}$ a la dimension d'un effort (N) et possède un point d'application M . Au point O , il crée le moment :

$$\mathcal{M}_O(\underline{F}) = \underline{OM} \wedge \underline{F}$$

- un **effort linéique** $\underline{F}^L$ s'exprime en $N.m^{-1}$ et s'applique sur une ligne. On l'utilise en particulier en résistance des matériaux pour modéliser une charge

(par exemple la neige) répartie le long d'une poutre. La résultante de cet effort s'écrit:

$$\underline{F} = \int_L \underline{F}^L dl$$

où dl représente un élément de ligne infinitésimal.

- un **effort surfacique** $\underline{F}^S$ s'exprime en $N.m^{-2}$ et s'applique sur la surface du solide. On peut l'utiliser par exemple pour modéliser une charge (comme la neige) répartie sur un toit. La résultante de cet effort s'écrit :

$$\underline{F} = \int_{\partial\Omega} \underline{F}^S dS$$

où $\partial\Omega$ est la frontière du solide et dS l'élément de surface.

- une **pression** p s'exprime également en $N.m^{-2}$ et représente **la projection** (selon la normale *entrante* à une surface) de l'effort surfacique qui s'y applique. C'est donc une quantité *scalaire* et non *vectorielle*, par définition nécessairement *positive*. La résultante de la pression s'exprime tout naturellement:

$$\underline{F} = \int_{\partial\Omega} -p \underline{n} dS \text{ avec } \underline{n} \text{ la normale } \textit{sortante}$$

- un **effort volumique** $\underline{F}^V$ s'exprime en $N.m^{-3}$ et s'applique en tout point du volume du solide. C'est donc une action à distance, comme la gravité ou le champ magnétique. La résultante de cet effort s'écrit :

$$\underline{F} = \int_{\Omega} \underline{F}^V d\Omega$$

où $d\Omega$ est un élément de volume infinitésimal.

1.3.4.2 Distribution des efforts

Un effort ponctuel appliqué au point M crée au point O le moment :

$$\mathcal{M}_O(\underline{F}) = \underline{OM} \wedge \underline{F}$$

Est-il possible de calculer facilement le moment de cet effort en n'importe quel point P de l'espace ? La relation de Chasles nous permet d'écrire :

$$\mathfrak{M}_P(\underline{F}) = \underline{PM} \wedge \underline{F} = (\underline{PO} + \underline{OM}) \wedge \underline{F} = \underline{PO} \wedge \underline{F} + \underline{OM} \wedge \underline{F} = \underline{PO} \wedge \underline{F} + \mathfrak{M}_O(\underline{F})$$

Si on connaît le moment en un point de l'espace, on peut donc le calculer en n'importe quel point

$$\mathfrak{M}_P(\underline{F}) = \mathfrak{M}_O(\underline{F}) + \underline{PO} \wedge \underline{F}$$

Cette propriété de distribution des efforts nous rappelle fortement la propriété de distribution des vitesses vue précédemment.

NB : de même que précédemment, cette propriété peut se matérialiser en introduisant la notion de « torseur des efforts ».

1.3.4.3 Couple mécanique

On appelle *couple* $\mathcal{C}$ un ensemble d'efforts dont la résultante est nulle mais dont le moment total est non nul. On montre que la notion de couple (contrairement à la notion de moment vue précédemment) ne dépend pas du point considéré : considérons pour cela deux efforts $\underline{F}^{(1)}$ et $\underline{F}^{(2)}$ appliqués en deux points M et N et tels que $\underline{F}^{(1)} + \underline{F}^{(2)} = \underline{0}$, et calculons leur moment au point O :

$$\mathfrak{M}_O(\underline{F}^{(1)} + \underline{F}^{(2)}) = \underline{OM} \wedge \underline{F}^{(1)} + \underline{ON} \wedge \underline{F}^{(2)} \neq \underline{0}$$

Calculons le moment de ces deux mêmes efforts en un point P quelconque :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_P(\underline{F}^{(1)} + \underline{F}^{(2)}) &= \underline{PM} \wedge \underline{F}^{(1)} + \underline{PN} \wedge \underline{F}^{(2)} \\ &= (\underline{PO} + \underline{OM}) \wedge \underline{F}^{(1)} + (\underline{PO} + \underline{ON}) \wedge \underline{F}^{(2)} \\ &= \underline{PO} \wedge (\underline{F}^{(1)} + \underline{F}^{(2)}) + \underbrace{\underline{OM} \wedge \underline{F}^{(1)} + \underline{ON} \wedge \underline{F}^{(2)}}_{\mathfrak{M}_O(\underline{F}^{(1)} + \underline{F}^{(2)})} \end{aligned}$$

CQFD.

1.3.4.4 Principe fondamental de la dynamique (PFD)

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la mécanique du solide indéformable est une combinaison de la conservation de la quantité de mouvement de son centre de masse (considéré alors comme un point matériel) et du théorème du moment cinétique. Comme précédemment on a donc :

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{p}}{dt} &= \sum \underline{F}^{ext} \\ \frac{d\underline{L}_O}{dt} &= \sum \mathfrak{M}_O(\underline{F}^{ext})\end{aligned}$$

où les efforts et moments peuvent résulter d'efforts ponctuels, linéiques, surfaciques ou volumiques.

1.3.4.5 Cas particulier : principe fondamental de la statique

Dans le cas où un solide indéformable est en équilibre, il y a conservation de sa quantité de mouvement ainsi que de son moment cinétique. On en déduit le couple de deux équations fondamentales suivant :

Equation fondamentale 1-2 : PFS pour un solide indéformable

$$\begin{aligned}\underline{0} &= \sum \underline{F}^{ext} \\ \underline{0} &= \sum \mathfrak{M}_O(\underline{F}^{ext}) \quad \forall O\end{aligned}$$

A retenir 1-3

Enoncé autrement : la somme des efforts et la somme des moments (quel qu'en soit le point d'application) qui s'appliquent à un solide indéformable à l'équilibre sont nulles.

1.3.4.1 Résolution par statique graphique pour les problèmes plans

Dans les cas simples auxquels sera confronté l'ingénieur, il arrive régulièrement qu'on ait recours au cas d'un solide soumis à **trois** forces dans le même plan. Dans ce cas, il est facile de montrer que :

- les trois efforts forment un triangle fermé (Figure 9) (car la somme vectorielle des efforts est nulle)

- les trois droites d'action des efforts sont parallèles **ou** concourantes (Figure 9).

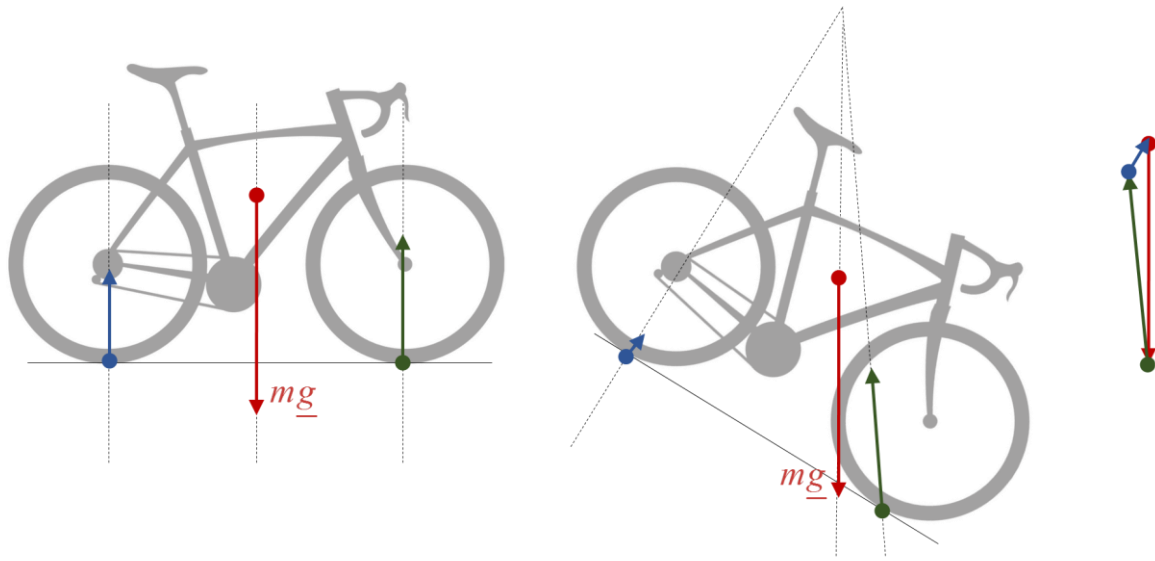


Figure 9: Statique graphique pour le cas d'un vélo à l'arrêt à plat (gauche) ou en pente (droite), ne freinant que de la roue avant. Les trois droites d'actions des forces peuvent être parallèles (gauche) ou concourantes (droite), et les trois efforts forment un triangle fermé.

On retrouverait évidemment les mêmes résultats en posant le système d'équation :

$$\begin{aligned} \underline{0} &= \sum \underline{F}^{ext} \\ \underline{0} &= \sum \underline{\mathcal{M}}_O(\underline{F}^{ext}) \quad \forall O \end{aligned}$$

Résumé du CHAPITRE 1 : ce qu'il faut savoir

- ✓ **Géométrie vectorielle** dans des repères cartésiens, cylindriques, sphériques
- ✓ **Convention d'Einstein**
- ✓ Changement de **base**
- ✓ Ecriture des **vecteurs position, vitesse et accélération**
- ✓ **Hypothèses** de la mécanique du **point** et de la mécanique du solide **indéformable**
- ✓ **Distribution** des vecteurs vitesses et calculs des **moments**
- ✓ Principe fondamentale de la **statique (PFS)**
- ✓ Principe fondamental de la **dynamique (PFD)**
- ✓ Autres lois fondamentales (conservation du **moment cinétique**, théorème de l'**énergie cinétique**, théorème de l'**énergie mécanique**)

2. Introduction au calcul tensoriel

La mécanique des milieux continus qui va faire l'objet de ce cours est une branche de la physique qui nécessite l'introduction d'un nouvel objet mathématique appelé *tenseur*. L'algèbre et l'analyse tensorielles pourraient faire l'objet d'un cours à part entière : cependant, on se contentera dans le cadre de ce cours de MMC de fournir les bases permettant de comprendre et de manipuler l'objet algébrique *tenseur* ainsi que les différents opérateurs différentiels qui lui seront associés (divergence, gradient, ...).

Le lecteur intéressé par une approche plus générale pourra notamment consulter les ouvrages suivants :

- *Initiation progressive au calcul tensoriel*, Claude Jeanperrin
- *Introduction au calcul tensoriel*, Claude Semay

2.1. Définition générale des tenseurs

2.1.1. Pourquoi les tenseurs ?

Nous allons voir, dans la suite de ce cours de MMC, qu'un objet mathématique nouveau est nécessaire pour décrire certaines quantités physiques. En effet, on verra par exemple que les *contraintes* qui s'exercent dans un matériau ne peuvent être décrites complètement ni par une quantité scalaire (qui permet de décrire une *pression* par exemple) ni par une quantité vectorielle décrite par ses trois composantes scalaires sur une base donnée (permettant de décrire une *force* par exemple). On aura besoin de davantage de données scalaires sur cette base pour décrire cette notion de mécanique, notion qui devra néanmoins rester **intrinsèque**, c'est-à-dire **indépendant de la base dans laquelle elle sera décrite**.

Le mot **tenseur** provient de cette nécessité historique de décrire des « *tensions* » au sein du matériau : l'objet mathématique qui va être introduit ci-après trouve néanmoins des applications bien plus vastes (géométrie différentielle, électromagnétisme, relativité,

...). Nous verrons que l'objet mathématique *tenseur* englobe les quantités que nous savons déjà manipuler comme les scalaires ou les vecteurs, qui seront des cas particuliers de *tenseurs*.

2.1.2. Notion de produit tensoriel

2.1.2.1 Définition générale du produit tensoriel

Afin de construire l'objet *tenseur*, il peut être utile de définir en premier lieu l'opération mathématique appelée **produit tensoriel** notée $\otimes$ qui peut être effectuée dans le cas général entre deux espaces vectoriels de natures différentes. Ainsi, nous nous restreindrons à des vecteurs appartenant à $\mathbb{R}^3$. Pour qu'on puisse la désigner comme « produit » cette opération doit respecter les règles suivantes :

→ distributivité de $\otimes$ par rapport à $+$ et réciproquement :

$$\forall (\underline{x}, \underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{x} \otimes (\underline{y}_1 + \underline{y}_2) = \underline{x} \otimes \underline{y}_1 + \underline{x} \otimes \underline{y}_2 \\ (\underline{y}_1 + \underline{y}_2) \otimes \underline{x} = \underline{y}_1 \otimes \underline{x} + \underline{y}_2 \otimes \underline{x} \end{array} \right.$$

→ associativité de $\otimes$ par rapport au produit extérieur :

$$\forall (\underline{x}, \underline{y}, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \quad (\alpha \underline{x}) \otimes \underline{y} = \underline{x} \otimes (\alpha \underline{y}) = \alpha (\underline{x} \otimes \underline{y})$$

Ces propriétés n'expriment ni plus ni moins que la bilinéarité du produit tensoriel. On introduit enfin le fait que le produit tensoriel $\underline{x} \otimes \underline{y}$ crée un élément appartenant à l'espace $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$, produit tensoriel de l'espace $\mathbb{R}^3$ par lui-même. On définit une base de cet espace de la façon suivante :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x} \text{ est écrit dans la base } \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \\ \underline{y} \text{ est écrit dans une autre base } \underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^* \end{array} \right\} \underline{x} \otimes \underline{y} \text{ a pour base } \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j^*$$

2.1.2.2 Expression analytique de $\underline{x} \otimes \underline{y}$

D'après ce qui précède, on peut écrire les composantes des vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{y}$:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x} = x_i \underline{e}_i \\ \underline{y} = y_j \underline{e}_j^* \end{array} \right\} \underline{x} \otimes \underline{y} = (x_i \underline{e}_i) \otimes (y_j \underline{e}_j^*) = x_i y_j (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j^*)$$

Si on fait varier les indices de 1 à 3 comme la convention d'Einstein (section 1.1.2) le permet, on remarque que ce produit possède 9 composantes sur la base de $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ qui peuvent être mises sous la forme suivante:

$$\underline{x} \otimes \underline{y} = x_i y_j (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j^*) = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j^*$$

dans le cas où $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont écrits dans des bases différentes $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ et $(\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^*)$.

Exemple 2-1

Exemple simple : prenons deux vecteurs orthogonaux exprimés dans la même base : $\underline{x} = 2\underline{e}_1$ et $\underline{y} = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$. On peut écrire le produit tensoriel :

$$\underline{x} \otimes \underline{y} = (2\underline{e}_1) \otimes (\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2) = 2\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 4\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2$$

2.1.2.3 Tenseur

Les notions qui précèdent s'étendent de manière évidente au cas où plus de deux vecteurs sont multipliés *tensoriellement*. On peut par exemple multiplier la quantité $\underline{x} \otimes \underline{y}$ par $\underline{z} \in \mathbb{R}^3$ de la façon suivante :

$$(\underline{x} \otimes \underline{y}) \otimes \underline{z} = \underline{x} \otimes (\underline{y} \otimes \underline{z}) = \underline{x} \otimes \underline{y} \otimes \underline{z} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$$

Une première définition mathématique d'un tenseur pourra donc être formulée comme suit :

A retenir 2-1

On appelle tenseur d'ordre n sur $\mathbb{R}^3$ tout l'élément de l'espace $\underbrace{\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^3}_n$

Lorsque l'ordre n du tenseur n'est « pas trop grand », on le soulignera un nombre de fois qui correspond à son ordre. Par exemple pour l'ordre 3:

$$\underline{\underline{\underline{T}}} = \underline{x} \otimes \underline{y} \otimes \underline{z} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$$

D'après la définition ci-dessus, on peut facilement déduire qu'un **vecteur est un tenseur d'ordre 1** puisqu'il appartient à l'espace $\mathbb{R}^3$: on le soulignera une seule fois.

On pourra également dire qu'un **scalaire est un tenseur d'ordre 0** qui appartient à l'espace $\mathbb{R}$: il ne sera donc pas souligné.

Dans la suite, un tenseur d'ordre n quelconque sera noté $\mathbf{T}^n$.

Exemple 2-2

Si les trois vecteurs $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ sont écrits dans la même base $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$, on peut par exemple écrire le produit : $\underline{\underline{T}} = \underline{x} \otimes \underline{y} \otimes \underline{z} = x_i \underline{e}_i \otimes y_j \underline{e}_j \otimes z_k \underline{e}_k = x_i y_j z_k \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k$ qui possède 27 composantes.

$$T_{ijk}$$

2.1.3. Changement de base d'un tenseur

Reprenons l'expression ci-dessus d'un tenseur d'ordre 3 :

$$\underline{\underline{T}} = \underline{x} \otimes \underline{y} \otimes \underline{z} = x_i \underline{e}_i \otimes y_j \underline{e}_j \otimes z_k \underline{e}_k = T_{ijk} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k$$

On peut changer la base dans laquelle le tenseur est écrit en utilisant comme précédemment la matrice de passage orthogonale P^* telle que : $\underline{e}_i = P_{ij}^* \underline{e}_j^*$

Il vient alors :

$$\underline{\underline{T}} = T_{ijk} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k = T_{ijk} P_{il}^* \underline{e}_l^* \otimes P_{jm}^* \underline{e}_m^* \otimes P_{kn}^* \underline{e}_n^* = \underbrace{T_{ijk} P_{il}^* P_{jm}^* P_{kn}^*}_{T_{lmn}^*} \underline{e}_l^* \otimes \underline{e}_m^* \otimes \underline{e}_n^*$$

Les composantes de $\underline{\underline{T}}$ se transforment donc selon la relation : $T_{ijk}^* = T_{lmn} P_{li}^* P_{mj}^* P_{nk}^*$

On vient de voir sur un cas particulier que, pour changer de base un tenseur d'ordre 3, on faisait intervenir 3 fois la matrice de passage. On a vu précédemment que le changement de base d'un vecteur (tenseur d'ordre 1) se faisait en faisant intervenir une fois la matrice de passage. De plus, un scalaire (tenseur d'ordre 0, comme la température par exemple) ne change pas d'expression lors d'un changement de base. On comprend donc bien la généralisation suivante :

A retenir 2-2

Les composantes d'un tenseur d'ordre n dans une base $\underline{e}_i^*$ se déduisent de ses composantes dans la base $\underline{e}_i$ en faisant intervenir n fois la matrice de passage qui exprime la base $\underline{e}_i$ en fonction de la base $\underline{e}_i^*$.

Cette propriété est caractéristique d'un tenseur, et c'est un **critère de tensorialité** : en d'autres termes, si une quantité « potentiellement tensorielle » respecte cette propriété, on peut affirmer que c'est un tenseur.

Exemple 2-3

Prenons l'exemple du tenseur calculé précédemment (section 2.1.2.2) et plaçons-nous pour la suite dans le plan (pas de composantes selon $\underline{e}_3$):

$$\underline{\underline{T}} = \underline{x} \otimes \underline{y} = (2\underline{e}_1) \otimes (\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2) = 2\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 4\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2$$

On fait le changement de base suivant :

$$\begin{cases} \underline{e}_1 = \cos \theta \underline{e}_1^* - \sin \theta \underline{e}_2^* \\ \underline{e}_2 = \sin \theta \underline{e}_1^* + \cos \theta \underline{e}_2^* \end{cases}$$

et on a donc la matrice de massage : $P^* = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

On peut réécrire le tenseur $\underline{\underline{T}}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}} &= 2(\cos \theta \underline{e}_1^* - \sin \theta \underline{e}_2^*) \otimes (\cos \theta \underline{e}_1^* - \sin \theta \underline{e}_2^*) + 4(\cos \theta \underline{e}_1^* - \sin \theta \underline{e}_2^*) \otimes (\sin \theta \underline{e}_1^* + \cos \theta \underline{e}_2^*) \\ \underline{\underline{T}} &= 2(\cos^2 \theta \underline{e}_1^* \otimes \underline{e}_1^* - \cos \theta \sin \theta \underline{e}_1^* \otimes \underline{e}_2^* - \cos \theta \sin \theta \underline{e}_2^* \otimes \underline{e}_1^* + \sin^2 \theta \underline{e}_2^* \otimes \underline{e}_2^*) \\ &\quad + 4(\cos \theta \sin \theta \underline{e}_1^* \otimes \underline{e}_1^* + \cos^2 \theta \underline{e}_1^* \otimes \underline{e}_2^* - \sin^2 \theta \underline{e}_2^* \otimes \underline{e}_1^* - \cos \theta \sin \theta \underline{e}_2^* \otimes \underline{e}_2^*) \\ \underline{\underline{T}} &= (2 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta \sin \theta) \underline{e}_1^* \otimes \underline{e}_1^* + (4 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta) \underline{e}_1^* \otimes \underline{e}_2^* \\ &\quad - (4 \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta) \underline{e}_2^* \otimes \underline{e}_1^* + (2 \sin^2 \theta - 4 \cos \theta \sin \theta) \underline{e}_2^* \otimes \underline{e}_2^* \end{aligned}$$

Si on reprend la forme ci-dessus pour le changement de base d'un tenseur, on peut noter

$T_{ij}^* = T_{lm} P_{li}^* P_{mj}^*$. Calculons les différents termes non nuls:

$$T_{11}^* = T_{11} P_{11}^* P_{11}^* + T_{12} P_{11}^* P_{21}^* + T_{21} P_{21}^* P_{11}^* + T_{22} P_{21}^* P_{11}^* = 2 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta \sin \theta$$

$$T_{12}^* = T_{11} P_{11}^* P_{12}^* + T_{12} P_{11}^* P_{22}^* + T_{21} P_{21}^* P_{12}^* + T_{22} P_{21}^* P_{12}^* = -2 \cos \theta \sin \theta + 4 \cos^2 \theta$$

$$T_{21}^* = T_{11} P_{12}^* P_{11}^* + T_{12} P_{12}^* P_{21}^* + T_{21} P_{22}^* P_{11}^* + T_{22} P_{22}^* P_{11}^* = -2 \cos \theta \sin \theta - 4 \sin^2 \theta$$

$$T_{22}^* = T_{11} P_{12}^* P_{12}^* + T_{12} P_{12}^* P_{22}^* + T_{21} P_{22}^* P_{12}^* + T_{22} P_{22}^* P_{12}^* = 2 \sin^2 \theta - 4 \cos \theta \sin \theta$$

On constate bien donc qu'on retrouve le résultat ci-dessus écrit en notation tensorielle.

2.1.4. Algèbre tensorielle

A retenir 2-3

Dans toute la suite, on appellera « **notation indicielle** » une équation faisant intervenir les **composantes** des tenseurs uniquement, ou « **notation tensorielle** » une équation faisant intervenir les **tenseurs**.

2.1.4.1 Addition tensorielle

On considère les deux tenseurs d'ordre 3 :

$$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \quad ; \quad \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$$

Le tenseur $\underline{\underline{S}} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ est la somme des tenseurs $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ si ses composantes dans la base de $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ sont :

$$S_{ijk} = A_{ijk} + B_{ijk} \quad \text{et on note : } \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$$

Cette première notation $S_{ijk} = A_{ijk} + B_{ijk}$ est donc écrite en **notation indicielle**, et la seconde forme $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ en **notation tensorielle**.

La généralisation à des tenseurs d'ordre n est immédiate, à condition que les tenseurs $\underline{\underline{S}}^n, \underline{\underline{A}}^n, \underline{\underline{B}}^n$ soient de même ordre.

2.1.4.2 Multiplication tensorielle

On considère les deux tenseurs d'ordre 4 et 2 :

$$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \quad ; \quad \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$$

Alors les composantes du produit tensoriel $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}}$ sont :

$$P_{ijklmn} = A_{ijkl} B_{mn} \quad , \text{ et le tenseur } \underline{\underline{P}} \text{ est donc d'ordre 6.}$$

La généralisation est immédiate dans le cas du produit de deux tenseurs d'ordres m et n , donc le produit donne un tenseur d'ordre $m + n$.

2.1.4.3 Produit contracté (ou contracté une fois, ou simplement contracté)

Soient $\underline{\underline{A}}^n$ et $\underline{\underline{B}}^m$ deux tenseurs d'ordres $n > 1$ et $m > 1$. Leur **produit contracté** (sous-entendu : contracté **une fois**) est le tenseur d'ordre $p = (n-1) + (m-1) = m + n - 2$:

$$\underline{\underline{P}}^p = \underline{\underline{A}}^n \cdot \underline{\underline{B}}^m$$

Les composantes de $\underline{\underline{P}}^p$ s'obtiennent par *contraction* d'un indice.

Prenons par exemple $n = 3$ et $m = 2$: les composantes du produit contracté entre $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ s'écrivent par **contraction** du dernier indice:

$$P_{ijl} = A_{ijk} B_{kl} \quad \text{et le tenseur } \underline{\underline{P}} \text{ est d'ordre } n + m - 2 = 3.$$

Exemple 2-4

Soient $\underline{x}$ et $\underline{y}$ deux vecteurs (tenseurs d'ordre 1) écrits sur la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

Leur produit contracté est donc un tenseur d'ordre $m+n-2=0$:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x} = x_i \underline{e}_i \\ \underline{y} = y_i \underline{e}_i \end{array} \right\} \underline{x} \cdot \underline{y} = x_i y_i$$

On observe alors que le produit contracté de deux vecteurs correspond au produit scalaire de ces deux vecteurs.

2.1.4.4 Produit doublement contracté (ou contracté deux fois)

On appelle **produit doublement contracté** un produit dans lequel **deux** indices sont contractés de la même façon que précédemment.

Soient $\mathbf{A}^n$ et $\mathbf{B}^m$ deux tenseurs d'ordres $n \geq 2$ et $m \geq 2$. Leur produit doublement contracté est le tenseur d'ordre $p = (n-2) + (m-2) = m+n-4$:

$$\mathbf{P}^p = \mathbf{A}^n : \mathbf{B}^m$$

Exemple 2-5

Prenons par exemple $n=m=2$: les composantes du produit doublement contracté entre $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ s'écrivent par double contraction de leurs indices :

$$P = A_{ij} B_{ij} = A_{11} B_{11} + A_{12} B_{12} + \dots + A_{32} B_{32} + A_{33} B_{33}$$

et le tenseur P est d'ordre $n+m-4=0$: c'est le **scalaire** qui correspond au produit deux à deux de toutes les composantes des tenseurs $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$.

Autre exemple : la **norme** du tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{A}}$ est le scalaire défini par :

$$\|\underline{\underline{A}}\| = (\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{A}})^{1/2} = (A_{ij} A_{ij})^{1/2} \geq 0$$

2.1.4.5 Trace d'un tenseur et tenseur identité,

Le tenseur **identité** d'ordre n peut s'écrire à partir du symbole de Kronecker :

$$I^n = \delta_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} \underline{e}_{i_1} \otimes \underline{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \underline{e}_{i_{n-1}} \otimes \underline{e}_{i_n}$$

Le tenseur d'identité d'ordre 2 sera souvent utilisé par la suite et s'écrit simplement :

$$\underline{\underline{I}} = \delta_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

La **trace** du tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{T}}$ est le **scalaire** résultant du produit doublement contracté de $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{I}}$:

$$Tr(\underline{\underline{T}}) = \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{I}} = T_{ij} I_{ij} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

2.1.4.6 Produit mixte, déterminant et inverse d'un tenseur

Le **produit mixte** a déjà été rencontré en classes préparatoires et se définit comme suit :

$$(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = (\underline{x} \wedge \underline{y}) \cdot \underline{z}$$

C'est un **scalaire** qui correspond au déterminant de la matrice formée par les trois vecteurs-colonnes des composantes de $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$. Dans le cas où $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ sont indépendants et forment un trièdre direct, le produit mixte $(\underline{x} \wedge \underline{y}) \cdot \underline{z}$ **est le volume du parallélépipède de côtés $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$** .

Posons désormais le symbole de **permutation circulaire** :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \text{ ou } i = k \text{ ou } j = k \\ 1 & \text{si } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\} \text{ ou } \{3, 1, 2\} \text{ ou } \{2, 3, 1\} \\ -1 & \text{si } \{i, j, k\} = \{1, 3, 2\} \text{ ou } \{2, 1, 3\} \text{ ou } \{3, 1, 2\} \end{cases}$$

On peut alors montrer que le produit mixte ci-dessus s'écrit de la façon suivante :

$$(\underline{x} \wedge \underline{y}) \cdot \underline{z} = \varepsilon_{ijk} x_i y_j z_k$$

A partir du même symbole de permutation circulaire, on peut montrer que le déterminant d'un tenseur d'ordre 2 quelconque $\underline{\underline{T}}$ est un scalaire qui a pour expression :

$$\det \underline{\underline{T}} = \varepsilon_{ijk} T_{1i} T_{2j} T_{3k}$$

On a de plus les propriétés : $\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \det \underline{\underline{A}} \det \underline{\underline{B}}$

Exemple 2-6

Calculons par exemple le déterminant du tenseur $\underline{\underline{T}}$ défini comme suit :

$$\underline{\underline{T}} = 2\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 4\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 3\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

Si on n'écrit que les termes non nuls du symbole de permutation on écrit:

$$\det \underline{\underline{T}} = \varepsilon_{ijk} T_{1i} T_{2j} T_{3k}$$

$$\begin{aligned} \det \underline{\underline{T}} &= \varepsilon_{123} T_{11} T_{22} T_{33} + \varepsilon_{231} T_{12} T_{23} T_{31} + \varepsilon_{312} T_{13} T_{21} T_{32} - \varepsilon_{321} T_{13} T_{22} T_{31} - \varepsilon_{213} T_{12} T_{21} T_{33} - \varepsilon_{132} T_{11} T_{23} T_{32} \\ &= T_{11} T_{22} T_{33} = 6 \end{aligned}$$

Le tenseur $\underline{\underline{T}}$ est dit **singulier** si $\det \underline{\underline{T}} = 0$. S'il est non singulier, on dit qu'il est **inversible** et il existe un unique tenseur **inverse** noté $\underline{\underline{T}}^{-1}$ qui satisfait la relation :

$$\underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1}$$

Si les tenseurs $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ sont inversibles, on peut noter les propriétés suivantes :

$$(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} \quad (\underline{\underline{A}}^{-1})^{-1} = \underline{\underline{A}}$$

2.1.5. Ecriture matricielle d'un tenseur d'ordre 1 ou 2

2.1.5.1 Ecriture matricielle des tenseurs

On a rappelé précédemment qu'un vecteur $\underline{x}$ était un **objet intrinsèque** (cas d'un vecteur-vitesse par exemple) qui a une existence physique séparée du repère qui est choisi pour décrire le référentiel. Les **composantes** de ce vecteur, projetées sur la base choisie pour décrire le référentiel, peuvent être écrites sous la forme d'un vecteur-colonne (ou matrice 3x1) :

$$[\underline{x}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La notation $[\underline{x}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}$ signifie donc « matrice des composantes du vecteur $\underline{x}$ dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ ».

Dans la suite, un tenseur sera également relié à une **quantité physique indépendante du repère dans lequel il est décrit**, c'est-à-dire qu'un tenseur est un **objet intrinsèque**. Dans le cas où on utilise une unique base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, on peut écrire :

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

La sommation sur i et j implique que le tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{T}}$ possède **9 composantes** dans le cas général, et on peut écrire :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{T}} = & T_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + T_{12} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + T_{13} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \dots \\ & T_{21} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + T_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + T_{23} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \dots \\ & T_{31} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 + T_{32} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2 + T_{33} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3\end{aligned}$$

Ainsi, **dans ce repère** $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, les **composantes** de ce tenseur d'ordre 2 peuvent être organisées sous la forme d'une matrice 3x3.

Par convention, le premier indice de T_{ij} correspond à la **ligne** de la matrice et le second indice à la **colonne** de cette matrice. On peut donc écrire les composantes du tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{T}}$ sous la forme :

$$[\underline{\underline{T}}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \text{Mat}\left(\underline{\underline{T}}, (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)\right) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

Il est essentiel en toute rigueur d'indiquer la base dans laquelle ces composantes sont écrites. On pourra lire « matrice des composantes du tenseur $\underline{\underline{T}}$ dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ ». Néanmoins, lorsque **la base dans laquelle $\underline{\underline{T}}$ est écrit est évidente**, on pourra s'abstenir de cette précision et noter uniquement cette matrice $[\underline{\underline{T}}]$.

A retenir 2-4

Lors d'un changement de base, les **composantes** du tenseur vont naturellement changer, de même que la **matrice** qui le représente dans cette base : néanmoins, la **quantité physique** décrite par le tenseur va rester inchangée.

2.1.5.2 Ecriture matricielle des opérations sur les tenseurs

Reprenons les différentes opérations tensorielles décrites ci-dessus, et tentant de les traduire en ce qui concerne les matrices qui peuvent décrire ces tenseurs dans une base donnée. On omettra dans cette section la notation $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ dans l'expression des matrices.

→ **La somme de deux tenseurs s'écrit :**

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} \text{ (notation **tensorielle**) ou } S_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \text{ (notation **indicielle**)}$$

La matrice représentative de la somme de deux tenseurs est la somme des matrices des composantes de ces deux tenseurs :

$$[\underline{\underline{S}}] = [\underline{\underline{A}}] + [\underline{\underline{B}}] \text{ (notation **matricielle**)}$$

→ **La multiplication tensorielle de deux vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{y}$ s'écrit :**

$$\underline{\underline{P}} = \underline{x} \otimes \underline{y} = x_i y_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$P_{ij}$$

On en déduit tout naturellement l'expression de la matrice des composantes de $\underline{\underline{P}}$:

$$[\underline{\underline{P}}] = [\underline{x}][\underline{y}]^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}$$

La notation $[\underline{y}]^T$ correspond à la transposée de la matrice des composantes de $\underline{y}$.

→ **Le produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2 s'écrit :**

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \text{ (notation **tensorielle**) ou } P_{ik} = A_{ij} B_{jk} \text{ (notation **indicielle**)}$$

On en déduit naturellement que le produit contracté correspond, en notation **matricielle**, à la multiplication de matrices telle qu'elle est enseignée en classes préparatoires.

$$[\underline{\underline{P}}] = [\underline{\underline{A}}][\underline{\underline{B}}]$$

Exemple 2-7

Considérons deux tenseurs dans $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 3\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2$$

$$\underline{\underline{B}} = 2\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + 3\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$$

Leur produit contracté s'écrit sous forme indicielle $P_{ik} = A_{ij} B_{jk}$, i.e. :

$$P_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = 0$$

$$P_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 11$$

$$P_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = 0$$

$$P_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = 0$$

En écriture matricielle, ces tenseurs et leur produit s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} [\underline{\underline{A}}] &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ [\underline{\underline{B}}] &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} [\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}] = [\underline{\underline{A}}][\underline{\underline{B}}] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ **Le produit contracté d'un tenseur d'ordre 2 avec un tenseur d'ordre 1** s'écrit tout naturellement d'après ce qui précède :

$$\underline{p} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{x} \quad (\text{notation **tensorielle**}) \quad \text{ou} \quad p_i = T_{ij} x_j \quad (\text{notation **indicielle**})$$

Ce produit sous forme **matricielle** s'écrit tout naturellement : $[\underline{p}] = [\underline{\underline{T}}][\underline{x}]$

→ **La trace d'un tenseur** est égale à la trace de la matrice des composantes de ce tenseur

→ **Lors d'un changement de base**, la matrice des composantes du tenseur d'ordre 2 dans la base $\underline{e}_i^*$ s'écrit en fonction de la matrice des composantes du tenseur dans la base $\underline{e}_i$ en faisant intervenir la matrice de passage P^* qui exprime la base $\underline{e}_i$ en fonction de la base $\underline{e}_i^*$:

$$[\underline{\underline{T}}]_{(\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^*)} = (P^*)^T \cdot [\underline{\underline{T}}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} \cdot P^*$$

Si on utilise P la matrice de passage qui exprime $\underline{e}_i^*$ dans $\underline{e}_i$, on a alors :

$$[\underline{\underline{T}}]_{(\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^*)} = P \cdot [\underline{\underline{T}}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} \cdot P^T$$

Exemple 2-8

Reprenons l'Exemple 2-3 dans le cas d'un tenseur dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$: $\underline{T} = 2\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 4\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2$

Son écriture matricielle est naturellement : $[\underline{T}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On reprend la matrice de massage $P^* = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Et on a vu précédemment que dans cette nouvelle base, les composantes du tenseur s'écrivaient :

$$[\underline{T}]_{(\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*)} = \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta \sin \theta & 4 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta \\ -4 \sin^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta & 2 \sin^2 \theta - 4 \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix}$$

Tentons de retrouver cette forme avec la formule énoncée ci-dessus :

$$\begin{aligned} [\underline{T}]_{(\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*)} &= (P^*)^T \cdot [\underline{T}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2)} \cdot P^* = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cos \theta & 4 \cos \theta \\ -2 \sin \theta & -4 \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta \sin \theta & -2 \cos \theta \sin \theta + 4 \cos^2 \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta - 4 \sin^2 \theta & 2 \sin^2 \theta - 4 \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.1.6. Les tenseurs d'ordre 2 comme applications linéaires ou bilinéaires

2.1.6.1 Les tenseurs d'ordre 2 comme applications linéaires

Au sens du produit contracté défini ci-dessus, **un tenseur d'ordre 2 peut être vu comme l'application linéaire :**

$$\begin{aligned} \underline{T} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \underline{x} &\rightarrow \underline{T} \cdot \underline{x} \end{aligned}$$

En ce sens, un tenseur d'ordre 2 est un **objet intrinsèque** (indépendant de la base choisie) qui permet de « **transformer un vecteur en un autre vecteur** ». Cette définition sera utile par la suite par exemple pour comprendre l'intérêt du tenseur des contraintes et interpréter ses composantes dans une base donnée.

Exemple 2-9

Soit un tenseur $\underline{\underline{T}}$ dans $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ tel que $\underline{\underline{T}} = 2\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 4\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2$, et soit le vecteur $\underline{x} = 2\underline{e}_1$.

Ce tenseur peut être vu par conséquent comme l'application qui à $\underline{x} = 2\underline{e}_1$ associe le vecteur :

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{x} = T_{ij} x_j \underline{e}_i = (T_{11} x_1 + \cancel{T_{12} x_2}) \underline{e}_1 + (\cancel{T_{21} x_1} + \cancel{T_{22} x_2}) \underline{e}_2 = T_{11} x_1 \underline{e}_1 = 4\underline{e}_1$$

2.1.6.2 Les tenseurs d'ordre 2 comme applications bilinéaires

De la même façon que précédemment, **un tenseur d'ordre 2 peut être vu comme l'application bilinéaire :**

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\underline{x}, \underline{y}) &\rightarrow \underline{x} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{y} \end{aligned}$$

Selon cette définition, un tenseur « transforme un couple de vecteurs en scalaire ».

Exemple 2-10

Soit un tenseur $\underline{\underline{T}}$ dans $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ tel que $\underline{\underline{T}} = 2\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 4\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2$ et les vecteurs $\underline{x} = 2\underline{e}_1$ et $\underline{y} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2$.

Ce tenseur peut être vu par conséquent comme l'application qui à $(\underline{x}, \underline{y})$ associe le scalaire :

$$\underline{x} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{y} = x_i T_{ij} y_j = x_1 T_{11} y_1 + \cancel{x_2 T_{12} y_2} + x_1 T_{12} y_2 + \cancel{x_2 T_{22} y_2} = 12$$

2.1.6.3 Transposition et symétrie d'un tenseur d'ordre 2

Le point de vue précédent (le tenseur comme application bilinéaire) permet de définir **le transposé $\underline{\underline{T}}^T$ d'un tenseur d'ordre 2** quelconque $\underline{\underline{T}}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}}^T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\underline{x}, \underline{y}) &\rightarrow \underline{\underline{T}}^T(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x} \cdot \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{y} = \underline{\underline{T}}(\underline{y}, \underline{x}) = \underline{y} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{x} \end{aligned}$$

On montre ainsi facilement que la matrice des composantes de $\underline{\underline{T}}^T$ est la transposée de la matrice des composantes de $\underline{\underline{T}}$.

On définit les **tenseurs symétriques** comme ceux qui sont égaux à leur transposé :

$$\underline{\underline{T}} \text{ est symétrique} \Leftrightarrow \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T$$

On définit les **tenseurs antisymétriques** comme ceux qui sont égaux à l'opposé de leur transposé :

$$\underline{\underline{T}} \text{ est antisymétrique} \Leftrightarrow \underline{\underline{T}} = -\underline{\underline{T}}^T$$

On peut montrer de façon évidente que **la trace d'un tenseur d'ordre 2 antisymétrique est nulle**. Il possède donc uniquement 3 composantes indépendantes, et en ce sens il se « comporte comme » un vecteur, propriété qui sera largement utilisée en mécanique des fluides pour définir le vecteur tourbillon (voir 7.1.3).

Intéressons-nous désormais à **la transposition du produit contracté** $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ de deux tenseurs d'ordre 2. Par définition on a :

$$\underline{x} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) \cdot \underline{y} = \underline{y} \cdot \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{x} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{T}}^T = (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^T$$

On peut réécrire ceci en notation indicielle :

$$x_i T_{ij} y_j = x_i A_{ik} B_{kj} y_j = y_j T_{ij} x_i \Rightarrow T_{ji} = B_{jk} A_{ki} \Rightarrow \underline{\underline{T}}^T = \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{A}}^T$$

Appliquons la règle ci-dessus au cas du **produit contracté d'un vecteur par un tenseur d'ordre 2**. On a alors :

$$\underline{a} = \underline{b} \cdot \underline{\underline{T}} \Rightarrow \underline{a} = \underline{a}^T = (\underline{b} \cdot \underline{\underline{T}})^T = \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{b}^T = \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{b}$$

On vient donc de montrer le résultat suivant, qui sera fréquemment et implicitement utilisé dans des démonstrations qui vont suivre :

$$\underline{b} \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{b}$$

Cette formule est évidente en notation indicielle :

$$\underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{b} = T_{ji} b_j e_i = b_j T_{ij} e_j = \underline{b} \cdot \underline{\underline{T}}$$

La notation suivante sera adoptée par la suite : $(\underline{\underline{T}}^{-1})^T = \underline{\underline{T}}^{-T}$

2.1.6.4 Tenseur orthogonal

En considérant le tenseur comme application linéaire, on peut facilement définir le tenseur **orthogonal** $\underline{\underline{R}}$ comme l'application linéaire qui vérifie la condition:

$$\forall (\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad (\underline{\underline{R}} \cdot \underline{x}) \cdot (\underline{\underline{R}} \cdot \underline{y}) = \underline{x} \cdot \underline{y}$$

Cette application linéaire ne transforme donc pas le produit scalaire $\underline{x} \cdot \underline{y}$, ce qui veut dire qu'à la fois les normes des vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{y}$ et l'angle θ entre ces deux vecteurs sont préservés lors de cette transformation.

Un tenseur orthogonal montre la propriété suivante :

$$\underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{I}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}^T$$

Lorsque $\det \underline{\underline{R}} = 1$, nous verrons que l'application linéaire $\underline{\underline{R}}$ correspond à une **rotation**.

2.1.7. Quelques propriétés des tenseurs d'ordre 2

2.1.7.1 Décomposition en partie symétrique / antisymétrique

A partir des définitions qui viennent d'être posées, on peut facilement à partir d'un tenseur $\underline{\underline{T}}$ quelconque définir les deux quantités suivantes :

$$\underline{\underline{T}}^{(1)} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T) \quad \underline{\underline{T}}^{(2)} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T)$$

On peut facilement observer que la somme de ces deux tenseurs est égale au tenseur $\underline{\underline{T}}$:

$$\underline{\underline{T}}^{(1)} + \underline{\underline{T}}^{(2)} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T - \underline{\underline{T}}^T) = \underline{\underline{T}}$$

De plus, on observe aisément que le tenseur $\underline{\underline{T}}^{(1)}$ est symétrique :

$$(\underline{\underline{T}}^{(1)})^T = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}}^T + \underline{\underline{T}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T)$$

De même, on observe que le tenseur $\underline{\underline{T}}^{(2)}$ est antisymétrique :

$$(\underline{\underline{T}}^{(2)})^T = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}}^T - \underline{\underline{T}}) = -\frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T)$$

A retenir 2-5

On vient donc de montrer simplement qu'un tenseur quelconque d'ordre 2 peut être décomposé comme la **somme** d'un tenseur d'ordre 2 **antisymétrique** et d'un tenseur d'ordre 2 **symétrique** :

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^{sym} + \underline{\underline{T}}^{antisym} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\underline{T}}^{sym} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T) \\ \underline{\underline{T}}^{antisym} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T) \end{cases}$$

2.1.7.2 Directions et valeurs principales d'un tenseur

Soit $\underline{\underline{T}}$ un tenseur d'ordre deux symétrique. On appelle respectivement **valeur propre (ou principale)** et **vecteur propre (ou principal)** le scalaire λ et le vecteur $\underline{v}$ tels que :

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} = \lambda \underline{v}$$

λ est alors la valeur principale associée à la direction principale $\underline{v}$. Pour calculer λ et $\underline{v}$, on résout dans un premier temps l'équation:

$$\det(\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$$

On trouve alors trois valeurs de λ qu'on note T_I , T_{II} et T_{III} , et les trois directions principales associées à chaque valeur propre sont calculées en résolvant:

$$(\underline{\underline{T}} - T_i \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{e}_i = \underline{0} \quad (\text{pas de sommation sur } i) \quad \text{avec } \underline{e}_i \cdot \underline{e}_i = 1$$

Nous affirmerons sans démonstration que si les trois valeurs principales de $\underline{\underline{T}}$ sont distinctes, alors les trois directions principales sont mutuellement orthogonales.

A retenir 2-6

La base formée par les trois vecteurs propres est appelée **base principale**. Dans cette base, on a:

$$\underline{\underline{T}} = T_I \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + T_{II} \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II} + T_{III} \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III} \quad \text{ou encore} \quad [\underline{\underline{T}}]_{(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})} = \begin{pmatrix} T_I & 0 & 0 \\ 0 & T_{II} & 0 \\ 0 & 0 & T_{III} \end{pmatrix}$$

2.2. Analyse tensorielle

2.2.1. Champs de tenseurs

La définition de champs **scalaires** et **vectoriels** a déjà été rappelée ci-dessus. Par extension, on définira par un **champ de tenseurs** ou **champ tensoriel** une application qui va d'un *ouvert* Ω de l'espace physique (le volume du milieu que l'on va considérer) vers l'espace vectoriel d'un certain ordre (dans l'exemple ci-dessus d'ordres 0 et 1).

Cette définition étant prise, en identifiant un point M quelconque de l'ouvert Ω à son vecteur position $\underline{x} = \underline{OM}$, on peut poser qu'un champ de tenseurs est une fonction qui à tout $\underline{x}$ associe le tenseur $\mathbf{T}^n(\underline{x})$ d'ordre n :

$$\underline{x} \in \Omega \rightarrow \mathbf{T}^n(\underline{x}) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^3$$

Dans la suite, on pourra pour alléger la notation utiliser l'expression $\mathbf{T}^n$ plutôt que $\mathbf{T}^n(\underline{x})$: il ne faudra cependant pas perdre de vue qu'il s'agit bien d'un **champ de tenseurs**, et donc qu'il existe un tenseur *a priori* différent pour chaque point de Ω .

2.2.2. Gradient d'un champ de tenseurs

2.2.2.1 Opérateur Nabla

Il peut être utile pour la suite d'introduire ici l'**opérateur Nabla** qui a pour définition :

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i$$

On peut par exemple calculer la quantité suivante (a étant un scalaire quelconque):

$$\underline{\nabla} a = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i \right) a = \frac{\partial a}{\partial x_i} \underline{e}_i = \frac{\partial a}{\partial x_1} \underline{e}_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2} \underline{e}_2 + \frac{\partial a}{\partial x_3} \underline{e}_3$$

Pour alléger les notations lors de ces écritures indicielles, il est fréquent de trouver la notation « $,i$ » pour signifier « dérivée partielle par rapport à x_i ». Ainsi, la quantité ci-dessus peut s'écrire tout simplement :

$$\underline{\nabla} a = a_{,i} \underline{e}_i$$

2.2.2.2 Définition intrinsèque

Soit $\mathbf{T}^n(\underline{x})$ un champ de tenseurs d'ordre n sur un volume Ω . L'analyse locale de ce champ autour du point de coordonnées $\underline{x}$ consiste à écrire la quantité :

$$d\mathbf{T}^n = \mathbf{T}^n(\underline{x} + d\underline{x}) - \mathbf{T}^n(\underline{x})$$

En linéarisant l'expression de la différentielle $d\mathbf{T}^n$, on montre qu'il existe une application linéaire qui au vecteur $\underline{dx}$ fait correspondre $d\mathbf{T}^n$: c'est un champ de tenseurs d'ordre $n+1$ qu'on nomme **gradient du champ de tenseurs** $\mathbf{T}^n(\underline{x})$ et qu'on peut définir sous forme mathématique :

$$\begin{aligned} \text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^3 \\ \underline{dx} &\rightarrow d\mathbf{T}^n = \text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) \cdot \underline{dx} \end{aligned}$$

On note ici le produit contracté qui fait bien « diminuer » l'ordre du tenseur de $n+1$ pour $\text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x}))$ à n pour $d\mathbf{T}^n$.

Remarque de notation : à partir du chapitre suivant, on fera la distinction entre les opérateurs $\text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{X}))$ et $\text{grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x}))$. Pour l'instant, cette distinction n'est pas faite.

Au vu de cette définition, les mathématiciens appellent souvent cet opérateur **l'application linéaire tangente** à $\mathbf{T}^n(\underline{x})$, dans la mesure où le gradient est l'approximation linéaire locale du champ $\mathbf{T}^n(\underline{x})$: cette définition est intuitive dans le cas d'un champ d'ordre 1 (champ vectoriel) comme le montre la figure ci-dessous :

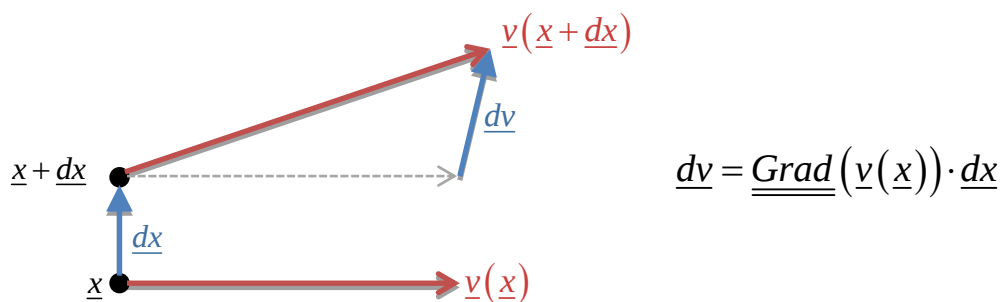


Figure 10: Illustration du gradient d'un champ de vecteurs.

Considérons un repère orthonormé. Le calcul différentiel nous permet d'écrire dans cette base :

$$d\mathbf{T}^n = \frac{\partial \mathbf{T}^n}{\partial x_i} dx_i = \mathbf{T}^n_{,i} dx_i$$

La **dérivée partielle** d'un tenseur s'écrit tout naturellement :

$$\frac{\partial \mathbf{T}^n}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}^n(\underline{x} + h \underline{e}_i) - \mathbf{T}^n(\underline{x})}{h}$$

Si on reprend la définition générale du gradient énoncée ci-dessus sachant que

$d\underline{x} = dx_i \underline{e}_i$, on peut donc identifier :

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{T}^n &= \frac{\partial \mathbf{T}^n}{\partial x_i} dx_i = \mathbf{T}^n_{,i} dx_i \\ &= \text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) \cdot d\underline{x} = \text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) \cdot \underline{e}_i dx_i \end{aligned} \right\} \mathbf{T}^n_{,i} = \text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) \cdot \underline{e}_i$$

On en déduit par conséquent l'expression du gradient :

$$\frac{d\mathbf{T}^n}{\partial x_i} = \text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) \cdot \underline{e}_i$$

On va pouvoir à partir de cette définition définir l'expression du gradient dans les repères cartésiens, cylindriques et sphériques définis ci-dessus.

L'opérateur Nabla est couramment utilisé pour écrire les opérateurs gradient, divergence et rotationnel. En effet, il sera courant dans d'autres ouvrages concernant la MMC et ses applications aux fluides et solides de trouver la notation :

$$\begin{aligned} \underline{\text{Grad}} \, a &= \underline{\nabla} a \\ \underline{\underline{\text{Grad}}} \, \underline{a} &= \underline{a} \otimes \underline{\nabla} \end{aligned}$$

2.2.2.3 Expression en coordonnées cartésiennes

→ gradient d'un champ de scalaires

$$\underline{\text{Grad}} \, T = \frac{\partial T}{\partial x_1} \underline{e}_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} \underline{e}_2 + \frac{\partial T}{\partial x_3} \underline{e}_3 = T_{,i} \underline{e}_i$$

→ gradient d'un champ de vecteurs

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{Grad}}} \, \underline{T} &= \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \\ &\quad \frac{\partial T_2}{\partial x_1} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial T_2}{\partial x_3} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \\ &\quad \frac{\partial T_3}{\partial x_1} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial T_3}{\partial x_2} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial T_3}{\partial x_3} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \\ &= T_{i,j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \end{aligned}$$

On retrouve, pour un champ scalaire T , une expression vue en classes préparatoires. On observe que **le gradient d'un champ scalaire est un champ vectoriel**, et que **le gradient d'un champ vectoriel est un champ tensoriel d'ordre 2**.

2.2.2.4 Expression en coordonnées cylindriques

→ gradient d'un champ de scalaires

$$\underline{\text{Grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \underline{e}_z$$

→ gradient d'un champ de vecteurs

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{T} = & \frac{\partial T_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial T_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial T_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

2.2.2.5 Expression en coordonnées sphériques

→ gradient d'un champ de scalaires

$$\underline{\text{Grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{\partial T}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial \varphi} \underline{e}_\varphi$$

→ gradient d'un champ de vecteurs

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{T} = & \left(\frac{\partial T_r}{\partial r} \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T_r}{\partial \varphi} - T_\varphi \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\varphi + \\ & \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial r} \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T_\theta}{\partial \varphi} - \cot \theta T_\varphi \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\varphi + \\ & \left(\frac{\partial T_\varphi}{\partial r} \right) \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\varphi}{\partial \theta} \right) \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi} - \cot \theta T_\theta + T_r \right) \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi \end{aligned}$$

2.2.2.6 Cas particulier du gradient d'un champ de scalaire

Considérons la fonction scalaire $T(\underline{x})$ (par exemple la température d'un milieu). La condition $T(\underline{x}) = \text{cste}$ définit une surface sur laquelle le champ scalaire est constant. Un point voisin $\underline{x} + d\underline{x}$ sur cette iso-surface peut donc être défini par l'équation $dT = 0$. La normale à cette surface est définie par les trois scalaires $\partial T / \partial x_1, \partial T / \partial x_2, \partial T / \partial x_3$ qui

sont les composantes du gradient de $T(\underline{x})$. On peut donc conclure que le vecteur $\underline{\text{Grad}}(T(\underline{x})) = T_{,i} \underline{e}_i$ est un vecteur perpendiculaire à la surface $T(\underline{x}) = \text{cste}$, et par conséquent **le vecteur normal à la surface** est défini par :

$$\underline{n}(\underline{x}) = \underline{\text{Grad}}(T(\underline{x})) / \|\underline{\text{Grad}}(T(\underline{x}))\|$$

2.2.2.7 Cas particulier du gradient d'un champ de vecteurs

On a vu précédemment (section 2.1.7.1) qu'un tenseur quelconque d'ordre 2 peut être décomposé comme la somme d'un tenseur d'ordre 2 antisymétrique et d'un tenseur d'ordre 2 symétrique :

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^{\text{sym}} + \underline{\underline{T}}^{\text{antisym}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\underline{T}}^{\text{sym}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T) \\ \underline{\underline{T}}^{\text{antisym}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T) \end{cases}$$

Si on prend l'exemple du gradient d'un champ de vecteurs $\underline{T}(\underline{x})$, on obtient un champ de tenseurs d'ordre 2 du type :

$$\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{T} = T_{i,j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

Il peut être donc décomposé en deux champs de tenseurs d'ordre 2 respectivement symétrique et antisymétrique, que l'on notera $\underline{\underline{D}}$ et $\underline{\underline{\Omega}}$ en prenant un peu d'avance sur la suite (3.2.5), et on a donc :

$$\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{T} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\Omega}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{T} + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{T})^T) = \underline{\underline{D}}^T \\ \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{T} - (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{T})^T) = -\underline{\underline{\Omega}}^T \end{cases}$$

On en déduit donc (d'après les propriétés du produit contracté) la relation :

$$d\underline{T} = (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{T}) \cdot d\underline{x} = \underline{\underline{D}} \cdot d\underline{x} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot d\underline{x}$$

A partir de ces considérations, on peut montrer que le champ de tenseurs symétrique $\underline{\underline{D}}$ décrit la **déformation locale** du milieu, tandis que le champ de tenseurs antisymétrique $\underline{\underline{\Omega}}$ décrit la **rotation locale** du milieu.

Cette décomposition est illustrée ci-dessous pour un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$, qui est l'approximation linéaire autour de l'origine d'un champ de vecteurs réel. Ce

champ $d\mathbf{T} = \underline{\underline{\text{Grad}}}(\mathbf{T}(\underline{0})) \cdot d\mathbf{x}$ est décomposé en un champ correspondant **autour de l'origine** à la déformation locale $\underline{\underline{D}}(\underline{0}) \cdot d\mathbf{x}$ et à la rotation locale $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{0}) \cdot d\mathbf{x}$ (Figure 11).

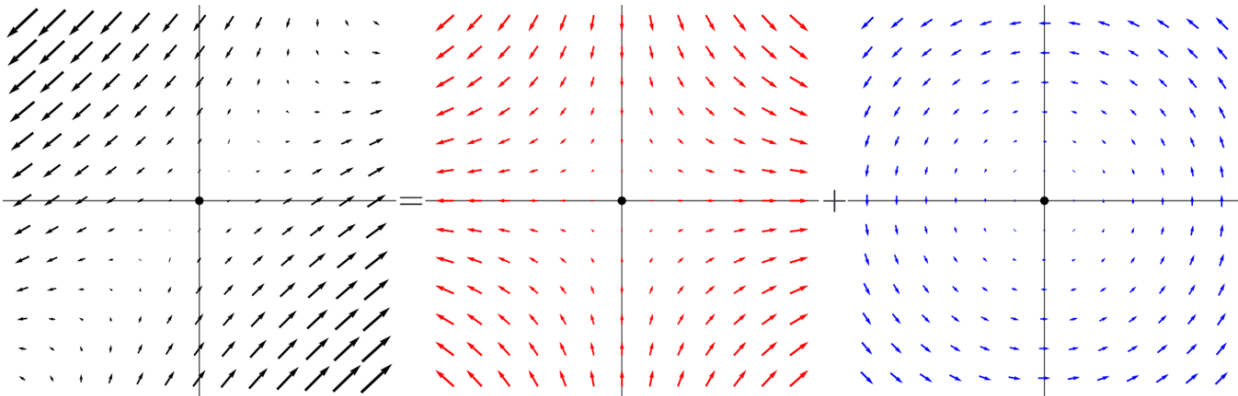


Figure 11: Décomposition d'un champ $d\mathbf{T} = \underline{\underline{\text{Grad}}}(\mathbf{T}(\underline{0})) \cdot d\mathbf{x}$, approximation autour de l'origine d'un champ de vecteurs réel $\mathbf{T}(\underline{x})$, en un champ correspondant à la « déformation locale » $\underline{\underline{D}}(\underline{0}) \cdot d\mathbf{x}$ (en rouge) et à un champ correspondant à la « rotation locale » $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{0}) \cdot d\mathbf{x}$ (en bleu). E. Plaut (ENSMN).

2.2.3. Divergence d'un champ de tenseurs

2.2.3.1 Définition intrinsèque

Soit $\mathbf{T}^n(\underline{x})$ un champ de tenseurs d'ordre $n \geq 1$ sur un volume Ω . On a vu que le gradient de ce champ de tenseurs était un champ de tenseurs d'ordre $n+1 \geq 2$. On définit la **divergence** du champ de tenseurs $\mathbf{T}^n(\underline{x})$ de la façon suivante :

$$\text{Div}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) = \text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) : \underline{\underline{I}}$$

D'après la définition du produit doublement contracté (section 2.1.4.4), le champ de tenseurs correspondant à la divergence de $\mathbf{T}^n(\underline{x})$ est d'ordre $(n+1)+2-4 = n-1$.

Une première interprétation physique de l'opérateur divergence peut se faire en considérant le cas de la divergence d'un champ de vecteurs $\mathbf{T}(\underline{x})$, qui est donc un champ tenseurs d'ordre $n-1=0$ soit un champ de scalaires. La divergence de ce champ autour de l'origine correspond à la façon dont il « converge » vers ce point ou « diverge » de ce point : le champ de scalaires résultant sera positif à l'origine dans le cas où les vecteurs

« divergent » de l'origine, et négatif dans le cas où les vecteurs « convergent » vers l'origine (Figure 12).

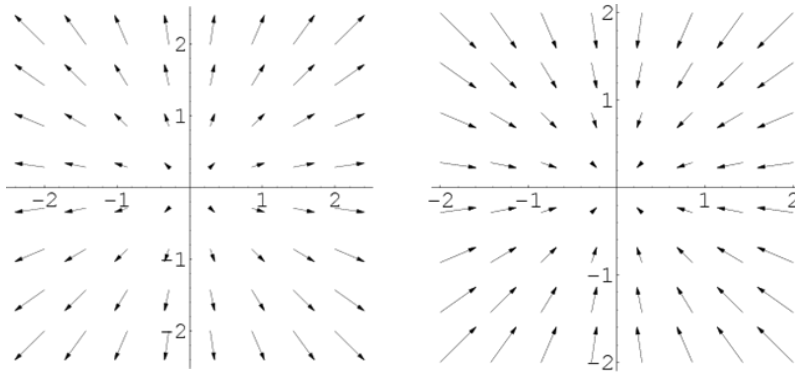


Figure 12: Interprétation physique élémentaire de la divergence d'un champ de vecteurs $\underline{T}(\underline{x})$: à gauche, la divergence évaluée à l'origine est positive ; à droite, la divergence évaluée à l'origine est négative.

Dans le cas où cet opérateur divergence est appliquée à un champ de vecteurs $\underline{T}(\underline{x})$, on peut noter au passage qu'on a la relation suivante :

$$\text{Div}(\underline{T}(\underline{x})) = \underline{\underline{\text{Grad}}}(\underline{T}(\underline{x})) : \underline{\underline{I}} = \text{Tr}(\underline{\underline{\text{Grad}}}(\underline{T}(\underline{x}))) = T_{i,i} = \frac{\partial T_i}{\partial x_i}$$

Dans le cas où l'opérateur divergence est appliqué à un champ de tenseur d'ordre 2, il vient naturellement :

$$\underline{\underline{\text{Div}}} \underline{\underline{T}} = (\underline{\underline{\text{Grad}}}(\underline{\underline{T}})) : \underline{\underline{I}} = (T_{ij,k} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k) : (\delta_{lm} \underline{e}_l \otimes \underline{e}_m) = T_{ij,j} \underline{e}_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i$$

Enfin, on peut remarquer que l'opérateur divergence peut être défini à partir de l'opérateur Nabla :

$$\begin{aligned} \text{Div} \underline{T} &= \underline{T} \cdot \underline{\nabla} = \frac{\partial T_i}{\partial x_i} \\ \underline{\underline{\text{Div}}} \underline{\underline{T}} &= \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i \end{aligned}$$

Il est intéressant pour ce qui va suivre d'évoquer la propriété suivante de l'opérateur divergence, qui sera notamment nécessaire pour en effectuer une interprétation physique à partir de sa formulation intégrale :

$$\text{Div}(\alpha \underline{T}) = \alpha \text{Div}(\underline{T}) + \underline{T} \cdot \underline{\text{Grad}}(\alpha)$$

avec α un scalaire et $\underline{T}$ un vecteur quelconques.

Cette propriété se démontre rapidement en notation indicielle :

$$\text{Div}(\alpha \underline{T}) = \frac{\partial(\alpha T_i)}{\partial x_i} = T_i \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} + \alpha \frac{\partial T_i}{\partial x_i} = \underline{T} \cdot \underline{\text{Grad}}(\alpha) + \alpha \text{Div}(\underline{T})$$

On peut facilement faire le même type de raisonnement pour l'ordre supérieur :

$$\text{Div}(\underline{T} \cdot \underline{t}) = \frac{\partial(T_{ij} t_j)}{\partial x_i} = T_{ij} \frac{\partial t_j}{\partial x_i} + t_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} = \underline{T} : \underline{\text{Grad}}(\underline{t}) + \underline{t} \cdot \underline{\text{Div}} \underline{T} \quad (\text{si } \underline{T} \text{ symétrique})$$

Exemple 2-11

On peut montrer (section 2.1.4.5) la propriété suivante pour le produit doublement contracté du champ de tenseurs d'ordre 2 $\underline{\underline{A}}$ par le champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques $\underline{\underline{B}}$:

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \text{Tr}(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})$$

On peut facilement en déduire la relation suivante pour un champ de vecteurs $\underline{v}(\underline{x})$ à partir de la définition de l'opérateur divergence :

$$\text{Div}(\underline{v}) = \underline{\underline{\text{Grad}}}(\underline{v}) : \underline{\underline{I}} = \text{Tr}(\underline{\underline{\text{Grad}}}(\underline{v}) \cdot \underline{\underline{I}}) = \text{Tr}(\underline{\underline{\text{Grad}}}(\underline{v}))$$

Ainsi, si on reprend la décomposition du gradient d'un champ de tenseurs en deux tenseurs $\underline{\underline{D}}$ et $\underline{\underline{\Omega}}$, on obtient :

$$\text{Div}(\underline{v}) = \text{Tr}(\underline{\underline{\text{Grad}}}(\underline{v})) = \text{Tr}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\Omega}}) = \text{Tr}(\underline{\underline{D}}) + \cancel{\text{Tr}(\underline{\underline{\Omega}})}$$

On peut en déduire notamment que la « rotation locale » du champ n'intervient pas dans la divergence de ce champ, qui est uniquement fonction de la « déformation locale » du champ.

2.2.3.2 Formulation intégrale : théorème de flux-divergence

Le **théorème de flux-divergence**, ou plus simplement **théorème de la divergence**, ou encore formule de **Stokes-Ostrogradski**, sera largement utilisé dans la suite de ce cours et donne une interprétation physique de la divergence d'un champ de tenseurs.

On considère un ouvert Ω de l'espace physique, fermé par une **frontière** $\partial\Omega$ sur laquelle on peut définir en tout point $\underline{x} \in \partial\Omega$ un **vecteur unitaire normal sortant** $\underline{n}(\underline{x})$.

(Figure 13) Le vecteur non unitaire $\underline{n}(\underline{x})da$ est un **élément de surface orienté** vers la normale sortante à $\partial\Omega$ et d'aire da .

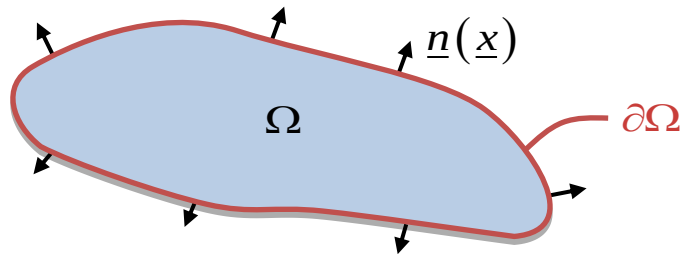


Figure 13: Ouvert Ω de l'espace physique de frontière $\partial\Omega$ et vecteur unitaire normal sortant $\underline{n}(\underline{x})$

Soit $\mathbf{T}^n(\underline{x})$ un champ de tenseurs d'ordre $n \geq 1$ sur ce volume Ω . La **formule de flux-divergence** stipule que le flux de $\mathbf{T}^n(\underline{x})$ à travers la frontière $\partial\Omega$ est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ $\mathbf{T}^n(\underline{x})$ sur tout le volume, soit :

$$\int_{\Omega} \text{Div}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}^n(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) da$$

Ce théorème de flux-divergence sera considéré comme un acquis dans toute la suite de ce cours et sera particulièrement appliqué dans le cas d'un champ de vecteurs $\underline{T}(\underline{x})$ ou de tenseurs d'ordre 2 $\underline{\underline{T}}(\underline{x})$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{Div}(\underline{T}) d\Omega &= \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{n} da \\ \int_{\Omega} \text{Div}(\underline{\underline{T}}) d\Omega &= \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n} da \end{aligned}$$

2.2.3.3 Expression en coordonnées cartésiennes

→ divergence d'un champ de vecteurs

$$\text{Div} \underline{T} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial T_3}{\partial x_3} = T_{i,i}$$

→ divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2:

$$\begin{aligned} \text{Div} \underline{\underline{T}} &= \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \right) \underline{e}_1 + \left(\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \right) \underline{e}_2 + \left(\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \right) \underline{e}_3 \\ &= T_{ij,j} \underline{e}_i \end{aligned}$$

2.2.3.4 Expression en coordonnées cylindriques

→ divergence d'un champ de vecteurs

$$\text{Div } \underline{T} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rT_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T_z}{\partial z}$$

→ divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2 symétrique:

$$\begin{aligned} \underline{\text{Div}} \underline{T} = & \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \right) \underline{e}_r + \\ & \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{\theta r} + T_{r\theta}) + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \right) \underline{e}_\theta + \\ & \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{zr} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \underline{e}_z \end{aligned}$$

2.2.3.5 Expression en coordonnées sphériques

→ divergence d'un champ de vecteurs

$$\text{Div } \underline{T} = \frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi} + \cot \theta \frac{T_\theta}{r} + 2 \frac{T_r}{r}$$

→ divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2 symétrique:

$$\begin{aligned} \underline{\text{Div}} \underline{T} = & \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi} - T_{r\theta} \cot \theta) \right) \underline{e}_r + \\ & \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} ((T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}) \cot \theta + 3T_{r\theta}) \right) \underline{e}_\theta + \\ & \left(\frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3T_{r\varphi} + 2T_{\theta\varphi} \cot \theta) \right) \underline{e}_\varphi \end{aligned}$$

2.2.4. Laplacien d'un champ de tenseurs

Les définitions des opérateurs *gradient* et *divergence* étant posées, on peut définir l'opérateur **laplacien d'un champ de tenseurs** comme la *divergence du gradient* de ce champ de tenseurs. Soit $\mathbf{T}^n(\underline{x})$ un champ de tenseurs d'ordre n sur un volume Ω : le champ de tenseurs $\text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x}))$ est d'ordre $n+1$, et par conséquent la divergence de ce nouveau champ est d'ordre n : l'opérateur laplacien conserve par conséquent l'ordre du tenseur. Cet opérateur, noté $\Delta(\mathbf{T}^n(\underline{x}))$, peut être noté à partir de l'opérateur différentiel pour des tenseurs d'ordre 1 et 2:

$$\Delta T = \text{Div}(\underline{\text{Grad}} T) = (\underline{\nabla} T) \cdot \underline{\nabla} = \nabla^2 T$$

$$\underline{\Delta} T = \underline{\text{Div}}(\underline{\text{Grad}} T) = (\underline{T} \otimes \underline{\nabla}) \cdot \underline{\nabla}$$

Son interprétation se déduit de celles des opérateurs gradient et divergence et elle est intuitive pour un champ scalaire T : si $\Delta T(\underline{x}) > 0$, cela signifie que $\underline{\text{Grad}} T$ diverge autour de $\underline{x}$, et donc que $T(\underline{x})$ admet un minimum local en $\underline{x}$.

Exemple 2-12

Considérons la fonction « altitude », qui en tout point du plan $\mathbb{R}^2$ associe un scalaire z , selon la fonction $z(\underline{x}) = x_1 e^{-(x_1^2 + x_2^2)}$, représentée ci-dessous (Figure 14), qui possède un minimum local et un maximum local. On voit alors nettement que le champ de vecteurs correspondant au gradient de la fonction scalaire « **diverge** » au niveau du minimum local et « **converge** » au niveau du maximum local. La divergence du gradient, soit le laplacien, est donc positive au minimum local et négative au maximum local.

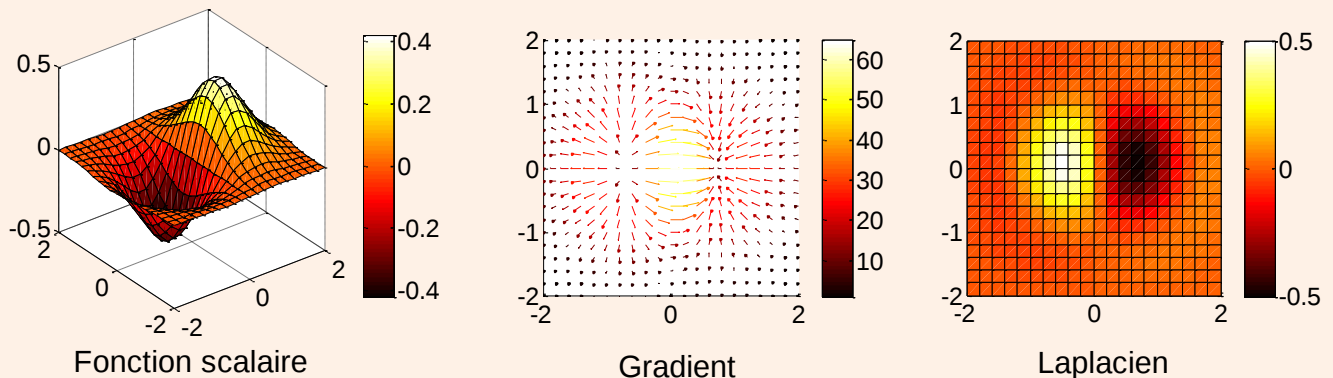


Figure 14: Gradient et laplacien d'une fonction scalaire.

2.2.5. Rotationnel d'un champ de tenseurs

2.2.5.1 Définition de l'opérateur rotationnel

On a évoqué ci-dessus l'existence d'un opérateur **rotationnel**, utile notamment pour caractériser la rotation locale d'un milieu en mouvement.

→ rotationnel d'un champ de vecteurs

Si l'on considère le champ de vecteurs $\underline{T}(\underline{x})$, le rotationnel de ce champ de vecteurs se calcule facilement à partir de l'opérateur Nabla selon la formule :

$$\underline{\text{Rot}} \underline{T} = \underline{\nabla} \wedge \underline{T} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial T_k}{\partial x_j} \underline{e}_i$$

On constate donc que **le rotationnel d'un champ de vecteurs est un champ de vecteurs**.

En coordonnées cartésiennes, le rotationnel d'un champ de vecteurs s'exprime :

$$\begin{aligned} \underline{\text{Rot}} \underline{T} &= \left(\frac{\partial T_3}{\partial x_2} - \frac{\partial T_2}{\partial x_3} \right) \underline{e}_1 + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x_3} - \frac{\partial T_3}{\partial x_1} \right) \underline{e}_2 + \left(\frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \right) \underline{e}_3 \\ &= \varepsilon_{ijk} T_{k,j} \underline{e}_i \end{aligned}$$

En coordonnées cylindriques, son expression devient :

$$\underline{\text{Rot}} \underline{T} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} - \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \right) \underline{e}_r + \left(\frac{\partial T_r}{\partial z} - \frac{\partial T_z}{\partial r} \right) \underline{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r T_\theta}{\partial r} - \frac{\partial T_r}{\partial \theta} \right) \underline{e}_z$$

Enfin, en coordonnées sphériques, le rotationnel d'un champ de vecteurs s'exprime :

$$\underline{\text{Rot}} \underline{T} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \sin \theta T_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial T_\theta}{\partial \varphi} \right) \underline{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial r T_\varphi}{\partial r} \right) \underline{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r T_\theta}{\partial r} - \frac{\partial T_r}{\partial \theta} \right) \underline{e}_\varphi$$

Considérons maintenant le cas d'un champ de tenseurs d'ordre 2 $\underline{\underline{T}}$. On peut définir deux champs de tenseurs rotationnels à partir de ce champ de tenseurs : le **rotationnel à gauche** et le **rotationnel à droite**.

→ rotationnel à gauche d'un champ de tenseurs d'ordre 2

On définit le rotationnel à gauche de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\text{Rot}}}^g \underline{\underline{T}} = \varepsilon_{ipq} T_{qj,p} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

C'est donc un champ de tenseurs d'ordre 2 dont les composantes se déterminent plus facilement à partir de l'assertion : le rotationnel à gauche de $\underline{\underline{T}}$ a pour vecteurs-colonnes les rotationnels des vecteurs-colonnes de $\underline{\underline{T}}$.

$$\left[\underline{\underline{\text{Rot}}}^g \underline{\underline{T}} \right] = \left(\underline{\text{Rot}} \left([T_{11} \ T_{21} \ T_{31}]^T \right) \quad \underline{\text{Rot}} \left([T_{12} \ T_{22} \ T_{32}]^T \right) \quad \underline{\text{Rot}} \left([T_{13} \ T_{23} \ T_{33}]^T \right) \right)$$

→ rotationnel à droite d'un champ de tenseurs d'ordre 2

On définit le rotationnel à droite de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\text{Rot}}}^d \underline{\underline{T}} = \varepsilon_{jpq} T_{iq,p} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

C'est donc un champ de tenseurs d'ordre 2 dont les composantes se déterminent plus facilement à partir de l'assertion : le rotationnel à droite de $\underline{\underline{T}}$ a pour vecteurs-lignes les rotationnels des vecteurs-lignes de $\underline{\underline{T}}$.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{Rot}}^d \underline{\underline{T}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\underline{\underline{Rot}} \left(\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \end{bmatrix}^T \right) \right]^T \\ \left[\underline{\underline{Rot}} \left(\begin{bmatrix} T_{21} & T_{22} & T_{23} \end{bmatrix}^T \right) \right]^T \\ \left[\underline{\underline{Rot}} \left(\begin{bmatrix} T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}^T \right) \right]^T \end{pmatrix}$$

2.2.5.2 Existence d'un potentiel scalaire : théorème de Cauchy

On appelle **potentiel scalaire** un champ scalaire $\phi(\underline{x})$ défini sur Ω tel que le champ de vecteurs $\underline{T}(\underline{x})$ puisse s'exprimer sous la forme du gradient de ce potentiel scalaire :

$$\forall \underline{x} \in \Omega, \quad \underline{T}(\underline{x}) = \underline{\underline{Grad}}(\phi(\underline{x}))$$

Sans démonstration, on affirme **qu'une condition nécessaire et suffisante pour que ce potentiel scalaire existe est que le rotationnel du champ de vecteurs soit nul**:

$$\underline{\underline{Rot}}(\underline{T}(\underline{x})) = \underline{0} \Leftrightarrow \exists \phi(\Omega \rightarrow \mathbb{R}), \quad \underline{T}(\underline{x}) = \underline{\underline{Grad}}(\phi(\underline{x}))$$

2.2.5.3 Existence d'un potentiel vecteur : théorème de Cauchy généralisé

On déduit naturellement de la section précédente la définition d'un **potentiel vecteur** $\underline{v}(\underline{x})$ défini sur Ω tel que le champ de tenseurs d'ordre 2 $\underline{\underline{T}}(\underline{x})$ puisse s'exprimer sous la forme du gradient de ce potentiel vecteur :

$$\forall \underline{x} \in \Omega, \quad \underline{\underline{T}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\underline{Grad}}}(\underline{v}(\underline{x}))$$

Toujours sans démonstration, on affirme ici que si le rotationnel à gauche du rotationnel à droite du champ de tenseurs $\underline{\underline{T}}(\underline{x})$ est nul, alors il existe un champ de vecteurs tel que la **partie symétrique** du gradient de ce champ vectoriel soit égal à $\underline{\underline{T}}(\underline{x})$:

$$\underline{\underline{\underline{Rot}}}^d(\underline{\underline{\underline{Rot}}}^g(\underline{\underline{T}})) = \underline{\underline{\underline{Rot}}}^g(\underline{\underline{\underline{Rot}}}^d(\underline{\underline{T}})) = \underline{0} \Leftrightarrow \exists \underline{v}(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3), \quad \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{D}}(\underline{v}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\underline{Grad}}}(\underline{v}) + \underline{\underline{\underline{Grad}}}(\underline{v})^T)$$

Cette définition, bien que complexe, nous permettra d'écrire simplement la *condition de compatibilité d'un champ de déformations* en section 3.2.4.

Résumé du CHAPITRE 2 : ce qu'il faut savoir

- ✓ Utilisation de la notation **indicielle** ou **tensorielle**
- ✓ **Définition** des tenseurs, et utilisation du **calcul tensoriel**
- ✓ Ecriture **matricielle** des tenseurs d'ordre 2 : différence entre matrice et tenseur
- ✓ **Opérations** sur les tenseurs d'ordre 2 : similaires aux opérations matricielles
- ✓ **Décomposition** d'un tenseur d'ordre 2 en parties symétriques et antisymétriques
- ✓ Ecriture d'un tenseur d'ordre 2 dans sa **base principale**
- ✓ **Définition** et **utilisation** des opérateurs **gradient, divergence, rotationnel**

3. Cinématique des milieux continus

En Chapitre 1, nous avons rappelé des notions de base de mécanique y compris les notions de position, vitesse et accélération. Cette description était cantonnée à un point matériel et à un solide indéformable : dans ce chapitre, nous allons redéfinir ces notions de **cinématique** en incluant la **déformation** du milieu lui-même.

Pas soucis de clarté ou de concision, nous nous limiterons rapidement à des déformations **infinitésimales** de ce milieu (car l'étude des **grandes déformations** peut vite sortir du cadre d'un cours d'introduction à la MMC). Nous pourrons nous rassurer en nous disant que, entre deux intervalles de temps suffisamment rapprochés, un milieu continu (solide ou fluide) est toujours soumis à de petites déformations.

3.1. Représentation du mouvement

3.1.1. Repérage des points matériels en mouvement

On se placera comme précédemment dans un référentiel $\mathcal{R}$, qui est l'ensemble $\mathbb{R}^3$ des points de l'espace euclidien animé du mouvement de corps rigide de l'observateur. Un **point matériel** M consiste en une infiniment petite quantité de matière, de volume $d\Omega$. Le **système matériel** S représentera une quantité de matière dans l'espace, constituée de points matériels. Le volume de ce système évolue dans le temps, mais pas sa masse (nous écrirons formellement ce point en section 3.2.6.2).

A l'instant $t = t_0$, le système matériel est dans la configuration K_0 dite **configuration de référence** et les composantes du vecteur-position $\underline{OM}_0 = \underline{X}$ sont notées X_1, X_2, X_3 (majuscules) dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. A l'instant t , le système matériel est dans la configuration K_t dite **configuration actuelle** et les composantes du vecteur-position $\underline{OM} = \underline{x}$ sont notées x_1, x_2, x_3 (minuscules) dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Le système matériel subit la transformation ϕ (fonction **vectorielle**) entre K_0 et K_t (Figure 15).

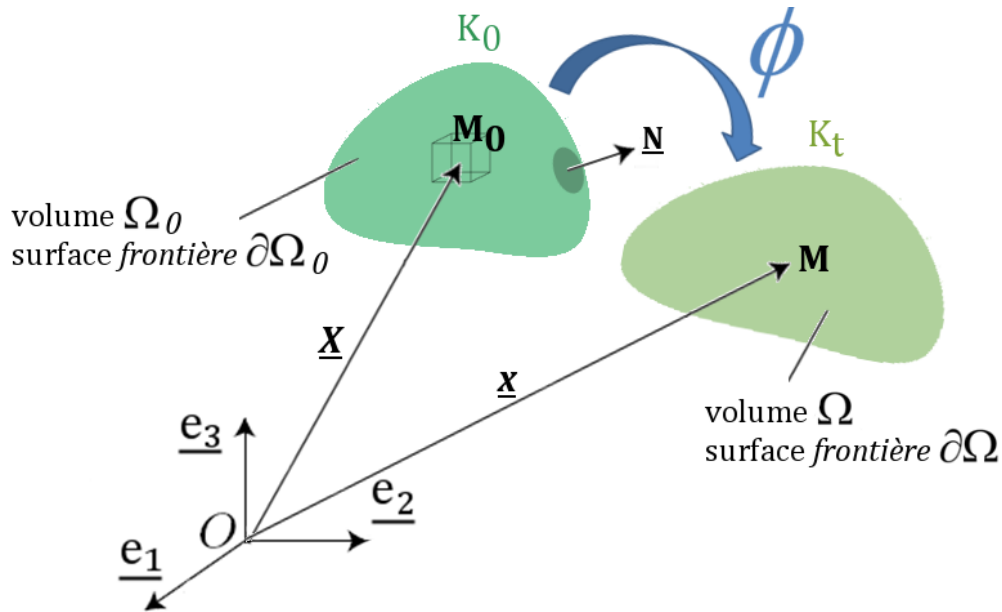


Figure 15: Repérage des points matériels entre une configuration de référence K_0 et une configuration actuelle K_t .

- Le concept de milieu continu implique que deux points matériels infiniment voisins dans K_0 le sont toujours dans K_t .
- Les points occupant un domaine connexe dans K_0 occupent un domaine de même ordre (courbe, surface, volume, ...) dans K_t .
- Les points à l'intérieur d'une surface fermée dans K_0 restent à l'intérieur de la surface transportée dans K_t .

Exemple 3-1

Nous allons traiter un exemple de transformation, qui sera repris tout au long de ce chapitre.

On considère la transformation suivante :

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \begin{cases} x_1 = \phi_1(\underline{X}, t) = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \phi_2(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = \phi_3(\underline{X}, t) = X_3 \end{cases} \text{ avec } \alpha \text{ en } m.s^{-2} \text{ et } \tau \text{ en } s$$

La fonction vectorielle $\underline{\phi}$ permet donc de passer de K_0 dans K_t .

Si on se place dans le cas où $X_1 \in [1, 2]$, $X_2 \in [1, 2]$, $\alpha = 2$, $\tau = 1$ et $t = 0.5$ on obtient la transformation ci-dessous (Figure 16).

Le point de coordonnées $\underline{X} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2$ (en rouge sur la Figure 16) est par exemple transformé en :

$$\underline{x} = 1.5\underline{e}_1 + 1.5\underline{e}_2$$

On constate qu'on respecte bien la condition : $\underline{x}(\underline{X}, t = 0) = \underline{X}$

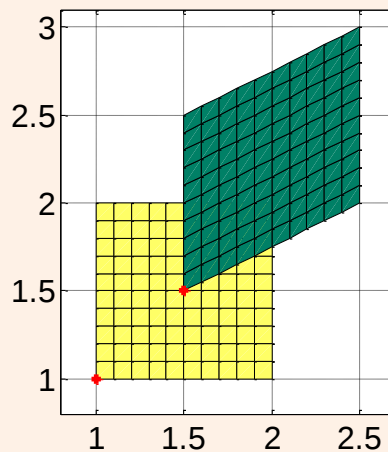


Figure 16 : Exemple de transformation plane.

3.1.2. Description lagrangienne ou eulérienne?

3.1.2.1 Description lagrangienne du mouvement du milieu continu

A chaque instant t , le vecteur position $\underline{x}$ du point matériel est donnée dans K_t en fonction de sa position $\underline{X}$ dans K_0 . On a alors pour tout point appartenant au système matériel et $\forall t$ une fonction vectorielle $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$ qui vérifie:

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \text{ avec } \underline{\phi}(\underline{X}, t = t_0) = \underline{X}$$

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(\underline{X}, t) \\ x_2 = \phi_2(\underline{X}, t) \\ x_3 = \phi_3(\underline{X}, t) \end{cases} \rightarrow \text{chaque composante peut dépendre de la position d'origine } \underline{X}$$

En notant $\underline{\psi} = \underline{\phi}^{-1}$, on a de façon équivalente: $\underline{X} = \underline{\psi}(\underline{x}, t)$. Cette écriture est possible car la fonction $\underline{\phi}$ est une *bijection* de l'ensemble des points dans K_t sur l'ensemble des points dans K_0 , étant donné qu'à chaque point matériel dans la configuration initiale correspond **un et un seul** point matériel dans la configuration transformée.

On appelle **variables de Lagrange** les grandeurs $\underline{X}$ (3 composantes, parfois appelées coordonnées matérielles) et t . On appelle **inconnues de Lagrange** les trois fonctions $\phi_i(\underline{X}, t)$ qui permettent de déterminer $\underline{x}$.

La description **lagrangienne** (ou **matérielle**) est une description "**par trajectoire**": on se propose de décrire la cinématique d'une transformation en suivant l'évolution de la position des points matériels au cours du temps. L'idée est donc de se dire qu'on connaîtra le mouvement du système matériel si on sait à chaque instant où se trouve la particule M qui se trouvait en M_0 dans la configuration de référence.

La fonction $\underline{\psi} = \underline{\phi}^{-1}$ donne la position dans la configuration de référence de la particule qui est en M dans la configuration actuelle.

Exemple 3-2

Reprenons la transformation de l'Exemple 3-1, on peut facilement calculer $\underline{\psi} = \underline{\phi}^{-1}$ à partir de la fonction vectorielle $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$:

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad \begin{cases} x_1 = \phi_1(\underline{X}, t) = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \phi_2(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = \phi_3(\underline{X}, t) = X_3 \end{cases} \Rightarrow \underline{X} = \underline{\phi}^{-1}(\underline{x}, t) \quad \begin{cases} X_1 = \phi_1^{-1}(\underline{x}, t) = x_1 - \alpha t^2 \\ X_2 = \phi_2^{-1}(\underline{x}, t) = x_2 - \frac{t}{\tau} x_1 + \frac{\alpha}{\tau} t^3 \\ X_3 = \phi_3^{-1}(\underline{x}, t) = x_3 \end{cases}$$

3.1.2.2 Description eulérienne du mouvement du milieu continu

En description **eulérienne** (ou **spatiale**), on décide de décrire le champ des **vecteurs vitesses** $\underline{v}(\underline{x}, t)$ dans la configuration **actuelle** K_t , et non dans la configuration **initiale** K_0 . On décrit donc le mouvement du corps déformable:

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{x}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \underline{v}(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t) \quad \text{avec} \quad \underline{\phi}(\underline{X}, t = t_0) = \underline{X}$$

Dans ce cas, on appelle **variables d'Euler** les grandeurs $\underline{x}$ (3 composantes, parfois appelées coordonnées spatiales) et t . On appelle **inconnues d'Euler** les trois fonctions $v_i(\underline{x}, t)$ qui permettent d'exprimer la vitesse de tous les points dans K_t .

3.1.2.3 Dérivée particulière et dérivée spatiale

Considérons une fonction scalaire, vectorielle ou tensorielle que l'on notera $\mathbf{G}(\underline{X}, t)$ en description lagrangienne et $\mathbf{g}(\underline{x}, t)$ en description eulérienne.

A retenir 3-1

Remarque de **notation** : lorsque l'on parlera du **gradient** d'une fonction écrite en description **lagrangienne**, on sous entendra le gradient par rapport aux variables de Lagrange $\underline{X}$ et on l'écrira avec une première lettre **majuscule**:

$$\text{Grad}(\mathbf{G}(\underline{X}, t)) = \frac{\partial \mathbf{G}(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}}$$

Le **gradient** d'une fonction en description **eulérienne** concernera les variables d'Euler $\underline{x}$ et on l'écrira avec une première lettre **minuscule** :

$$\text{grad}(\mathbf{g}(\underline{x}, t)) = \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}}$$

Il en sera évidemment de même pour les opérateurs **divergence** et **rotationnel**.

La dérivée de la quantité **lagrangienne** $\mathbf{G}(\underline{X}, t)$ par rapport au temps ($\underline{X}$ étant **fixe**) s'écrit simplement :

$$\dot{\mathbf{G}}(\underline{X}, t) = \frac{d\mathbf{G}(\underline{X}, t)}{dt}$$

Cette dérivée correspond à la façon dont la quantité $\mathbf{G}(\underline{X}, t)$ évolue **lorsque l'on suit la particule** : on parle alors de dérivée **particulière**, ou encore **matérielle**.

Considérons maintenant la description d'Euler $\mathbf{g}(\underline{x}, t)$, sa dérivée **spatiale** ou **eulérienne** ($\underline{x}$ étant **fixe**) s'écrit simplement : $\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t) / \partial t$

Considérons enfin que l'on veuille étudier la dérivée temporelle **particulière** de la quantité écrite en description **eulérienne** $\mathbf{g}(\underline{x}, t)$, c'est-à-dire en s'attachant à un point matériel, $\underline{X}$ étant **fixe**. On pourra alors écrire :

$$\dot{\mathbf{g}}(\underline{x}, t) = \frac{d\mathbf{g}(\underline{x}, t)}{dt} = \frac{d\mathbf{g}(\phi(\underline{X}, t), t)}{dt}$$

Or, on peut écrire la relation :

$$d\mathbf{g}(\underline{x},t) = \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x},t)}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x},t)}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} dt$$

On en vient donc à la relation primordiale :

Equation fondamentale 3-1

$$\dot{\mathbf{g}}(\underline{x},t) = \frac{d\mathbf{g}(\underline{x},t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x},t)}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x},t)}{\partial t} + \text{grad}(\mathbf{g}(\underline{x},t)) \cdot \underline{v}(\underline{x},t)$$

- le terme $\dot{\mathbf{g}}(\underline{x},t)$ est la dérivée **particulaire** de la quantité $\mathbf{g}(\underline{x},t)$ en description eulérienne
- le terme $\frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x},t)}{\partial t}$ est la dérivée eulérienne de $\mathbf{g}(\underline{x},t)$
- le terme $\text{grad}(\mathbf{g}(\underline{x},t))$ est le gradient de $\mathbf{g}(\underline{x},t)$ en description eulérienne
- le terme $\underline{v}(\underline{x},t)$ est la vitesse du point matériel situé en $\underline{x}$
- le terme $\text{grad}(\mathbf{g}(\underline{x},t)) \cdot \underline{v}(\underline{x},t)$ est souvent appelé terme **d'advection**

3.1.2.4 Au final, description lagrangienne ou eulérienne ?

Si on résume ce qui vient d'être dit, la description **lagrangienne** consiste à suivre le mouvement de points matériels entre une configuration de référence et la configuration actuelle, tandis que la description **eulérienne** consiste à analyser le champ de vitesses des points matériels à des positions précises de l'espace.

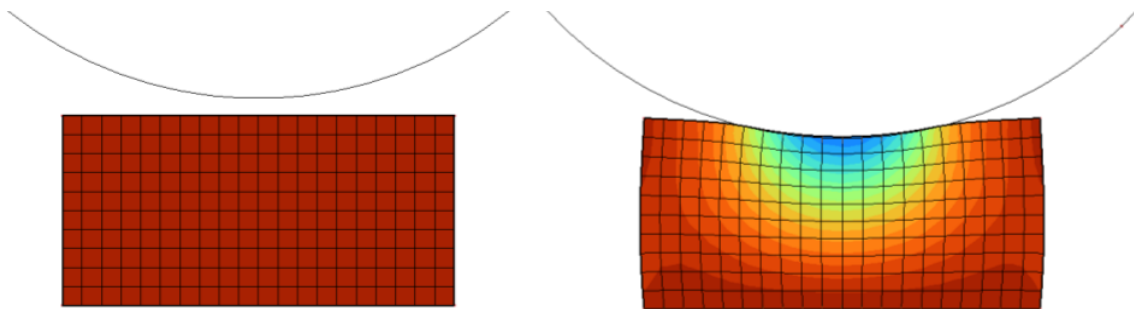


Figure 17: Exemple de description lagrangienne du mouvement d'un milieu continu solide. La forme initiale étant connue, on suit chaque point matériel dans son mouvement lors de l'écrasement du lopin par un cylindre. Le code couleur correspond au champ de déplacement vertical.

La description **lagrangienne** nécessite la connaissance d'une configuration de référence : en **mécanique du solide**, on connaît en général la forme initiale (non déformée) du système matériel (Figure 17).

S'il s'agit maintenant d'étudier l'écoulement d'une rivière, les notions d'instant initial et de configuration de référence deviennent plus problématiques... La description **eulérienne** est alors naturelle en **mécanique des fluides**, où l'on décrit le mouvement du fluide à des positions précises de l'espace (Figure 18).



Figure 18: Description eulérienne du mouvement d'un milieu continu. A gauche: champ de vitesses en surface d'une rivière. Le code couleur correspond à la norme du champ de vitesses. A droite : troupeau de moutons entrant dans un nouveau parc : on imagine facilement associer un vecteur « vitesse du mouton » à chaque animal pour décrire le mouvement du troupeau.

3.1.3. Champs de déplacement, de vitesse et d'accélération

En suivant les notations précédentes (3.1.1), on peut facilement définir le **champ de déplacement** d'un point matériel :

$$\underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X}$$

Dans cette expression, on lie la position actuelle de la particule à sa position de référence $\underline{X}$. Le déplacement $\underline{U}(\underline{X}, t)$ est donc fonction de la configuration de référence, ce qui correspond donc à une description lagrangienne (matérielle) du mouvement.

De façon alternative, on peut définir le déplacement en description eulérienne :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{x} - \underline{X}(\underline{x}, t)$$

Ces deux définitions d'un déplacement ont les **mêmes valeurs** :

$$\underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{U}(\underline{\phi}^{-1}(\underline{x}, t), t) = \underline{u}(\underline{x}, t)$$

A retenir 3-2

Par la suite on emploiera la notation **minuscule** $\underline{u}(\underline{X}, t)$, même si cette grandeur est lagrangienne : en effet, en description eulérienne, on s'intéresse rarement à décrire le champ de déplacements puisque c'est l'analyse du champ de vitesses $\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$ qui est à la base de la description.

En mécanique du **solide**, la cinématique d'un milieu sera en général décrite à partir du champ de déplacement dans la configuration initiale (description lagrangienne). En mécanique des **fluides** en revanche, on s'intéressera plutôt au **champ de vitesse** et au **champ d'accélération** dans la configuration déformée (description eulérienne) puisqu'on ne connaît pas de configuration de référence.

Si on suit un point matériel dans son mouvement (comme on l'a rappelé en section 1.2.1), on peut facilement définir les champs de vitesse et d'accélération en description **lagrangienne** comme les dérivées première et deuxième de la position du point matériel :

$$\underline{V}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}(\underline{X}, t)}{\partial t} \quad \underline{A}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{V}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \underline{x}(\underline{X}, t)}{\partial t^2}$$

La description eulérienne est basée en revanche sur la connaissance du champ de vitesse $\underline{v}(\underline{x}, t)$. Si on veut donc étudier l'accélération d'un point matériel, on doit donc s'intéresser à la dérivée **particulaire** d'une quantité écrite en description eulérienne, et d'après ce qui précède (3.1.2.3) il vient l'expression de l'accélération :

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}(\underline{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}(\underline{x}, t)) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t) \quad \text{ou} \quad a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j} v_j$$

Cette expression permet de connaître l'accélération d'un point matériel sans en connaître explicitement toute la cinématique. On notera que le terme d'advection est non-linéaire, quadratique en $\underline{v}(\underline{x}, t)$.

Exemple 3-3

Reprenons la transformation de l'Exemple 3-1 et tentons de calculer les déplacements, vitesses et accélération à partir des descriptions lagrangiennes et eulériennes.

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \begin{cases} x_1 = \phi_1(\underline{X}, t) = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \phi_2(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = \phi_3(\underline{X}, t) = X_3 \end{cases} \Rightarrow \underline{X} = \underline{\phi}^{-1}(\underline{x}, t) \begin{cases} X_1 = \phi_1^{-1}(\underline{x}, t) = x_1 - \alpha t^2 \\ X_2 = \phi_2^{-1}(\underline{x}, t) = x_2 - \frac{t}{\tau} x_1 + \frac{\alpha}{\tau} t^3 \\ X_3 = \phi_3^{-1}(\underline{x}, t) = x_3 \end{cases}$$

Commençons par calculer le champ de déplacement à partir des variables de Lagrange :

$$\underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X} \begin{cases} U_1 = x_1(\underline{X}, t) - X_1 = \alpha t^2 \\ U_2 = x_2(\underline{X}, t) - X_2 = \frac{t}{\tau} X_1 \\ U_3 = x_3(\underline{X}, t) - X_3 = 0 \end{cases}$$

et à partir des variables d'Euler :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{x} - \underline{X}(\underline{x}, t) \begin{cases} u_1 = x_1 - X_1(\underline{x}, t) = \alpha t^2 \\ u_2 = x_2 - X_2(\underline{x}, t) = \frac{t}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \\ u_3 = x_3 - X_3(\underline{x}, t) = 0 \end{cases}$$

De façon triviale, on observe que les déplacements ont les mêmes valeurs dans les deux descriptions : $\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{U}(\underline{X}, t)$, mais exprimées selon des variables différentes. Ce champ de déplacement est représenté ci-dessous sur la configuration d'origine, en utilisant donc $\underline{U}(\underline{X}, t)$.

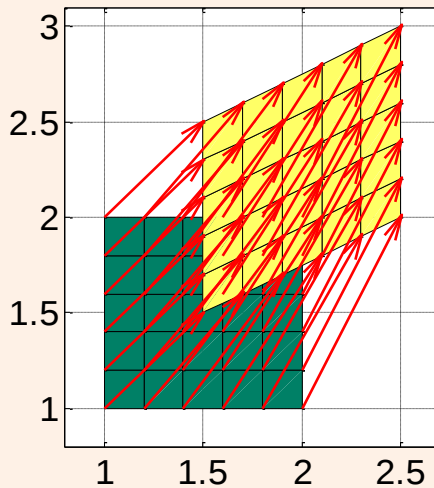


Figure 19: Exemple de champ de déplacement.

Calculons maintenant le champ de vitesse à partir de la description lagrangienne :

$$\underline{V}(\underline{X}, t) = \frac{d\underline{U}(\underline{X}, t)}{dt} = \frac{\partial \underline{U}(\underline{X}, t)}{\partial t} \quad [\underline{V}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ X_1/\tau \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour faire ce calcul à partir de la description eulérienne, il faut faire attention au fait que $\underline{x}$ dépend du temps et on a :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{u}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \underline{u}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}$$

Pour calculer le terme $\partial \underline{x} / \partial t$ on doit se servir de la forme ici connue de la trajectoire des particules, et on obtient :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{u}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \underline{u}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \quad [\underline{v}(\underline{x}, t)] = \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ \frac{x_1}{\tau} - 3\frac{\alpha}{\tau}t^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{t}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ \frac{X_1}{\tau} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ \frac{1}{\tau}(x_1 - \alpha t^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie bien alors que les vitesses sont les mêmes : $\underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{V}(\underline{X}, t)$, mais exprimées selon des variables différentes. Cette seconde forme constitue la formulation eulérienne de la transformation, qu'on utiliserait par exemple pour caractériser l'écoulement d'un fluide.

Intéressons-nous enfin au champ d'accélération en description lagrangienne :

$$\underline{A}(\underline{X}, t) = \frac{d\underline{V}(\underline{X}, t)}{dt} = \frac{\partial \underline{V}(\underline{X}, t)}{\partial t} \quad [\underline{A}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Imaginons-nous maintenant que nous ne connaissons pas les trajectoires des particules (cas où l'on regarde s'écouler un fluide par exemple), mais que l'on connaisse le champ de vitesses en description eulérienne $\underline{v}(\underline{x}, t)$. On peut alors calculer le champ d'accélération à partir de l'expression de la dérivée particulaire :

$$\underline{a}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t) \quad [\underline{a}(\underline{x}, t)] = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -2\frac{\alpha}{\tau}t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ \frac{1}{\tau}(x_1 - \alpha t^2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien alors la même expression, sans que le calcul ne nécessite la connaissance des trajectoires des particules. On remarque que le champ d'accélération est ici uniforme (il ne dépend pas des coordonnées spatiales).

3.1.4. Quelques caractéristiques de la transformation

3.1.4.1 Trajectoires

La **trajectoire** d'un point matériel est le lieu des positions occupées par un point matériel dans $\mathcal{R}$ au cours du temps, c'est-à-dire une équation paramétrée de M initialement en M_0 . En description lagrangienne l'équation des trajectoires est évidente:

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$$

Une trajectoire est une courbe paramétrée de type $x_i = x_i(t)$, et cette courbe est donc indépendante du temps. On peut dire qu'il y a « autant de trajectoires qu'il y a de particules ».

On peut imaginer visualiser les trajectoires par exemple en plaçant dans un milieu fluide des particules solides, idéalement entraînées comme le serait la particule fluide dont elle occupe la place. Une photographie avec un temps de pose suffisamment long permettrait alors de visualiser une partie de la trajectoire de ces particules.

En description eulérienne, on connaît le champ de vitesses en tout point de l'espace : les trajectoires peuvent alors être déterminées en résolvant:

$$\underline{dx} = \underline{v}(\underline{x}, t) dt \text{ avec la condition initiale } \underline{x}(t=0) = \underline{X}$$

Exemple 3-4

Reprenons la transformation de l'Exemple 3-1:

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \begin{cases} x_1 = \phi_1(\underline{X}, t) = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \phi_2(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = \phi_3(\underline{X}, t) = X_3 \end{cases}$$

Cette forme constitue l'équation des **trajectoires**. Prenons maintenant la description eulérienne de cette transformation : $\underline{v}(\underline{x}, t) = 2\alpha t \underline{e}_1 + \frac{1}{\tau}(x_1 - \alpha t^2) \underline{e}_2$.

On peut déterminer les trajectoires des points matériels en posant :

$$\underline{dx} = \underline{v}(\underline{x}, t) dt \Rightarrow \begin{cases} dx_1 = v_1(\underline{x}, t) dt = 2\alpha t dt \\ dx_2 = v_2(\underline{x}, t) dt = \frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) dt \\ dx_3 = v_3(\underline{x}, t) dt = 0 \end{cases}$$

Pour pouvoir intégrer les composantes de $\underline{dx}$, on doit tenir compte du fait que $\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t)$.

On trouve facilement pour la première composante $x_1 = \alpha t^2 + C_1$ et ainsi on a :

$$dx_2 = v_2(\underline{x}, t) dt = \frac{1}{\tau} (\alpha t^2 + C_1 - \alpha t^2) dt \Rightarrow x_2 = C_1 \frac{t}{\tau} + C_2$$

On doit nécessairement ajouter la condition initiale $\underline{x}(t=0) = \underline{X}$ pour déterminer les 3 constantes :

$$\begin{cases} x_1(t=0) = C_1 = X_1 \\ x_2(t=0) = C_2 = X_2 \\ x_3(t=0) = C_3 = X_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha t^2 + X_1 \\ x_2 = X_1 \frac{t}{\tau} + X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

On constate que l'équation des trajectoires est bien la même dans les deux cas.

Les trajectoires des quatre points de coordonnées $(1,1,0)$, $(1,2,0)$, $(2,1,0)$, $(2,2,0)$ ont été représentées Figure 20.

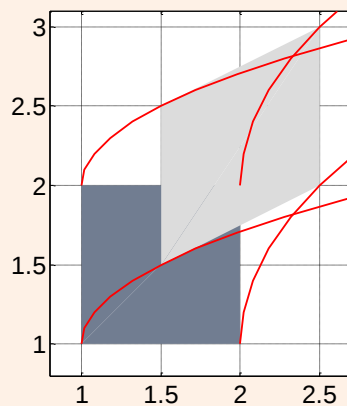


Figure 20: Exemple de trajectoires des quatre coins du milieu de base.

3.1.4.2 Ligne de courant

La **ligne de courant** est l'enveloppe des champs des vecteurs vitesses à un instant donné t , elle considère donc un ensemble de points matériels à un instant donné, qui possèdent tous un vecteur vitesse "local".

Les lignes de courant étant tangentes aux vecteurs vitesses $\underline{v}(\underline{x}, t)$ en tout point, un petit élément $d\underline{x}$ est sur la ligne de courant si $d\underline{x} \wedge \underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{0}$ ce qui revient à:

$$\frac{dx_1}{v_1(\underline{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\underline{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\underline{x}, t)}$$

Le temps n'est pas une variable d'intégration dans cette équation, étant donné que l'on se place à un instant donné.

Exemple 3-5

Reprenons la transformation de l'Exemple 3-1, pour lequel la description eulérienne est :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = 2\alpha t \underline{e}_1 + \frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \underline{e}_2$$

Les lignes de courant se déterminent facilement à partir de l'équation ci-dessus :

$$\frac{dx_1}{v_1(\underline{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\underline{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\underline{x}, t)} \Rightarrow \frac{dx_1}{2\alpha t} = \frac{dx_2}{\frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2)} \Rightarrow dx_1 \frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) = 2\alpha t dx_2$$

Ce système se résout de la façon suivante :

$$\frac{1}{\tau} dx_1 x_1 - \frac{\alpha}{\tau} t^2 dx_1 = 2\alpha t dx_2 \Rightarrow \frac{x_1^2}{2\tau} - \frac{\alpha}{\tau} t^2 x_1 = 2\alpha t x_2 + cste \Rightarrow x_2 = \frac{x_1}{2\alpha t \tau} \left(\frac{x_1}{2} - \alpha t^2 \right) + cste$$

Des lignes de courants ont été représentées pour différentes valeurs de la constante Figure 21. On constate immédiatement en comparant les Figure 20 et Figure 21 que les trajectoires et lignes de courant forment deux familles de courbes différentes.

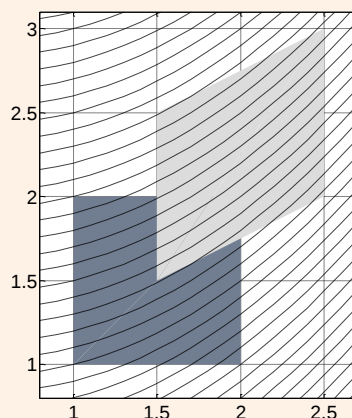


Figure 21: Exemple de lignes de courant.

3.1.4.3 Mouvement stationnaire

Un mouvement est dit **stationnaire** dans $\mathcal{R}$ si sa description eulérienne n'est pas fonction du temps (le champ des vecteurs vitesses est variable dans l'espace mais pas dans le temps), soit:

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{v}(\underline{x})$$

Dans le cas d'un mouvement stationnaire:

→ la résolution du système $\underline{dx} = \underline{v}(\underline{x}, t)dt$ avec $\underline{x}(t=0) = \underline{X}$ et du système donnent des solutions identiques, c'est-à-dire que les trajectoires et les lignes de courant sont identiques

On appelle mouvements semi-permanents des mouvements tels que:

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \lambda(t)\underline{v}(\underline{x})$$

3.1.5. *Gradient de la transformation*

Le **tenseur gradient de la transformation**, noté $\underline{\underline{F}}$, permet de traduire la transformation d'un corps entre K_0 et K_t . Considérons un point M , et un point P infiniment proche de M . On peut définir le vecteur élémentaire dans K_0 :

$$\underline{dX} = \underline{X}^P - \underline{X}^M$$

Après transformation, on peut définir la position de ces deux points dans K_t :

$$\underline{x}^M = \underline{\phi}(\underline{X}^M, t) \quad \underline{x}^P = \underline{\phi}(\underline{X}^P, t)$$

Et le vecteur élémentaire devient alors:

$$\underline{dx} = \underline{x}^P - \underline{x}^M = \underline{\phi}(\underline{X}^M + \underline{dX}, t) - \underline{\phi}(\underline{X}^M, t)$$

Un développement de Taylor au premier ordre donne:

$$\underline{dx} = \underline{\phi}(\underline{X}^M + \underline{dX}, t) - \underline{\phi}(\underline{X}^M, t) = \frac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}^M, t)}{\partial \underline{X}^M} \cdot \underline{dX}$$

On peut en déduire la définition du **tenseur gradient de la transformation**, pour un point quelconque :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}}$$

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{Grad}} \underline{\phi}(\underline{X}, t)$$

Le tenseur gradient de la transformation est crucial en MMC, dans la mesure où il contient toutes les informations concernant la cinématique d'un milieu continu.

On obtient alors la **formule de transport d'un vecteur matériel quelconque**:

Equation fondamentale 3-2

$$d\underline{l} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot d\underline{L}$$

Le tenseur $\underline{\underline{F}}$ transforme un vecteur dans la configuration de référence K_0 en un vecteur dans la configuration actuelle K_t : on appelle ce type de tenseur un **tenseur mixte** ou *tenseur deux-points*. $\underline{\underline{F}}$ est dans le cas général **non-symétrique**. On notera que $\underline{\underline{F}}$ est également parfois appelé **application linéaire tangente**: c'est en effet un opérateur linéaire qui décrit localement la transformation par sa tangente.

Comme la transformation est une bijection de K_0 dans K_t , il existe une application linéaire **inverse** $\underline{\underline{F}}^{-1}$ telle que :

$$\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{\phi}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{x}} = \underline{\underline{grad}}(\underline{X}(\underline{x}, t))$$

On peut donc transporter un vecteur matériel de K_t dans K_0 en utilisant l'inverse du gradient de la transformation :

$$d\underline{L} = \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{x}, t) \cdot d\underline{l}$$

La transformation est dite **homogène** si le gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$ ne dépend pas de $\underline{X}$ (elle est la même dans tout le milieu).

La matrice représentative de $\underline{\underline{F}}$ contient les neuf dérivées partielles $\partial x_i / \partial X_j$: elle est en général appelée matrice **jacobienn**e. Le déterminant de cette matrice s'appelle le **jacobien**, et on le note J .

On a vu précédemment que $\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X}$ et donc $\underline{x}(\underline{X}, t) = \underline{u}(\underline{X}, t) + \underline{X}$. On peut en déduire :

Equation fondamentale 3-3

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Grad}} \underline{u}$$

soit en notation matricielle:

$$[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

On peut facilement déduire de cette forme que, dans le cas où le milieu subit une translation de corps rigide, on a $\underline{\underline{Grad}} \underline{u} = \underline{0}$ et donc $\underline{\underline{F}} = \underline{I}$.

Le tenseur gradient de la transformation transporte un vecteur matériel de K_0 dans K_t selon la loi : $d\underline{l} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot d\underline{L}$. Dans le cas où l'on applique cette transformation à un vecteur $\underline{A}$, on appelle **dilatation** le rapport des normes des vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{A}$:

$$\lambda = |\underline{a}| / |\underline{A}| = |\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{A}| / |\underline{A}|$$

Exemple 3-6

Reprenons la transformation de l'Exemple 3-1 :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Le tenseur gradient de la transformation s'écrit dans ce cas :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial x_i(\underline{X}, t)}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

$$[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t/\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que dans ce cas le gradient de la transformation est indépendant de $\underline{X}$: la transformation est donc homogène.

On peut également calculer $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$ à partir de la forme $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{I} + \underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t)$:

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \alpha t^2 \underline{e}_1 + \frac{t}{\tau} X_1 \underline{e}_2 \Rightarrow \underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$$

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{I} + \underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$$

On obtient la même forme que ci-dessus.

Prenons maintenant le vecteur unitaire : $\underline{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$

Pour $t/\tau = 0.5$, ce vecteur est transporté lors de la transformation :

$$\begin{aligned}\underline{a} &= \underline{F} \cdot \underline{A} = \left(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \underline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{e}_1 + \frac{1.5}{\sqrt{2}} \underline{e}_2\end{aligned}$$

Ce vecteur est représenté en vert Figure 22, appliqué au point de coordonnées initiales (1,1).

On peut aisément calculer la dilatation de ce vecteur unitaire :

$$\lambda = \frac{\|\underline{a}\|}{\|\underline{A}\|} = \frac{\|\underline{F} \cdot \underline{A}\|}{\|\underline{A}\|} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1.5}{\sqrt{2}}\right)^2} / 1 \approx 1.275$$

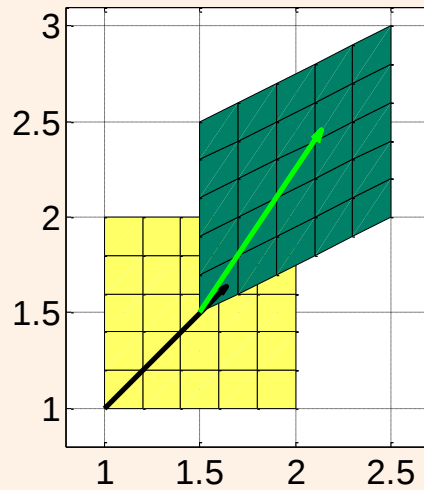


Figure 22: Transport d'un vecteur unitaire.

3.1.6. Décomposition polaire

L'algèbre nous montre (pas de démonstration ici) que tout tenseur inversible, et $\underline{F}$ en particulier, peut se décomposer de manière **unique** en un produit d'un tenseur **orthogonal** $\underline{R}$ par un tenseur **symétrique** défini positif $\underline{U}$ tel que:

$$\underline{F} = \underline{R} \cdot \underline{U} \text{ avec } \underline{R} \text{ orthogonal: } \underline{R}^T \cdot \underline{R} = \underline{I} \text{ et } \det \underline{R} = 1$$

De même, $\underline{F}$ se décompose de manière **unique** en un produit de $\underline{R}$ par un tenseur **symétrique** défini positif $\underline{V}$ tel que:

$$\underline{F} = \underline{V} \cdot \underline{R} \text{ avec } \underline{R} \text{ orthogonal: } \underline{R}^T \cdot \underline{R} = \underline{I} \text{ et } \det \underline{R} = 1$$

Remarque: un tenseur défini positif respecte: $\forall \underline{b} \neq 0, \underline{b} \cdot \underline{A} \cdot \underline{b} > 0$

Le tenseur $\underline{\underline{R}}$ est un tenseur mixte (qui permet de passer de la configuration de référence à la configuration actuelle), tandis que $\underline{\underline{U}}$ est entièrement exprimé dans la configuration de référence (il est dit *lagrangien*) et que $\underline{\underline{V}}$ est entièrement exprimé dans la configuration actuelle (il est dit *eulérien*).

Attention: les tenseurs d'ordre 2 $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{V}}$ introduits ici n'ont rien à voir avec les vecteurs déplacement et vitesse $\underline{U}$ et $\underline{V}$!!!

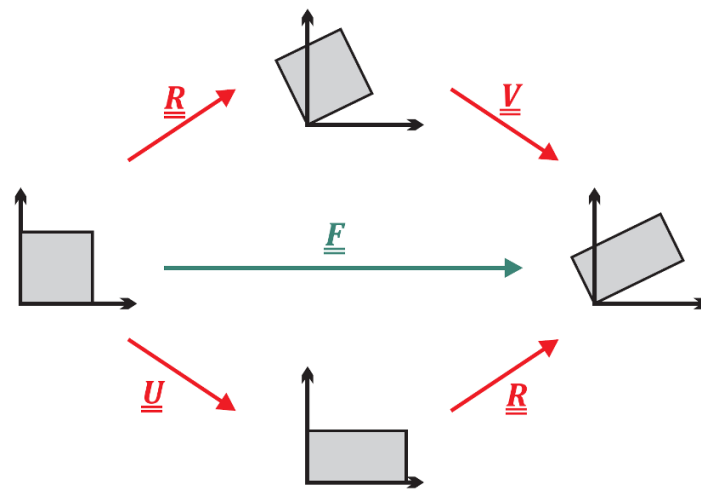


Figure 23: Décomposition du mouvement du milieu (caractérisé par le gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$) en une déformation pure $\underline{\underline{U}}$ ou $\underline{\underline{V}}$ et une rotation pure $\underline{\underline{R}}$.

→ Interprétation: la transformation définie par $\underline{\underline{F}}$ est la combinaison d'une **déformation pure** $\underline{\underline{U}}$ suivie d'une **rotation pure** $\underline{\underline{R}}$, ou la combinaison de la même rotation pure $\underline{\underline{R}}$ suivie d'une déformation pure $\underline{\underline{V}}$ (Figure 23).

3.1.7. Transport d'un volume

Nous avons vu qu'à tout $\underline{X}$ dans la configuration de référence K_0 correspondait un $\underline{x}$ dans la configuration actuelle K_t . Le déterminant de $\underline{\underline{F}}$, appelé jacobien J , doit donc être non-nul pour permettre d'écrire $\underline{\underline{F}}^{-1}$.

$$J = \det \underline{\underline{F}} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} \neq 0$$

Le volume élémentaire $d\Omega$ d'un parallélépipède défini par ses côtés $\underline{dx}, \underline{dy}, \underline{dz}$ est donné par:

$$d\Omega = \det(\underline{dx}, \underline{dy}, \underline{dz}) = \varepsilon_{ijk} dx_i dy_j dz_k$$

ce qui se transforme rapidement (sans détailler toutes les étapes) :

$$\begin{aligned} d\Omega &= \det(\underline{dx}, \underline{dy}, \underline{dz}) \\ &= \det(\underline{F} \cdot \underline{dX}, \underline{F} \cdot \underline{dY}, \underline{F} \cdot \underline{dZ}) \\ &= \det \underline{F} \det(\underline{dX}, \underline{dY}, \underline{dZ}) = \det \underline{F} d\Omega_0 \end{aligned}$$

On en déduit:

Equation fondamentale 3-4

$$\frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \det \underline{F} = J$$

Le déterminant du tenseur gradient de la transformation est une mesure de la variation locale de volume.

J représente la dilatation volumique, et on a:

$$0 < \det \underline{F} = J < +\infty$$

Exemple 3-7

Reprenons le tenseur gradient de la transformation obtenu dans l'Exemple 3-6:

$$\left[\underline{F}(\underline{X}, t) \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t/\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \underline{F}(\underline{X}, t) = 1$$

On constate que la transformation associée se fait donc à volume constant.

3.1.1. Taux de dilatation volumique

On a vu précédemment que $\Omega_t = J(t) \Omega_0$ avec $J(t) = \det \underline{F}(t)$. On cherche à exprimer la dilatation volumique: $\dot{\Omega}_t = \dot{J}(t) \Omega_0$, et donc la dérivée du jacobien. Si on tente d'écrire le volume particulier du parallélépipède formé sur le trièdre $(\underline{dx}, \underline{dy}, \underline{dz}) = (dx \underline{e}_1, dy \underline{e}_2, dz \underline{e}_3)$, on obtient:

$$\dot{\Omega}_t = \frac{d\Omega_t}{dt} = \frac{d \det(\underline{dx}, \underline{dy}, \underline{dz})}{dt} = \varepsilon_{ijk} \dot{dx}_i dy_j dz_k + \varepsilon_{ijk} dx_i \dot{dy}_j dz_k + \varepsilon_{ijk} dx_i dy_j \dot{dz}_k$$

Après un long développement (non présenté ici) on obtient la forme suivante :

$$\dot{\Omega}_t = \varepsilon_{ijk} dx_i dy_j dz_k \operatorname{div} \underline{v} = \Omega_t \operatorname{div} \underline{v} = \operatorname{div} \underline{v} J \Omega_0$$

On peut donc démontrer que:

$$\dot{J} = \operatorname{div} \underline{v}(\underline{x}, t) J$$

Dans le cas d'une transformation isochore (sans changement de volume), on a donc:

$$\operatorname{div} \underline{v}(\underline{x}, t) = 0$$

Ce résultat, très utilisé en mécanique des fluides incompressibles, sera retrouvé par un moyen alternatif lors de l'écriture de la conservation de la masse (section 3.2.6)

3.2. Déformation du milieu continu

3.2.1. Recherche d'un tenseur des déformations

On a vu précédemment que le tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$ est la combinaison d'une **déformation pure** ($\underline{\underline{U}}$ en formulation lagrangienne ou $\underline{\underline{V}}$ en formulation eulérienne) suivie d'une **rotation pure** $\underline{\underline{R}}$.

Pour construire un **tenseur des déformations**, on peut donc chercher à « supprimer » la rotation pure $\underline{\underline{R}}$ de façon à ne garder que la déformation pure. Intuitivement, on peut s'attendre à ce que **le produit scalaire entre deux vecteurs** (Figure 24) ne soit pas modifié dans le cas d'un **mouvement de corps rigide**, ce qui peut fournir une base de travail pour la recherche d'une **quantification de la déformation**.

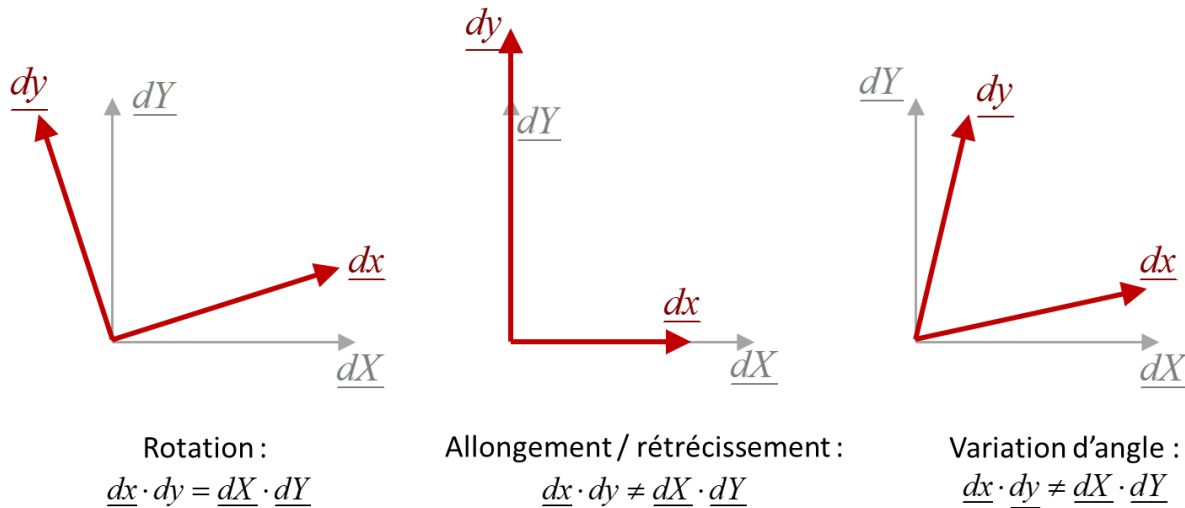


Figure 24 : Illustration des variations du produit scalaire. Lors d'une rotation, le produit scalaire est conservé. Lorsqu'un des vecteurs change de longueur, le produit scalaire varie. Lorsque l'angle entre les vecteurs change, le produit scalaire varie également.

3.2.1.2 Formulation lagrangienne : tenseur de Green-Lagrange

Considérons un vecteur matériel élémentaire $\underline{dX}$ qui devient $\underline{dx} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dX}$ après transformation, et de la même façon $\underline{dY}$ qui devient $\underline{dy} = \underline{dY}$.

Dans un premier cas on cherche à comparer la valeur du produit scalaire entre deux vecteurs $\underline{dx}$ et $\underline{dy}$ dans la configuration actuelle par rapport à leur produit scalaire dans la configuration de référence :

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dX} \cdot \underline{dY} = \underline{dX} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dY} - \underline{dX} \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \underline{dY} = \underline{dX} \cdot (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{dY} = \underline{dX} \cdot 2\underline{\underline{E}} \cdot \underline{dY}$$

On vient d'introduire ici le tenseur de Green-Lagrange:

Equation fondamentale 3-5

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) : \text{tenseur des déformations de Green-Lagrange}$$

On observe facilement que cette déformation peut s'exprimer en fonction de la déformation pure $\underline{\underline{U}}$ (lagrangienne), et c'est donc un tenseur **purement lagrangien** :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{U}}^T \cdot \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{U}}^T \cdot \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{I}}) \text{ car } \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}}$$

On a vu précédemment qu'on pouvait noter: $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t)$ avec $\underline{u}$ le champ de déplacement. D'après la définition qui précède, on peut donc directement exprimer le **tenseur de Green-Lagrange** en fonction du déplacement :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2}((\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}})^T \cdot (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}}) - \underline{\underline{I}})$$

Ce qui permet d'écrire la forme importante :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}})^T + (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}})^T \cdot \underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}})$$

3.2.1.1 Formulation eulérienne : tenseur d'Euler-Almansi

On cherche maintenant à effectuer l'opération opposée : on veut comparer la valeur du produit scalaire entre deux vecteurs $\underline{dX}$ et $\underline{dY}$ dans la configuration de référence par rapport à leur produit scalaire dans la configuration actuelle :

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dX} \cdot \underline{dY} = \underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{dx} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{dy} = \underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dx} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{dy} = \underline{dx} \cdot (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^{-T} \underline{\underline{F}}^{-1}) \cdot \underline{dy} = \underline{dx} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{dy}$$

On vient d'introduire ici le tenseur d'Euler-Almansi (eulérien) :

Equation fondamentale 3-6

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}) : \text{tenseur des déformations d'Euler-Almansi}$$

On observe facilement que cette déformation peut s'exprimer en fonction de la déformation pure $\underline{\underline{V}}$ (eulérienne), et c'est donc un tenseur **purement eulérien** :

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{V}}^{-T} \cdot \underline{\underline{R}}^{-T} \cdot \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \underline{\underline{V}}^{-1}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{V}}^{-T} \cdot \underline{\underline{V}}^{-1}) \quad \text{car } \underline{\underline{R}}^{-T} \cdot \underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{I}}$$

Exemple 3-8

Reprenons le tenseur gradient de la transformation obtenu dans l'Exemple 3-6:

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$$

Calculons le tenseur de Green-Lagrange pour cette transformation :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left[\left(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 \right) \cdot \left(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 \right) - \underline{\underline{I}} \right]$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left[\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{\underline{I}} \right]$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{t}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2) \right)$$

On constate directement que ce tenseur tend vers le tenseur nul lorsque $t \rightarrow 0$.

On peut également calculer le tenseur d'Euler-Almansi correspondant :

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{I}} - \left(1 + \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right) \underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_2 + \underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_2 + \underline{\underline{e}}_3 \otimes \underline{\underline{e}}_3 + \frac{t}{\tau} (\underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_1 + \underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_2) \right]$$

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_2 + \frac{t}{\tau} (\underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_1 + \underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_2) \right)$$

On voit que ce tenseur est différent du précédent, mais tend également vers le tenseur nul.

NB : Il existe d'autres tenseurs lagrangiens ou eulériens visant à décrire la déformation du milieu continu. Ils ont pour point commun d'être égaux au tenseur nul lors d'une transformation de corps rigide. Sous l'hypothèse des petites déformations (dans laquelle nous nous placerons en section suivante), toutes ces déformations sont néanmoins équivalentes.

A retenir 3-3

Les composantes des tenseurs des déformations sont sans dimension.

3.2.2. Cas des transformations infinitésimales

3.2.2.1 Tenseur des déformations en HPP

Dans les sections précédentes, nous nous sommes intéressés à une déformation **quelconque** entre deux configurations K_0 et K_t . Aucune hypothèse n'a été faite quant aux **amplitudes** de la déformation et des déplacements, qui peuvent être très grandes (mise en forme d'un tôle) ou infinitésimales (déformation du sol sous le poids du corps).

L'expression du tenseur de déformation de Green-Lagrange exposé précédemment est dépendante du champ de déplacement de manière **non-linéaire**, en raison du terme en $(\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}})^T \cdot \underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}}$. Si la déformation peut être considérée **infinitésimale** ($\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}} \ll 1$), on constate que ce terme non-linéaire devient **négligeable**. De plus, si les

déplacements sont petits, on peut **confondre** les configurations K_0 et K_t , et confondre ainsi les descriptions lagrangiennes et eulériennes : on dit alors qu'on est sous l'hypothèse des **petits déplacements**.

Si ces deux conditions sont réunies (**petites déformations** et **petits déplacements**), on dit qu'on se place alors sous l'**hypothèse des petites perturbations** (HPP).

A retenir 3-4

Hypothèse des petites perturbations (HPP) =

hypothèse des petites **déformations** + hypothèse des petits **déplacements**

Dans ce cas, on peut alors exprimer la déformation sous la forme du tenseur des déformations linéarisé, noté $\underline{\underline{\varepsilon}}$, et qui s'écrit:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \lim_{\underline{\underline{Grad}} \underline{u} \rightarrow 0} \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T + \cancel{(\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \cdot \underline{\underline{Grad}} \underline{u}} \right)$$

Equation fondamentale 3-7

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T) : \text{tenseur des déformations linéarisé en HPP}$$

C'est l'expression que l'on retiendra dans toute la suite pour la **déformation**.

Exemple 3-9

Reprenons le cas de la transformation traitée en section 3.1.5. Le terme $\underline{\underline{Grad}} \underline{u}$ a été calculé précédemment : $\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$.

Calculons maintenant le tenseur des déformations linéarisé :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t) + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t))^T \right) = \frac{1}{2} \frac{t}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2)$$

Comparons maintenant ce tenseur avec les tenseurs des déformations de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi calculés ci-dessus (section 3.2.1) pour la même transformation :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{t}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2) \right)$$

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{t}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2) \right)$$

On constate évidemment que tous ces tenseurs sont équivalents quand $t^2 \ll t$, c'est-à-dire pour une transformation infinitésimale.

3.2.2.2 Interprétation des composantes du tenseur des déformations linéarisé

On a vu précédemment qu'on pouvait écrire :

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dX} \cdot \underline{dY} = \underline{dX} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dY} - \underline{dX} \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \underline{dY} = 2\underline{dX} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{dY}$$

En HPP, on peut donc noter : $\underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dX} \cdot \underline{dY} \approx 2\underline{dX} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{dY}$

Lorsque $\underline{dX} = \underline{dY} = dX \underline{e}_1$ par exemple, on peut donc noter :

$$\underline{dx} \cdot \underline{dx} = dx^2 \approx 2\underline{dX} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{dX} + \underline{dX} \cdot \underline{dX}$$

$$\Rightarrow dx^2 \approx 2\varepsilon_{11} dX^2 + dX^2 = dX^2 (1 + 2\varepsilon_{11})$$

En prenant un développement limité au premier ordre de cette expression :

$$\lambda = \frac{dx}{dX} \approx \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} \approx 1 + \varepsilon_{11}$$

A retenir 3-5

On peut donc en déduire que ε_{11} correspond à **un allongement** (si $\varepsilon_{11} > 0$) ou à **un rétrécissement** (si $\varepsilon_{11} < 0$) relatif selon la direction $\underline{e}_1$.

A retenir 3-6

On en déduit également la différence entre **dilatation** et **déformation** dans une direction donnée :

$$\lambda = 1 + \varepsilon$$

Prenons maintenant les deux vecteurs $\underline{dX} = dX \underline{e}_1$ et $\underline{dY} = dX \underline{e}_2$. L'expression devient alors :

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} \approx 2\underline{dX} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{dY} + \cancel{\underline{dX} \cdot \underline{dY}}$$

Si on note enfin $(\underline{dx}, \underline{dy}) = \pi/2 - \theta$ on arrive à l'expression :

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} = dx dy \sin \theta \approx dx dy \theta \approx 2dX^2 \varepsilon_{12}$$

qui, si on s'arrête au premier ordre, se résume à $\theta \approx 2\varepsilon_{12}$.

A retenir 3-7

On peut en déduire que ε_{12} correspond à **la moitié de la variation d'angle** entre $\underline{dx}$ et $\underline{dy}$ lors de la transformation.

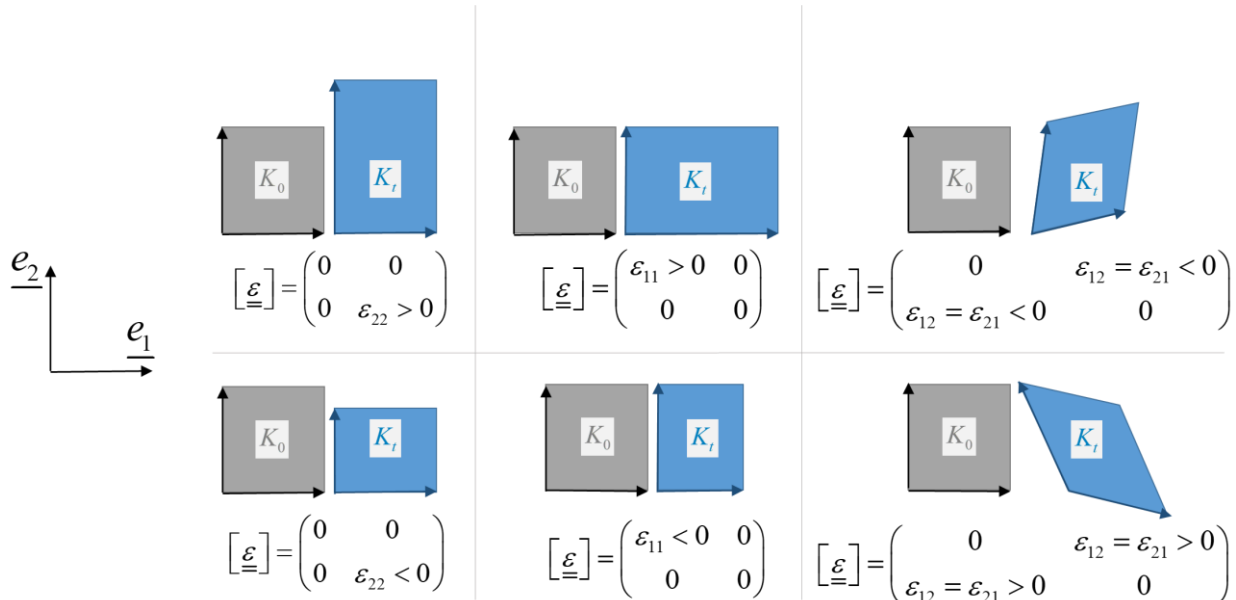


Figure 25 : Interprétation physique des différentes composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans le cas d'une transformation dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

Exemple 3-10

Reprenons toujours la même transformation, pour laquelle on a calculé :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau} \right) (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2)$$

On peut en déduire que durant cette transformation, la variation d'angle entre $\underline{dX} = dX \underline{e}_1$ et $\underline{dY} = dX \underline{e}_2$ est égale à $2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} = \frac{t}{\tau}$.

3.2.2.3 Concrètement : Quelle déformation utiliser ?

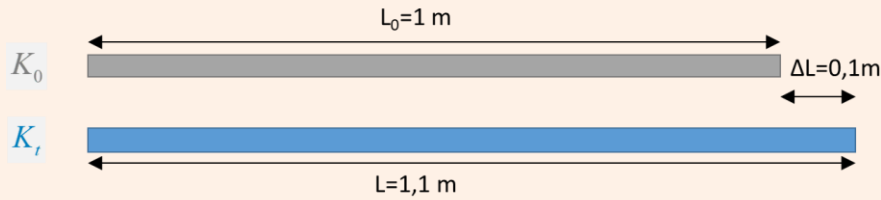
On vient donc d'illustrer le fait que la matrice représentative du tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ contient **des variations d'angle** et des **variations de longueur**. Elles sont **sans dimension** est généralement exprimé en **pourcents**.

Exemple 3-11

Reprenons la définition ci-dessus :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}})^T \right)$$

On se place dans le cas d'une barre (en une dimension) qui mesure $L_0 = 1$ mètre et qui s'allonge de $\Delta L = 10$ cm sous l'effet d'une force de traction. La barre est fixée du côté gauche (son déplacement est nul), et sa longueur après l'allongement est naturellement : $L = L_0 + \Delta L$



La transformation serait formulée ainsi :

$$u(X) = \Delta L \left(\frac{X}{L} \right)$$

On peut donc aisément calculer la déformation selon la définition de Green-Lagrange (section 3.2.1.2) :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \left(\text{Grad } u + (\text{Grad } u)^T + (\text{Grad } u)^T \cdot \text{Grad } u \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta L}{L} + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 \right) = \frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 \end{aligned}$$

D'après les valeurs numériques ci-dessus, on a donc dans ce cas : $E = \frac{0.1}{1} + \frac{1}{2} \left(\frac{0.1}{1} \right)^2 = 0,105 = 10,5\%$

Si on prend maintenant la définition de la déformation en HPP (section 3.2.2.1) :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} \left(\text{Grad } u + (\text{Grad } u)^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta L}{L} \right) = \frac{\Delta L}{L} \end{aligned}$$

D'après les valeurs numériques ci-dessus, on a donc dans ce cas : $\varepsilon = \frac{0.1}{1} = 0,10 = 10\%$

On constate que ces déformations sont légèrement différentes.

A retenir 3-8

Les déformations sont souvent exprimées en **pourcents**, et sont toujours **sans dimensions**.

Dans la pratique (et **arbitrairement**), on considère en général que l'on se trouve sous l'**hypothèse des petites perturbations** lorsque la déformation est de l'ordre de quelques dixièmes de pourcents.

L'hypothèse des petites perturbations est généralement respectée lorsque l'on étudie par exemple les déformations d'une structure **en usage** ou encore la **vibration** de structures.

3.2.3. *Mouvement de corps rigide*

Considérons le cas d'un solide **indéformable** en déplacement (comme en section 1.3). D'après la décomposition du tenseur gradient de la transformation en une déformation pure et une rotation pure, on a dans ce cas :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \text{ avec } \underline{\underline{R}} \text{ un tenseur mixte orthogonal contenant la rotation.}$$

Les tenseurs précédents s'écrivent simplement :

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{0}} \quad \text{car } \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}}$$

Le tenseur de déformation est donc nul lors d'un mouvement rigide. Pour autant, on ne satisfait pas ici l'HPP, car la **transformation peut être importante** ($\underline{\underline{F}}$ peut être très différent de l'identité). En HPP, on obtient également dans ce cas :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \approx \underline{\underline{E}} \approx \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{0}}$$

Revenons maintenant à ce qui a été dit concernant l'analyse du gradient d'un champ de vecteurs (section 2.2.2.7). Le tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ correspond à la partie symétrique du gradient du champ de déplacements, ce qui a été intuitivement expliqué par une « déformation locale » du milieu. Dans le cas du mouvement d'un solide indéformable, le gradient du champ de déplacement se réduit donc à sa partie antisymétrique :

$$\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{\Lambda}} + \underline{\underline{\mathcal{A}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}} - (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}})^T)$$

Par intégration on peut écrire :

$$\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}} = \frac{d\underline{\underline{u}}}{d\underline{\underline{X}}} = \underline{\underline{\Lambda}} \Rightarrow \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}_0 + \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{\underline{X}}$$

Le tenseur antisymétrique $\underline{\underline{\Lambda}}$ possède uniquement trois composantes indépendants, qu'on peut arranger sous forme d'un vecteur (dit *vecteur adjoint*) $\underline{\underline{\Omega}}$: on retrouve alors une expression de distributivité du déplacement :

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + \underline{\underline{\Omega}} \wedge \underline{X}$$

Exemple 3-12

Considérons le cas d'une de la rotation d'un cylindre **rigide** autour de son axe $\underline{e}_z$, défini par un vecteur rotation $\underline{\underline{\Omega}} = \Omega \underline{e}_z$ (sans unité, ça n'est pas une vitesse de rotation !). L'écriture du champ de déplacement peut alors se formuler $\underline{u} = \Omega R \underline{e}_\theta$.

Dans ce cas le gradient du déplacement s'écrit :

$$\underline{\underline{Grad}} \underline{u} = \frac{-u_\theta}{R} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial R} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r = -\Omega \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \Omega \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r$$

On observe que ce tenseur est antisymétrique et on note : $\underline{\underline{Grad}} \underline{u} = \underline{\underline{\Lambda}}$

On peut vérifier que la déformation due à cette transformation de corps rigide est nulle :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \right) = \frac{1}{2} \left(-\Omega \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \Omega \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \Omega \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta - \Omega \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r \right) = \underline{\underline{0}}$$

Le déplacement du point située en $\underline{X} = R \underline{e}_r$ devient d'après ce qui précède :

$$[\underline{u}] = \cancel{[\underline{u}_0]} + \begin{pmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Omega R \underline{e}_\theta \text{ et on retrouve bien le résultat connu.}$$

3.2.4. Conditions de compatibilité d'un champ de déformations linéarisé

Connaissant un champ de déplacement continu, on sait déterminer un champ de déformation continu par **dérivation**. La question est maintenant: connaissant un champ de déformation (6 composantes au point de coordonnées $\underline{X}$ en raison de la symétrie du tenseur des déformations), peut-on déduire un champ de déplacement (3 composantes au point de coordonnées $\underline{X}$) associé en préservant la continuité du milieu?

On a vu dans une partie introductive (section 2.2.5.3) le théorème de Cauchy généralisé, qui nous dit que pour un champ de tenseurs symétriques $\underline{\underline{T}}$, il existe un

champ de vecteurs $\underline{v}$ tel que $2\underline{T} = (\underline{\text{Grad}}(\underline{v}) + \underline{\text{Grad}}(\underline{v})^T)$ à condition que l'équation suivante soit vérifiée :

$$\underline{\text{Rot}}^d(\underline{\text{Rot}}^g(\underline{T})) = \underline{\text{Rot}}^g(\underline{\text{Rot}}^d(\underline{T})) = \underline{0}$$

Appliquons ce théorème mathématique au cas de la déformation d'un milieu continu : soit le champ des tenseurs des déformations linéarisés $\underline{\varepsilon}(\underline{X})$, tel que :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{X}) = \frac{1}{2}(\underline{\text{Grad}} \underline{u}(\underline{X}) + (\underline{\text{Grad}} \underline{u}(\underline{X}))^T)$$

Le théorème de Cauchy généralisé nous dit alors que, pour que le champ de déplacement $\underline{u}(\underline{X})$ existe, il faut et il suffit que :

Equation fondamentale 3-8

$$\underline{\text{Rot}}^d(\underline{\text{Rot}}^g(\underline{\varepsilon})) = \underline{\text{Rot}}^g(\underline{\text{Rot}}^d(\underline{\varepsilon})) = \underline{0} : \text{condition de compatibilité géométrique}$$

Cette condition doit toujours être respectée.

Dans tous les exemples de ce cours, **cette condition sera respectée**. Il faut cependant garder en tête qu'on ne peut pas prendre au hasard un champ de déformation quelconque, au risque de « créer » des trous dans la matière (Figure 26). En pratique, lorsqu'on intègre $\underline{\varepsilon}$ si cette condition est respectée, on trouve le champ de déplacement $\underline{u}$ à un mouvement de corps rigide près qui n'est naturellement pas contenu dans l'expression de $\underline{\varepsilon}$.

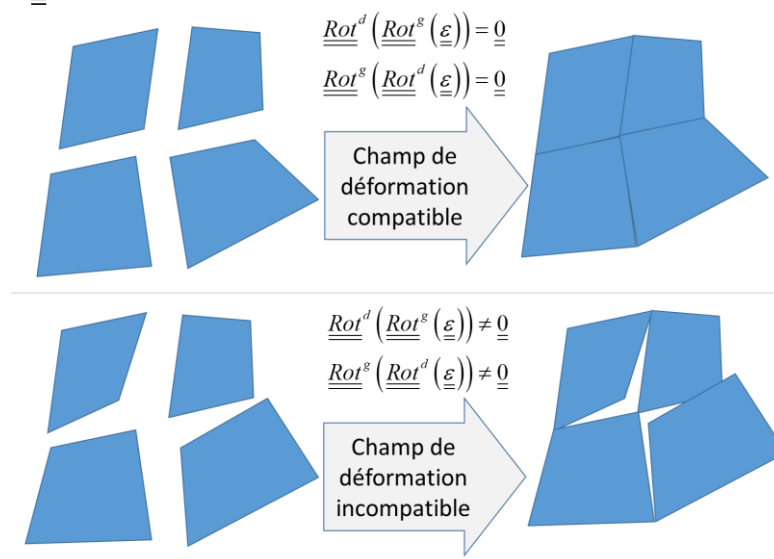


Figure 26 : Illustration de champ de déformations compatibles et incompatibles.

Exemple 3-13

Tentons de vérifier que le champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ calculé en section 3.2.2.1 est géométriquement compatible (NB: on sait d'ores-et-déjà qu'il l'est, puisqu'on l'a calculé à partir d'un champ de déplacement !).

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \frac{t}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2)$$

$$[\underline{\underline{Rot}}^g(\underline{\underline{\varepsilon}})] = \left(\underline{\underline{Rot}} \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{t}{\tau} & 0 \end{bmatrix}^T \right) \underline{\underline{Rot}} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{t}{\tau} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \right) \underline{\underline{Rot}} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \right) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Rot}}^d(\underline{\underline{Rot}}^g(\underline{\underline{\varepsilon}})) = \underline{\underline{0}}$$

On vient de montrer que la condition de compatibilité géométrique de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ était vérifiée. On constate facilement que cette condition est toujours vérifiée dans le cas d'un état de déformation uniforme.

3.2.5. Taux de déformation

Dans une description eulérienne, on ne connaît pas les trajectoires des points matériels mais uniquement le champ de vitesses $\underline{v}(\underline{x}, t)$. Pour déterminer la vitesse d'une déformation, on peut alors à chercher à dériver par rapport au temps la variation du produit scalaire écrite ci-dessus:

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} - \cancel{\underline{dX} \cdot \underline{dY}} = \underline{dx} \cdot \underline{dy} + \underline{dx} \cdot \underline{\dot{dy}}$$

Les termes $\underline{\dot{dx}}$ et $\underline{\dot{dy}}$ peuvent s'écrire à partir de la définition de l'opérateur gradient : $\underline{\dot{dx}} = \underline{dv} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dx}$ et $\underline{\dot{dy}} = \underline{dv} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dy}$

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} - \cancel{\underline{dX} \cdot \underline{dY}} = (\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dx}) \cdot \underline{dy} + \underline{dx} \cdot (\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dy})$$

$$\underline{\underline{dx}} \cdot \underline{dy} = \underline{dx} \cdot \left((\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t))^T + \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right) \cdot \underline{dy} = \underline{dx} \cdot 2\underline{\underline{d}} \cdot \underline{dy}$$

On vient alors d'introduire le tenseur $\underline{\underline{d}}$, appelée **vitesse de déformation eulérienne**, et qui se définit :

Equation fondamentale 3-9

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) + \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T \right) : \text{vitesse de déformation}$$

On vient de montrer ci-dessus que la vitesse de déformation en formulation eulérienne s'exprime comme la **partie symétrique du gradient du champ de vitesses**.

Le gradient du champ de vitesses est essentiel en mécanique des fluides et porte le nom de **tenseur de description eulérienne** : on peut écrire ce tenseur :

$$\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}}$$

Il vient alors naturellement que:

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{k}}^T + \underline{\underline{k}}) = \frac{1}{2} \left(\left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T + \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)$$

$\underline{\underline{k}}$ peut être décomposé en une partie symétrique et une partie antisymétrique de la façon suivante:

$$\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{k}} + \underline{\underline{k}}^T) + \frac{1}{2}(\underline{\underline{k}} - \underline{\underline{k}}^T)$$

On fait alors apparaître un tenseur appelé le tenseur **vitesse de rotation** $\underline{\underline{\Omega}}$:

Equation fondamentale 3-10

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) - \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T \right) \text{ ou encore } \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) : \text{vitesse de rotation}$$

3.2.6. Conservation de la masse

3.2.6.1 Dérivée particulaire d'une intégrale de volume

Si on cherche à exprimer la conservation d'une quantité (masse, quantité de mouvement, ...) à partir d'une description **eulérienne** de la transformation, on cherche à exprimer le fait que la **dérivée particulaire** de cette quantité **intégrée sur un volume** est constante durant la transformation. Par exemple, la masse globale d'un fluide qui s'écoule est conservée: cela revient à dire que *la dérivée particulaire de l'intégrale de volume de la masse volumique en description eulérienne $\rho(\underline{x}, t)$ est nulle*.

Soit donc un volume Ω_t dans la configuration actuelle K_t délimité par la frontière $\partial\Omega_t$. Soit $b(\underline{x}, t)$ une quantité eulérienne définie par unité de volume (densité

volumique). On cherche à exprimer la dérivée par rapport au temps de l'intégrale de $b(\underline{x}, t)$ sur le volume Ω_t en suivant ce volume dans son mouvement, soit la quantité:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t$$

On a vu précédemment que $\frac{d\Omega_t}{d\Omega_0} = \det \underline{\underline{F}} = J$ et $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$, et on peut donc écrire:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} b(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t) J d\Omega_0$$

Comme le volume Ω_0 exprimé dans la configuration initiale est fixe, on a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t &= \int_{\Omega_0} \frac{d}{dt} (b(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t) J) d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \left(\frac{d}{dt} (b(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t)) J + b(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t) \frac{d}{dt} (J) \right) d\Omega_0 \end{aligned}$$

On doit donc écrire la dérivée particulière de $b(\underline{x}, t)$, et de plus on a démontré précédemment que $\dot{J} = \text{div } \underline{v}(\underline{x}, t) J$, et on peut donc écrire (les notations $(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t)$ sont omises pour allègement) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_0} \left(\underline{\text{grad}}(b) \cdot \underline{v} + \frac{\partial b}{\partial t} + b \text{div}(\underline{v}) \right) J d\Omega_0$$

Si on se rappelle maintenant que $\text{div}(\alpha \underline{a}) = \underline{\text{grad}} \alpha \cdot \underline{a} + \alpha \text{div}(\underline{a})$ et que $d\Omega_t = J d\Omega_0$, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \left(\text{div}(b \underline{v}) + \frac{\partial b}{\partial t} \right) d\Omega_t$$

Le théorème de Green-Ostrogradski nous permet enfin d'écrire:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\partial b}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} b \underline{v} \cdot d\underline{a}$$

avec $d\underline{a} = \underline{n} da$ un vecteur-aire élémentaire.

Si l'on décompose la variation de cette intégrale de volume, on a donc:

→ $\int_{\Omega_t} \partial b(\underline{x}, t) / \partial t d\Omega_t$: l'effet de la variation de $b(\underline{x}, t)$ au cours du temps dans Ω_t considéré comme fixe

→ $\int_{\partial\Omega_t} b(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot d\underline{a}$: l'effet de la convection due à la variation du volume Ω_t .

3.2.6.2 Equation de continuité ou conservation de la masse

Nous faisons l'hypothèse d'une densité ρ , exprimée en kg/m^3 , telle que la masse d'un corps puisse être exprimée dans les configurations K_0 et K_t :

$$M_0(t) = \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}) d\Omega_0 \quad \text{et} \quad M(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) d\Omega_t$$

La conservation de la masse implique que $\forall t, M(t) - M_0 = 0$, ce qu'on peut écrire:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) d\Omega_t - \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}) d\Omega_0 &= 0 \\ \Rightarrow \int_{\Omega_0} \rho(\underline{x}, t) J d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}) d\Omega_0 &= 0 \\ \Rightarrow \int_{\Omega_0} (\rho(\underline{x}, t) J - \rho_0(\underline{X})) d\Omega_0 &= 0 \end{aligned}$$

Cette expression étant valide pour tout Ω_0 , on peut déduire une formulation **lagrangienne** de la conservation de la masse en écrivant :

$$\rho J = \rho_0, \text{ ou } \rho d\Omega = \rho_0 d\Omega_0 \text{ (description lagrangienne)}$$

Pour en obtenir une formulation **eulérienne**, on part du fait que la dérivée particulaire de l'intégrale de volume doit être nulle, soit:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho(\underline{x}, t)}{\partial t} + \text{div}(\rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t)) \right) d\Omega_t = 0$$

C'est la *forme globale* de l'équation de **la conservation de la masse**, qu'on appelle aussi **équation de continuité**. Comme elle doit être validée quel que soit le volume choisi, on peut en déduire une *forme locale*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0 : \text{équation de continuité (description eulérienne)}$$

A retenir 3-9

Une formulation globale intégrée sur un volume sera appelée dans la suite formulation **faible**. Si on arrive à écrire une formulation locale (non-intégrée), on l'appellera formulation **forte**.

En vertu du théorème de la divergence, on peut également écrire

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\partial \Omega_t} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} &= 0 \\ \rightarrow \int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega_t : &\text{effet de la variation dans le temps de la masse volumique} \\ \rightarrow \int_{\partial \Omega_t} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} : &\text{terme de convection (flux de matière sortant)} \end{aligned}$$

En se rappelant que $\text{div}(\rho \underline{v}) = \underbrace{\text{grad } \rho \cdot \underline{v}}_{\frac{d\rho}{dt}} + \rho \text{div}(\underline{v})$, l'équation de continuité précédente permet d'écrire :

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad } \rho \cdot \underline{v}}_{\frac{d\rho}{dt}} + \rho \text{div}(\underline{v}) = 0$$

On en déduit donc une seconde écriture pour cette équation de continuité :

Equation fondamentale 3-11

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(\underline{v}) = 0 : \text{conservation de la masse (description eulérienne)}$$

3.2.6.1 Cas incompressible

Dans le cas d'un milieu **incompressible**, la masse volumique est conservée. On écrit par conséquent :

$$\rho(\underline{x}, t) = \rho_0 \text{ indépendant de } \underline{x} \text{ et de } t$$

L'équation de la conservation de la masse devient alors : $\cancel{\frac{d\rho_0}{dt}} + \rho_0 \text{div } \underline{v} = 0$

Comme la masse volumique est nulle, on en déduit tout naturellement :

Equation fondamentale 3-12

$$\text{div } \underline{v} = 0 : \text{cas incompressible}$$

Exemple 3-14

On a déjà démontré que la transformation traitée dans les exemples précédents se faisait sans variation de volume. On peut vérifier encore une fois ce résultat :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = 2\alpha t \underline{e}_1 + \frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \underline{e}_2 \Rightarrow \text{div } \underline{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial x_1}} + \cancel{\frac{\partial v_2}{\partial x_2}} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad \text{CQFD.}$$

Résumé du CHAPITRE 3 : ce qu'il faut savoir

- ✓ Descriptions **lagrangienne** et **eulérienne**
- ✓ Définition de **la dérivée particulaire**
- ✓ Définitions : **trajectoires**, lignes de **courant**
- ✓ **Gradient de la transformation** : définition, utilisation, interprétation
- ✓ **Variation de volume** pendant une transformation
- ✓ **Tenseurs des déformations**:
- ✓ Cas de **l'hypothèse des petites perturbations (HPP)**
- ✓ Définition, utilisation, interprétation des composantes du tenseur des déformations
- ✓ **Utilisation et calcul** des vitesses de déformation
- ✓ Equation de **continuité** et cas du milieu **incompressible**

4. Dynamique des milieux continus et modélisation des efforts

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la modélisation des **efforts intérieurs** qui existent au sein d'un milieu continu lorsqu'il est sollicité, et à la formulation d'une condition qui traduit l'**équilibre mécanique** du milieu. Dans un premier temps (sections 4.1 et 4.2), le principe des puissances virtuelles sera utilisé pour arriver à cette modélisation des efforts intérieurs et à l'équation d'équilibre ; nous présenterons ensuite (section 4.3) une approche davantage physique partant sur l'équilibre d'un élément de matière pour arriver (heureusement !) aux mêmes résultats.

4.1. Principe des puissances virtuelles (PPV)

Une introduction au principe des puissance virtuelles a été présenté en section 1.3.1. Elle a été formulée pour un point matériel soumis à des efforts **extérieurs**, la notion d'**efforts intérieurs** n'ayant pas de sens pour ce système.

Considérons maintenant un morceau de matière (déformable) infinitésimal de volume $d\Omega_t$ et de masse dm sur lequel s'exercent des efforts dont la résultante est $\underline{df}$.

On rappelle qu'en référentiel galiléen, le **principe fondamental de la dynamique (PFD)** s'énonce pour ce morceau de matière situé en $\underline{x}$:

$$\underline{df}(\underline{x}, t) = dm(\underline{x}, t) \underline{a}(\underline{x}, t) = \rho(\underline{x}, t) \underline{a}(\underline{x}, t) d\Omega_t$$

*Remarque: en MMC "classique", les couples ne sont pas pris en compte au niveau local. Cela compliquerait largement tout ce qui va suivre... on fait donc l'hypothèse que, s'il est évidemment possible d'imposer un couple global à un milieu, on ne peut pas imposer un **champ de couples** à un morceau de matière infinitésimal appartenant à ce milieu.*

Cette loi concerne la configuration actuelle K_t , et l'accélération est donc exprimée en coordonnées **eulériennes** (dérivée **particulaire** du champ de vitesses $\underline{v}(\underline{x}, t)$ en description eulérienne). Tout ce qui suit concernera la configuration actuelle K_t .

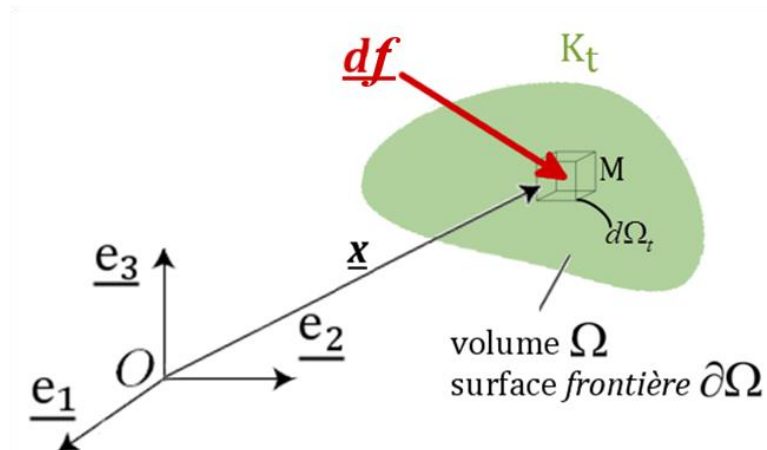


Figure 27: Effort $\underline{df}$ appliqué sur un élément de matière dans la configuration actuelle K_t

Nous allons chercher par la suite à modéliser les efforts $\underline{df}$ qui s'exercent au sein d'un milieu continu. Le principe des puissances virtuelles (PPV) constitue une approche rigoureuse pour appréhender cette modélisation. Pour le système S isolé, on peut distinguer les actions extérieures (indice e) qui agissent sur le système (pesanteur, inertie, forces de contact, pression d'un fluide...) et les actions intérieures (indice i) qui représentent les liaisons existant entre toutes les parties du milieu. On peut donc écrire:

$$\underline{df} = \underline{df}_e + \underline{df}_i$$

Considérons maintenant un champ de vecteurs-vitesse **virtuels** dans la configuration actuelle qu'on notera $\hat{\underline{v}}(\underline{x}, t)$, c'est-à-dire qui ne correspond pas nécessairement à un champ « physique » de vitesses. Le PFD reste valide si on multiplie les deux termes de l'égalité par $\hat{\underline{v}}(\underline{x}, t)$, et on a :

$$\underline{df}(\underline{x}, t) \cdot \hat{\underline{v}}(\underline{x}, t) = \rho(\underline{x}, t) \underline{a}(\underline{x}, t) \cdot \hat{\underline{v}}(\underline{x}, t) d\Omega_t$$

Dans la suite on va omettre la précision $(\underline{x}, t)$ car toutes les variables dépendent évidemment du point et du temps. Si l'on considère la décomposition de la résultante des efforts exercée sur $d\Omega_t$:

$$\underline{df}_e \cdot \underline{\hat{v}} + \underline{df}_i \cdot \underline{\hat{v}} = \rho \underline{a} \cdot \underline{\hat{v}} d\Omega_t$$

Dans cette expression, $\underline{a} \neq d\underline{\hat{v}}/dt$ car $\underline{a}$ est réel, et $\underline{\hat{v}}$ est virtuel.

On peut alors réécrire l'expression suivante:

$$d\mathcal{P}_e(\underline{\hat{v}}) + d\mathcal{P}_i(\underline{\hat{v}}) = d\mathcal{A}(\underline{\hat{v}})$$

→ $d\mathcal{P}_e(\underline{\hat{v}})$ représente la densité de puissance virtuelle des efforts extérieurs

→ $d\mathcal{P}_i(\underline{\hat{v}})$ représente la densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs

→ $d\mathcal{A}(\underline{\hat{v}})$ représente la densité de puissance virtuelle des quantités d'accélération

Si on postule ensuite l'additivité de $d\mathcal{P}(\underline{\hat{v}})$ sur le système S (propriété d'extensivité de la puissance), on peut intégrer cette nouvelle expression et on obtient l'expression suivante (qui est l'expression dite *duale* du principe fondamental de la dynamique):

$$\mathcal{P}_e(\underline{\hat{v}}) + \mathcal{P}_i(\underline{\hat{v}}) = \mathcal{A}(\underline{\hat{v}}) \quad \forall \underline{\hat{v}}(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^3, \forall \underline{x} \in S, \forall t$$

Comme vu précédemment, la loi des actions mutuelles implique que, au cours d'un **mouvement virtuel rigidifiant (MVR)**, ou mouvement de corps rigide), les efforts existants entre toutes les parties du système S s'annulent deux à deux et il n'y a pas de déformation, et ainsi on a:

$$\mathcal{P}_i(\underline{\hat{v}}) = 0 \quad \forall \underline{\hat{v}}(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^3, \forall \underline{x} \in S, \forall t.$$

On peut en déduire l'énoncé du principe des puissances virtuelles:

Equation fondamentale 4-1

Principe des Puissances Virtuelles (PPV) :

$$\mathcal{P}_e(\underline{\hat{v}}) + \mathcal{P}_i(\underline{\hat{v}}) = \mathcal{A}(\underline{\hat{v}}) \text{ pour tout mouvement virtuel et } \forall \underline{\hat{v}}(\underline{x}, t)$$

$$\mathcal{P}_e(\underline{\hat{v}}) = \mathcal{A}(\underline{\hat{v}}), \mathcal{P}_i(\underline{\hat{v}}) = 0 \text{ pour tout MVR et } \forall \underline{\hat{v}}(\underline{x}, t)$$

Les efforts **extérieurs** au système S sont de deux types: les efforts de contacts exercés en tout $\underline{x} \in \partial\Omega_t$, et les efforts extérieurs de volume exercés en tout $\underline{x} \in \Omega_t$. Au niveau **local**, en MMC dite "classique", on ne tient pas compte des efforts ponctuels et des couples appliqués localement. On peut donc formuler la puissance virtuelle des efforts extérieurs de la manière suivante:

$$\mathcal{P}_e(\hat{\underline{v}}) = \underbrace{\int_{\partial\Omega_t} \underline{t}(\underline{n}(\underline{x})) \cdot \hat{\underline{v}} \, da}_{\text{surface}} + \underbrace{\int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m \cdot \hat{\underline{v}} \, d\Omega_t}_{\text{volume}}$$

→ $\underline{t}(\underline{n}(\underline{x}))$ la **densité surfacique d'efforts extérieurs** qui dépend de la normale extérieure $\underline{n}(\underline{x})$

→ $\underline{f}^m$ la **densité massique d'efforts extérieurs de volume** (dans la plupart des cas, $\underline{f}^m$ se réduira à $\underline{g}$ l'accélération de la pesanteur).

On peut également écrire:

$$\mathcal{A}(\hat{\underline{v}}) = \int_{\Omega_t} \rho \underline{a} \cdot \hat{\underline{v}} \, d\Omega_t$$

Il nous reste maintenant à **expliciter la puissance des efforts intérieurs**, ce qui va faire l'objet de la section suivante.

4.2. Représentation des efforts intérieurs

4.2.1. Position du problème

On peut imaginer plusieurs modélisations pour les **efforts intérieurs**: par exemple, il est (peut-être ?) possible de modéliser les efforts intérieurs par un champ scalaire, ce qui reviendrait à dire que les interactions entre les différentes parties d'un milieu sont homologues à des pressions. C'est d'ailleurs ce qu'on fait quand on parle de la pression d'un gaz ! Si cette modélisation s'avère suffisante pour l'étude de la dynamique des fluides parfaits, elle n'est pas suffisante pour l'étude des solides ni pour celle des fluides en général. Avec cette modélisation en effet, comment appliquer une force tangentielle à la surface d'un solide ?

On va voir, dans la section suivante, comment une modélisation par **un champ de tenseurs d'ordre 2** qu'on notera $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ est adaptée à la représentation des efforts intérieurs dans les solides, toujours dans le contexte **eulérien** dans lequel le principe des puissances virtuels a été énoncé.

La présentation qui est faite dans cette section constitue l'introduction historique « à la française » (Jean Mandel, Paul Germain) du champ de tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}(x,t)$. Ce champ de tenseurs peut également être directement déduit de considérations physiques (section 4.3) : on présente donc ici **deux façons équivalentes d'introduire le champ de tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}(x,t)$** : le lecteur peut choisir la méthode qui lui convient le mieux... Les équations de la dynamique qui vont être déduites seront évidemment (et heureusement) les mêmes.

4.2.2. Théorie du premier gradient

Remarque : la théorie du premier gradient est la modélisation la plus courante du milieu continu et elle est suffisante dans le cadre d'un cours de MMC de 1^{ère} année. On notera tout de même l'existence d'autres approches, prenant en compte l'existence de gradients d'ordres plus élevés, et permettant de rendre compte d'effets plus complexes...

On se propose dans cette théorie de formuler la densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs $d\mathcal{P}_i(\hat{\underline{v}})$ comme une fonction linéaire de $\hat{\underline{v}}$ et de ses dérivées spatiales d'ordre 1 (d'où le nom : **théorie du premier gradient**).

4.2.2.1 Insuffisance d'un « gradient d'ordre 0 »

On suppose dans un premier cas qu'on peut écrire $d\mathcal{P}_i(\hat{\underline{v}}) = \underline{\alpha} \cdot \hat{\underline{v}}$ avec $\underline{\alpha}$ un champ de vecteurs qui représentent les efforts intérieurs. Pour un mouvement virtuel rigidifiant (MVR), le champ de vitesses virtuelles correspondant est du type $\hat{\underline{v}} = \underline{v}_0 + \underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}$ et d'après le principe des puissances virtuelles (PPV), on a donc :

$$\mathcal{P}_i(\hat{\underline{v}}) = \underline{v}_0 \cdot \int_{\Omega_t} \underline{\alpha} d\Omega_t + \underline{\Omega}_0 \cdot \int_{\Omega_t} \underline{x} \wedge \underline{\alpha} d\Omega_t = 0 \quad \forall \underline{\Omega}_0 \quad \text{car MVR}$$

Cela conduit tout naturellement à $\underline{\alpha} = \underline{0}$: si l'on veut représenter les efforts intérieurs par un champ de vecteurs, ce champ est forcément nul d'après le PPV. Ça n'a donc pas de sens !

4.2.2.2 Gradient d'ordre 1

On suppose maintenant la densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs comme **une application linéaire du gradient de $\hat{\underline{v}}$** , soit $d\mathcal{P}_i(\hat{\underline{v}}) = -\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{grad}} \hat{\underline{v}}$.

Dans ce cas, les efforts intérieurs sont donc représentés par un tenseur du deuxième ordre $\underline{\underline{A}}$. On se décide de décomposer en parties symétrique et antisymétrique les tenseurs $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{grad}} \hat{\underline{v}}$:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{grad}} \hat{\underline{v}} &= \underline{\underline{k}} = \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\Omega}} \\ \underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\alpha}}\end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\alpha}}$ représentent respectivement les parties *symétriques* et *antisymétriques* du tenseur d'ordre 2 utilisé comme représentation des efforts intérieurs. Il est facile de montrer que le produit doublement contracté d'un tenseur symétrique par un tenseur antisymétrique est nul, et il vient donc :

$$d\mathcal{P}_i(\hat{\underline{v}}) = -\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{grad}} \hat{\underline{v}} = -(\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\alpha}}) : (\underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\Omega}}) = -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\Omega}}$$

Démo :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\Omega}} &= \sigma_{ij} \Omega_{ij} = \sigma_{12} \Omega_{12} + \sigma_{13} \Omega_{13} + \sigma_{23} \Omega_{23} + \sigma_{21} \Omega_{21} + \sigma_{31} \Omega_{31} + \sigma_{32} \Omega_{32} \\ &= \cancel{\sigma_{12} \Omega_{12}} + \cancel{\sigma_{13} \Omega_{13}} + \cancel{\sigma_{23} \Omega_{23}} - \cancel{\sigma_{12} \Omega_{12}} - \cancel{\sigma_{13} \Omega_{13}} - \cancel{\sigma_{23} \Omega_{23}}\end{aligned}$$

Si on considère comme précédemment un mouvement virtuel rigidifiant de type $\hat{\underline{v}} = \underline{v}_0 + \underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}$, on peut alors écrire $\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{0}}$ (car ce tenseur correspond au taux de déformation associé à $\hat{\underline{v}}$ comme démontré en section 3.2.5) et $\mathcal{P}_i(\hat{\underline{v}}) = 0$ (pas de déformation). Comme le tenseur $\underline{\underline{\Omega}}$ n'est pas nul et que ces relations sont vraies quelque soit le volume d'intégration, il vient naturellement $\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{0}}$. On vient donc d'écrire que si

l'on représente les efforts intérieurs par un tenseur d'ordre 2, ce tenseur est **nécessairement symétrique** et on a alors :

$$d\mathcal{P}_i(\hat{\underline{v}}) = -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}$$

Le tenseur d'ordre 2 symétrique $\underline{\underline{\sigma}}$ qui vient d'être introduit s'appelle le **tenseur des contraintes de Cauchy** : nous l'étudierons en détails plus tard. Intéressons-nous dans un premier temps à exploiter le PPV tel que l'on vient de l'énoncer.

4.2.3. Equation de la dynamique

Nous avons précédemment montré (section 2.2.3.1) la propriété suivante:

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{v}}) = \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{v}} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}}}(\hat{\underline{v}})$$

Considérons maintenant le dernier terme de cette équation. On peut facilement écrire (le produit doublement contracté d'un tenseur symétrique avec un tenseur antisymétrique étant nul) que :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}}}(\hat{\underline{v}}) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}.$$

On peut donc écrire désormais : $\text{div}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{v}}) - \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{v}} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}$. Si on récrit l'expression précédente pour la puissance virtuelle des efforts intérieurs on obtient :

$$\mathcal{P}_i(\hat{\underline{v}}) = - \int_{\Omega_t} \left(\text{div}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{v}}) - \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{v}} \right) d\Omega_t$$

Et en vertu du théorème de la divergence on peut transformer cette expression :

$$\mathcal{P}_i(\hat{\underline{v}}) = - \int_{\partial\Omega_t} \left((\underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{n}} \right) da + \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{v}} d\Omega_t$$

Grâce à la symétrie du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ on peut écrire:

$$\mathcal{P}_i(\hat{\underline{v}}) = - \int_{\partial\Omega_t} \left((\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \hat{\underline{v}} \right) da + \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{v}} d\Omega_t$$

Exprimons maintenant le PPV tel qu'énoncé précédemment :

$$\mathcal{P}_e(\hat{\underline{v}}) + \mathcal{P}_i(\hat{\underline{v}}) = \mathcal{A}(\hat{\underline{v}}) \quad \forall \hat{\underline{v}} \quad \text{avec :}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_e(\hat{\underline{v}}) &= \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}(\underline{n}) \cdot \hat{\underline{v}} \, da + \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m \cdot \hat{\underline{v}} \, d\Omega_t \\ \mathcal{A}(\hat{\underline{v}}) &= \int_{\Omega_t} \rho \underline{a} \cdot \hat{\underline{v}} \, d\Omega_t \\ \mathcal{P}_i(\hat{\underline{v}}) &= - \int_{\partial\Omega_t} \left((\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \hat{\underline{v}} \right) da + \int_{\Omega_t} \underline{\underline{div}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{v}} \, d\Omega_t\end{aligned}$$

On obtient alors la **formulation faible de l'équation d'équilibre ou équation de la dynamique** suivante :

$$\int_{\partial\Omega_t} \left(\underline{t} \cdot \hat{\underline{v}} - (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \hat{\underline{v}} \right) da + \int_{\Omega_t} \left(\rho \underline{f}^m \cdot \hat{\underline{v}} + \underline{\underline{div}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{v}} \right) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{a} \cdot \hat{\underline{v}} \, d\Omega_t \quad \forall \hat{\underline{v}}, \forall \Omega_t$$

Si on considère que cette équation est vraie quel que soit le volume Ω_t , et qu'on isole les intégrales sur le volume, on en vient à la **formulation forte (locale)** suivante :

Equation fondamentale 4-2

$$\rho \underline{a} = \rho \underline{f}^m + \underline{\underline{div}} \underline{\underline{\sigma}} \quad : \text{équation d'équilibre}$$

Cette équation fondamentale est la traduction **locale** de la loi fondamentale de la dynamique, **en description eulérienne**.

En isolant l'intégrale sur la frontière du système, on écrit la seconde relation fondamentale qui amène à la définition du **vecteur-contrainte**, qui sera davantage détaillé en section 4.3.1:

Equation fondamentale 4-3

$$\underline{t}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \quad : \text{définition du vecteur-contrainte}$$

Les expressions explicites des équations de la dynamique dans différents systèmes de coordonnées seront données dans le Tableau 1.

4.2.4. Théorème de l'énergie cinétique

Le PPV reste bien entendu valide si l'on applique à un champ de vitesse réel, étant donné que les mouvements réels du milieu appartiennent à l'espace des mouvements virtuels. On en déduit:

$$\mathcal{P}_e(\underline{v}) + \mathcal{P}_i(\underline{v}) = \mathcal{A}(\underline{v})$$

que l'on peut également écrire :

$$\mathcal{P}_i(\underline{v}) + \mathcal{P}_e(\underline{v}) = \int_{\Omega_t} \rho \underline{a} \cdot \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) d\Omega_t$$

On peut montrer (mais cela prend quelques lignes...) que l'on a la relation :

$$\int_{\Omega_t} \left(\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right) d\Omega_t = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \left(\frac{v^2}{2} \right) d\Omega_t$$

Reprenons désormais l'expression précédente :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \left(\frac{v^2}{2} \right) d\Omega_t = \mathcal{P}_i(\underline{v}) + \mathcal{P}_e(\underline{v})$$

Le premier terme équivaut à la dérivée par rapport au temps de **l'énergie cinétique** du milieu en mouvement :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \left(\frac{v^2}{2} \right) d\Omega_t = \frac{d}{dt} \mathcal{K}$$

On vient ainsi d'énoncer le **théorème de l'énergie cinétique** pour un milieu continu (il avait été écrit pour un point matériel en section 1.2.2.5), qui dit que la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique du milieu en mouvement est égale à la somme des puissances des efforts intérieurs et extérieurs au milieu. Cela s'écrit:

Equation fondamentale 4-4

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}(\underline{v}) = \mathcal{P}_e(\underline{v}) + \mathcal{P}_i(\underline{v}) : \text{théorème de l'énergie cinétique}$$

Encore une fois, on s'intéresse ici à une description **eulérienne** de la transformation, et la dérivée temporelle de l'énergie cinétique est une dérivée **particulaire**.

On peut écrire encore cette définition : $\frac{d}{dt} \mathcal{K} - \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_e$

L'interprétation physique de cette expression est intéressante: la puissance des efforts extérieurs appliqués à un système se décompose en une variation d'énergie cinétique, à laquelle on enlève la puissance qui a été « utilisée » pour déformer le milieu.

Lorsque les deux puissances (efforts intérieurs et extérieurs) se compensent, la variation d'énergie cinétique est nulle et l'on a alors affaire à un problème **d'élastostatique**.

Lorsque le milieu est **indéformable**, le tenseur taux de déformation est nul: la puissance des efforts intérieurs est alors nulle, et toute l'énergie mécanique extérieure se transforme en énergie cinétique (et on retrouve alors les résultats du chapitre 1).

4.3. Tenseur des contraintes de Cauchy

Le tenseur d'ordre 2 symétrique qui vient d'être introduit ci-dessus à partir du PPV est fondamental en mécanique : historiquement, il fut proposé par Cauchy **avant** la formulation du PPV, en suivant la démarche ci-dessous. Nous allons voir que l'on peut facilement retomber sur les équations de la dynamique à partir d'intuitions physiques concernant ce tenseur.

4.3.1. Vecteur-contrainte

Plaçons-nous toujours dans la configuration actuelle, et donc en description **eulérienne**. On va imaginer que l'on **coupe de façon fictive** le système matériel en deux parties, et l'on tente de quantifier la résultante des efforts exercés par une partie sur l'autre. Le "plan de coupe fictif", qu'on appellera **facette**, est de normale $\underline{n}(\underline{x})$ **sortante au système matériel étudié**, et passe par le point M en position $\underline{n}$ (Figure 28): on postule que les efforts exercés par la seconde partie peuvent être représentés par une **densité surfacique de forces** (définition en section 1.3.4.1).

Sur chaque surface élémentaire da de normale **sortante** $\underline{n}(\underline{x})$ autour du point M , les éléments de la seconde partie exercent une force élémentaire $\underline{df}$ déterminée par $\underline{df} = \underline{t}(M, \underline{n}(\underline{x})) da$. On peut en déduire :

$$\underline{t}(M, \underline{n}(\underline{x})) = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{\underline{df}}{da}$$

$\underline{t}(M, \underline{n}(\underline{x}))$ est un vecteur appelé **vecteur-contrainte**, il dépend de la **position** de la facette (point M) ainsi que de son **orientation**, définie par sa normale $\underline{n}(\underline{x})$.

La contrainte normale σ_n est alors définie comme la projection du vecteur-contrainte $\underline{t}(M, \underline{n})$ sur la normale sortante à la facette $\underline{n}(\underline{x})$.

On a par conséquent:

$$\sigma_n = \underline{t}(M, \underline{n}(x)) \cdot \underline{n}(x)$$

En raison de la convention de normale *sortante*, on comprend donc intuitivement qu'une **contrainte normale positive** traduit localement un état de **traction** tandis qu'une **contrainte normale négative** traduit localement un état de **compression**. Une contrainte contenue dans le plan de normale $\underline{n}(x)$ sera appelée **contrainte de cisaillement**.

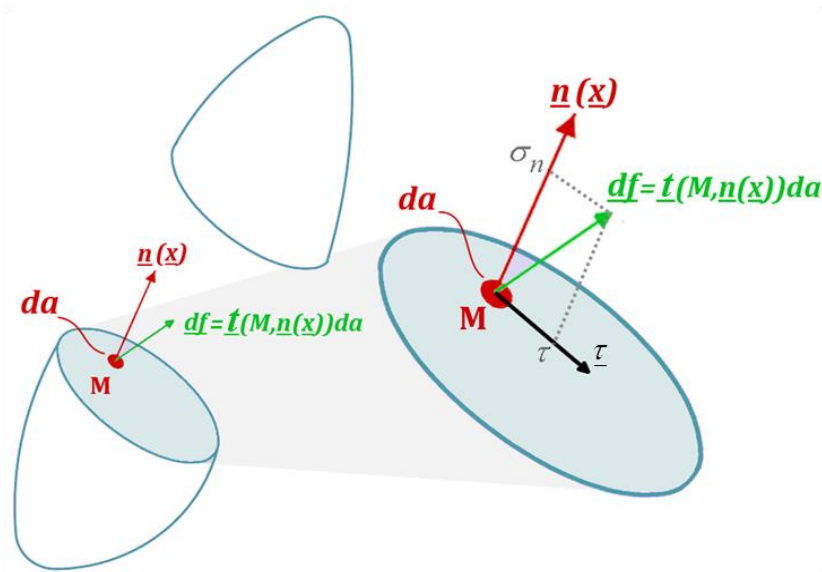


Figure 28: Définition du vecteur contrainte $\underline{t}(M, \underline{n}(x))$ par une coupe fictive du solide au point M et selon un plan normal à $\underline{n}(x)$

A retenir 4-1

Les composantes du vecteur-contrainte sont homogènes à une **pression**
(force par unité de surface , $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa}$)

Le vecteur-contrainte $\underline{t}(M, \underline{n}(x))$ est défini dans la configuration actuelle : c'est une grandeur **eulérienne** .

4.3.2. Tenseur des contraintes de Cauchy

Comme on vient de le voir, le vecteur-contrainte dépend de la normale à la facette : en un point, il y a donc autant de vecteur-contrainte que de facettes passant par ce point

(c'est-à-dire une infinité). Pour un essai de traction simple par exemple, les composantes du vecteur-contrainte en un même point vont être différentes suivant que l'on "coupe" l'éprouvette dans la direction de la traction ou dans la direction perpendiculaire.

On peut donc s'intéresser à un moyen de caractériser les relations qui lient **toutes** les normales aux facettes passant par le point M à **tous** les vecteur-contraintes associées, ce qui va justement nous permettre de faire apparaître le tenseur des contraintes de Cauchy introduit précédemment.

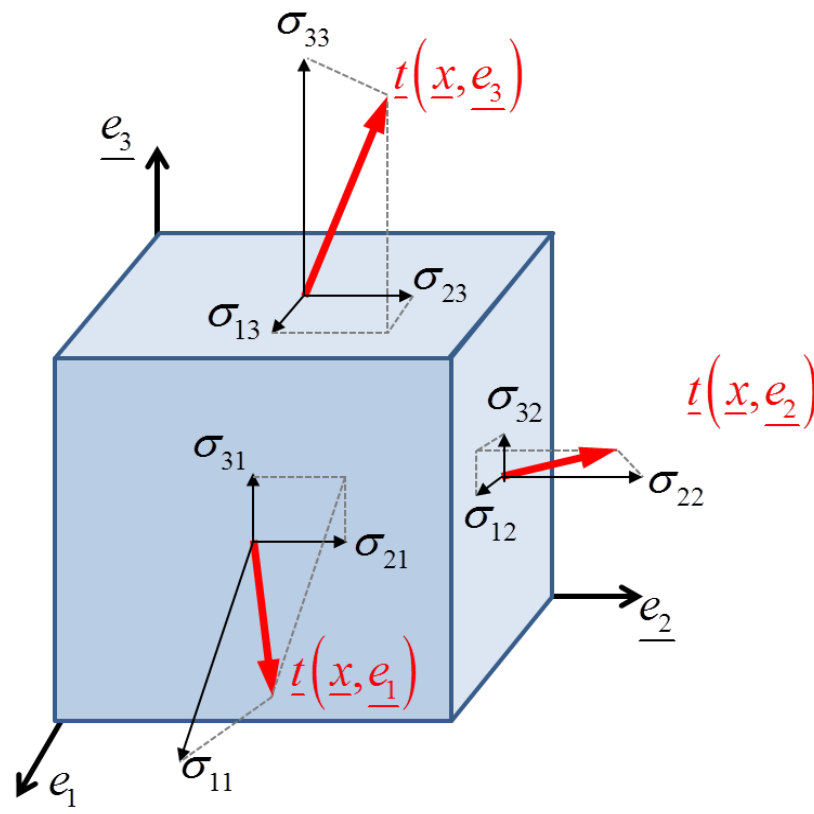


Figure 29: Représentation physique des composantes du tenseur des contraintes de Cauchy.

Considérons l'élément de matière parallélépipédique infinitésimal représenté en Figure 29. Les vecteurs-contraintes sur les facettes de normales $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ peuvent se décomposer de la manière suivante:

$$\begin{aligned}\underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_1) &= \sigma_{11}\underline{e}_1 + \sigma_{21}\underline{e}_2 + \sigma_{31}\underline{e}_3 \\ \underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_2) &= \sigma_{12}\underline{e}_1 + \sigma_{22}\underline{e}_2 + \sigma_{32}\underline{e}_3 \quad \text{ou encore } \underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_i) = \sigma_{ji}\underline{e}_j \\ \underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_3) &= \sigma_{13}\underline{e}_1 + \sigma_{23}\underline{e}_2 + \sigma_{33}\underline{e}_3\end{aligned}$$

On vient alors d'utiliser la notation suivante, qui est une convention:

A retenir 4-2

σ_{ij} : premier indice i = direction (projection sur $\underline{e}_i$)
second indice j = facette de normale $\underline{e}_j$

On peut montrer (mais pas ici) que le vecteur-contrainte ainsi introduit est linéaire vis-à-vis de la normale $\underline{n}(\underline{x}) = n_i \underline{e}_i$, et que par conséquent :

$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) = \underline{t}(\underline{x}, n_i \underline{e}_i) = n_i \underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_i) = n_i \sigma_{ji}(\underline{x}) = \underbrace{\sigma_{ji}(\underline{x}) n_i}_{t_j} \underline{e}_j$$

La notation ci-dessus revient à écrire (comme nous l'avons écrit grâce au PPV):

Equation fondamentale 4-5

$$\underline{t}_j(\underline{x}, \underline{n}) = \sigma_{ji}(\underline{x}) n_i \Rightarrow \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) : \text{définition du vecteur-contrainte}$$

On retrouve alors un tenseur du deuxième ordre, le tenseur des contraintes de Cauchy (obtenu en section 4.2), défini en représentation eulérienne. La relation $\underline{t}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ montre que le vecteur-contrainte dépend linéairement de la normale à la facette considérée.

A retenir 4-3

Le tenseur des contraintes peut être vu comme une **application linéaire** qui transforme la normale $\underline{n}(\underline{x})$ en vecteur-contrainte $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}))$

Avec cette notation, σ_{ii} (mêmes indices) représente une contrainte **normale** à la facette i , tandis que σ_{ij} (indices différents) représente une contrainte **tangentielle** à la facette j .

Plaçons-nous maintenant en un point $M(x_1, x_2, x_3)$ au centre du parallélépipède ci-dessus, de côté dx . Tentons d'écrire l'équilibre des moments (section 1.3.4.5) dus aux vecteurs-contraintes qui s'appliquent sur chaque facette du parallélépipède:

$$\left(\underline{t}(\underline{e}_1) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_1 - \underline{t}(-\underline{e}_1) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_1 \right) + \left(\underline{t}(\underline{e}_2) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_2 - \underline{t}(-\underline{e}_2) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_2 \right) + \left(\underline{t}(\underline{e}_3) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_3 - \underline{t}(-\underline{e}_3) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_3 \right) = \underline{0}$$

Si on considère maintenant le fait que $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$, on obtient:

$$\begin{aligned} & (\sigma_{11}\underline{e}_1 + \sigma_{21}\underline{e}_2 + \sigma_{31}\underline{e}_3) \wedge d\underline{x}_1 + (\sigma_{12}\underline{e}_1 + \sigma_{22}\underline{e}_2 + \sigma_{32}\underline{e}_3) \wedge d\underline{x}_2 + (\sigma_{13}\underline{e}_1 + \sigma_{23}\underline{e}_2 + \sigma_{33}\underline{e}_3) \wedge d\underline{x}_3 = \underline{0} \\ & d\underline{x}(-\sigma_{21}\underline{e}_3 + \sigma_{31}\underline{e}_2 + \sigma_{12}\underline{e}_3 - \sigma_{32}\underline{e}_1 - \sigma_{13}\underline{e}_2 + \sigma_{23}\underline{e}_1) = \underline{0} \end{aligned}$$

On peut donc en déduire que: $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ $\sigma_{23} = \sigma_{32}$

Autrement dit, le tenseur des contraintes de Cauchy est un tenseur **symétrique** (comme on l'a vu précédemment avec le PPV). On peut donc écrire :

Equation fondamentale 4-6

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T \quad \text{soit} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad : \text{tenseur des } \mathbf{contraintes de Cauchy}, \text{ symétrique}$$

4.3.3. Interprétation des composantes du tenseur des contraintes

Comme on l'a vu précédemment et comme on l'observe sur l'incontournable Figure 29, les composantes σ_{ii} (mêmes indices) représentent des **tractions** ou **compressions** dans la direction $\underline{e}_i$, tandis que les composantes σ_{ij} (indices différentes $i \neq j$) représentent des **cisaillements** dans le plan $(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$.

Ci-dessous, on a représenté deux cas de chargement différents pour un même morceau de matière : une compression selon $\underline{e}_1$ (Figure 30.1) et un cisaillement dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ (Figure 30.2). On peut remarquer que dans le premier cas la composante prépondérante est σ_{11} , et quand dans le deuxième cas c'est la composante σ_{12} .

Remarque : Les autres composantes ne sont pas strictement nulles en raison de l'application des conditions aux limites, qui impliquent localement d'autres contraintes.

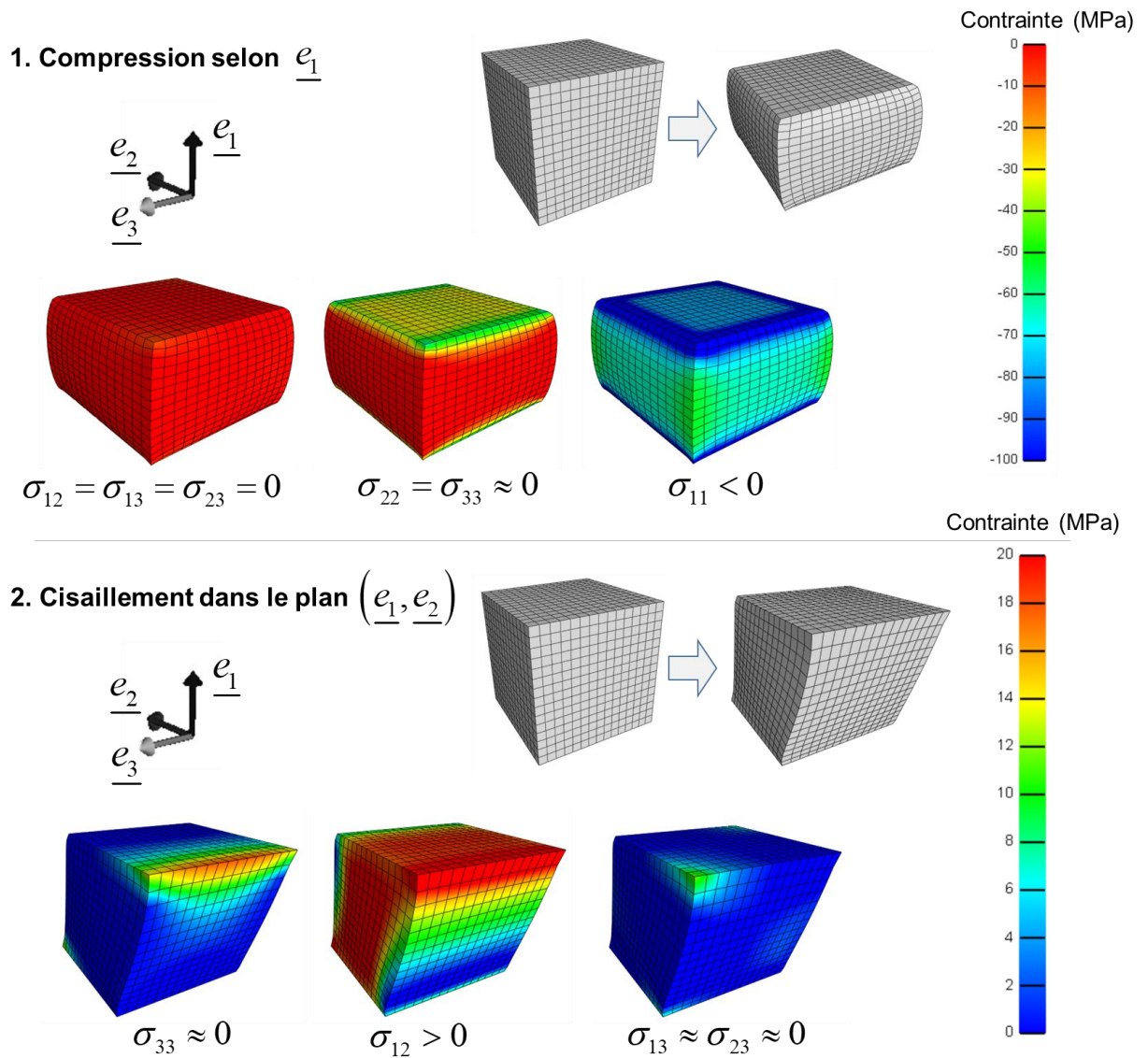


Figure 30 : Exemple d'états de contraintes et composantes du tenseur des contraintes associées. 1) compression selon $\underline{e}_1$, 2) cisaillement dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$

4.3.4. Equilibre: équation de la dynamique

Reprenons maintenant l'élément de matière ci-dessus, de volume $d\Omega_t$, de masse dm et dont la frontière est $\partial\Omega_t$ (surface fermée). Nous allons tenter d'exprimer l'équilibre dynamique de cet élément de matière. D'un côté de l'égalité nous allons trouver les efforts exercés sur ce système, qui se décomposent en efforts de volume (densité massique d'efforts) et en efforts de surface (densité surfacique d'efforts), comme on l'a fait dans l'écriture du PPV. Ecrivons ces quantités au point M de coordonnées $\underline{x}$:

- efforts de volume: $\int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t$ avec $\underline{f}^m$ une densité massique d'efforts
- efforts de surface: $\int_{\partial\Omega_t} \underline{t}(\underline{n}) da$ avec $\underline{t}(\underline{n})$ une densité surfacique d'efforts

De l'autre côté, nous allons trouver la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement du domaine considéré:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t$$

On a donc l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}(\underline{n}) da$$

On peut donc écrire en vertu du théorème de la divergence:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t &= \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} da \\ &= \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) d\Omega_t \end{aligned}$$

On peut montrer (mais pas si facilement que ça...) que l'on a l'égalité :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \frac{d\underline{v}}{dt} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{a} d\Omega_t$$

où $\underline{a}$ est la dérivée particulaire du champ de vitesse. Nous avons donc :

$$\int_{\Omega_t} \rho \underline{a} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) d\Omega_t$$

Cette équation constitue la formulation faible (intégrée) de **l'équation d'équilibre** formulée précédemment (section 4.2.3). Comme elle est vraie quel que soit le volume d'intégration, on peut en déduire la formulation forte (locale) suivante :

Equation fondamentale 4-7

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \rho (\underline{f}^m - \underline{a}) = \underline{0} \quad : \text{équation d'équilibre}$$

C'est une équation vectorielle, dont l'expression explicite dans différents systèmes de coordonnées est donnée ci-dessous (Tableau 1) :

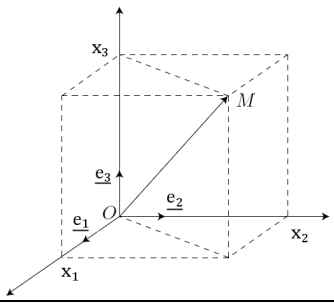
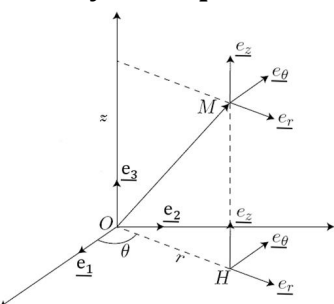
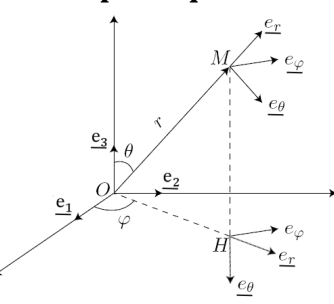
Equation de la dynamique du milieu continu	
Coordonnées cartésiennes 	$\rho(f_1^m - a_1) + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0$ $\rho(f_2^m - a_2) + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0$ $\rho(f_3^m - a_3) + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0$
Coordonnées cylindriques 	$\rho(f_r^m - a_r) + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$ $\rho(f_\theta^m - a_\theta) + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0$ $\rho(f_z^m - a_z) + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0$
Coordonnées sphériques 	$\rho(f_r^m - a_r) + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi} + \sigma_{r\phi} \cot \theta) = 0$ $\rho(f_\theta^m - a_\theta) + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} ((\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}) \cot \theta + 3\sigma_{r\theta}) = 0$ $\rho(f_\phi^m - a_\phi) + \frac{\partial \sigma_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{\phi r} + 2\sigma_{\phi\theta} \cot \theta) = 0$

Tableau 1 : Expressions explicites de l'équation de la dynamique du milieu continu dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

4.3.1. Propriétés du tenseur des contraintes de Cauchy

4.3.1.1 Valeurs et directions principales

Le tenseur des contraintes de Cauchy est un tenseur symétrique d'ordre 2. On a rappelé précédemment (section 2.1.7.2) qu'il existe pour ce type de tenseur une base "privilegiée", dite base propre ou **base principale**, dans laquelle la matrice

représentative du tenseur des contraintes est diagonale. Cette base propre sera notée $\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III}$, et on a alors:

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, les trois facettes de normale $\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III}$ **subissent uniquement des contraintes normales** (traction ou compression), mais aucune contrainte tangentielle (cisaillement). En effet, il suffit d'exprimer le vecteur-contrainte pour la facette de direction $\underline{e}_I$ pour s'en rendre compte :

$$\underline{t}(\underline{e}_I) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_I = \sigma_I \underline{e}_I$$

Selon les définitions énoncées en section 2.1.7.2, la direction $\underline{e}_I$ est donc le vecteur propre (ou **direction principale**) associé à la valeur propre (ou **contrainte principale**) σ_I . Par convention, on détermine « l'ordre » des contraintes principales de telle sorte que $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$.

A retenir 4-4

Dans la **base principale**, le tenseur des contraintes de Cauchy est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_I \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \sigma_{II} \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II} + \sigma_{III} \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III}$$

Les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ sont les **contraintes principales**. Dans cette base, il n'y a donc que des contraintes **normales** (traction/compression).

Résumé du CHAPITRE 4 : ce qu'il faut savoir

- ✓ **Principe des puissances virtuelles** : définition et principe
- ✓ **Equation d'équilibre** d'un milieu continu
- ✓ **Définition et interprétation physique** du **vecteur-contrainte**
- ✓ **Définition et interprétation physique** du **tenseur des contraintes** de Cauchy
- ✓ Ecriture du tenseur des contraintes dans sa **base principale**

5. Note technique : les conditions aux limites

5.1. Condition aux limites en efforts ou déplacements ?

Dans beaucoup de cas, le milieu est en contact avec une surface qui peut être considérée **rigide**, c'est-à-dire que son déplacement est nul. Dans ce cas le milieu étudié ne peut pas « pousser » cette surface, donc le déplacement est nul **selon la normale** à la surface. En revanche, **sauf indication contraire** (condition de non-glissement, ou d'adhésion à la paroi), le milieu peut **glisser** ou **frotter** sur cette surface rigide, donc le déplacement n'est pas nul dans les autres directions !

Cette surface rigide peut parfois aussi se **déplacer** de façon contrôlée : dans ce cas on écrit une condition sur le **déplacement imposé**, ou sur la **vitesse de déplacement imposée**.

Parfois, c'est un **effort** ou une **pression** que l'on applique (on attache un poids à la surface, on la met en contact d'un fluide sous pression, etc...). Dans ce cas la condition va porter sur le **vecteur-contrainte** et non sur le champ de déplacement. Il conviendra donc de bien écrire la normale sortante au milieu étudié selon laquelle vecteur $\underline{t}$ est écrit.

A retenir 5-1

On n'impose **jamais** (dans les exercices classiques) des conditions aux limites qui portent **à la fois** sur le **déplacement et le vecteur-contrainte** : si le déplacement est connu, le vecteur-contrainte est à déterminer, et inversement.

5.2. Condition aux limites écrite localement ou globalement ?

Lorsque la condition aux limites porte sur le vecteur-contrainte et non sur le déplacement, deux cas de figure se présentent : la condition est valable en tout point de la surface (pression), ou la condition porte sur l'intégrale sur la surface (effort résultant ou moment résultant).

A retenir 5-2

Un **effort** est une grandeur **globale** (intégrée sur une surface) : il correspond à l'**intégrale surfacique** d'une densité surfacique d'efforts (vecteur-contrainte).

Une **pression** en revanche est une **grandeur locale** (vraie **en tout point** de la surface).

Par exemple, les deux champs de vecteurs contraintes ci-dessous mènent à la même condition globale portant sur l'effort appliqué à la surface :

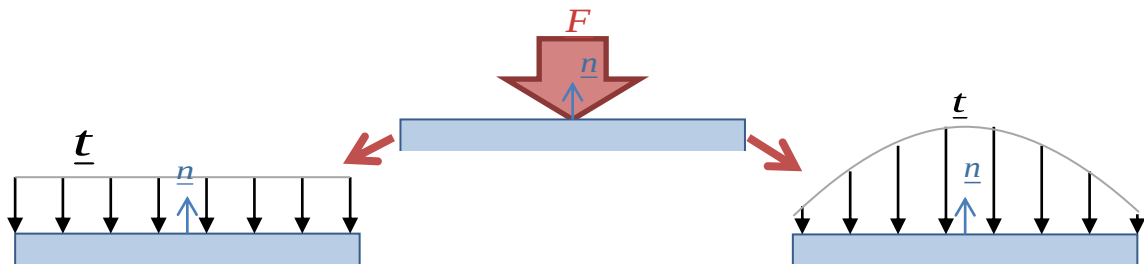


Figure 31: exemple de deux répartitions de vecteurs-contraintes menant à la même condition globale portant sur l'effort appliqué.

5.3. Surface libre

Les conditions aux limites ne portent pas que sur les surfaces du milieu sur lesquelles on impose un effort, une pression, ou dont on impose ou restreint le déplacement. **Au contraire**, si une surface est en contact avec l'air libre, c'est une condition aux limites **forte** dite de **surface libre** : cela signifie que seule la pression atmosphérique est imposée à cette surface, et que son déplacement est **libre**.

- **en mécanique des fluides**, l'application de la pression atmosphérique sur une surface libre conditionne l'équilibre du fluide
- **en mécanique du solide**, la pression atmosphérique est en général négligeable en comparaison aux efforts en jeu dans le solide. Ainsi, une condition de surface libre implique que **le vecteur-contrainte est nul en tout point** de cette surface !

5.4. Tableau récapitulatif

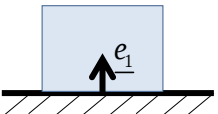
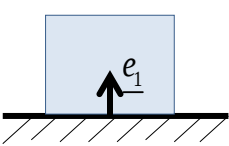
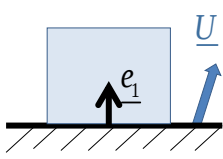
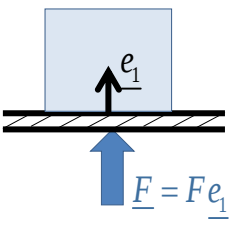
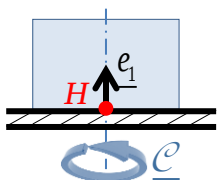
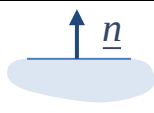
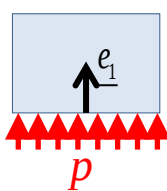
Paroi indéformable		$\underline{u}(\underline{x} \in S) \cdot \underline{e}_1 = u_1(\underline{x} \in S) = 0$
Frontière encastree		$\underline{u}(\underline{x} \in S) = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} u_1(\underline{x} \in S) = 0 \\ u_2(\underline{x} \in S) = 0 \\ u_3(\underline{x} \in S) = 0 \end{cases} \quad \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = ?$
Déplacement imposé		$\underline{u}(\underline{x} \in S) = \underline{U} \Rightarrow \begin{cases} u_1(\underline{x} \in S) = U_1 \\ u_2(\underline{x} \in S) = U_2 \\ u_3(\underline{x} \in S) = U_3 \end{cases}$
Effort homogène imposé Pas de frottements		$\int_S \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) dS = F \underline{e}_1 \Rightarrow \begin{cases} S \times t_1(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = F \\ S \times t_2(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = 0 \\ S \times t_3(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = 0 \end{cases}$
Couple imposé		$\underline{C} = \int_S \underline{HM} \wedge \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) dS = \int_S (y \underline{e}_2 + z \underline{e}_3) \wedge \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) dS$
Surface libre		en général : $\underline{t}(\underline{x} \in S, \underline{n}) = -P_{atm} \underline{n}$ en mécanique du solide : $\underline{t}(\underline{x} \in S, \underline{n}) = \underline{0}$
Pression imposée		$\underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = p \underline{e}_1$

Tableau 2 : récapitulatif des conditions aux limites qui seront rencontrées dans ce cours.

Exemple 5-1 : tube sous pression externe et interne

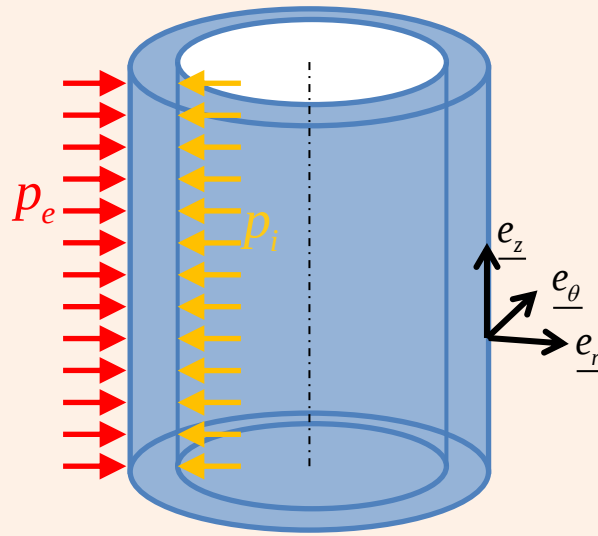


Figure 32: Tube sous pressions interne et externe

On considère un tube cylindrique sous pression interne p_i et externe p_e , de rayon interne r_i et externe r_e . Une pression (définie par unité de surface) est une condition appliquée localement, et concerne donc directement le vecteur-contrainte.

La condition aux limites s'écrit pour la surface externe de normale sortante $\underline{e}_r$:

$$\begin{aligned} \underline{t}(r=r_e, \underline{e}_r) &= -p_e \underline{e}_r \\ \sigma_{rr}(r=r_e) \underline{e}_r + \sigma_{r\theta}(r=r_e) \underline{e}_\theta + \sigma_{rz}(r=r_e) \underline{e}_z &= -p_e \underline{e}_r \\ \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr}(r=r_e) = -p_e \\ \sigma_{r\theta}(r=r_e) = 0 \\ \sigma_{rz}(r=r_e) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Et pour la surface interne de normale sortante $-\underline{e}_r$:

$$\begin{aligned} \underline{t}(r=r_i, -\underline{e}_r) &= p_i \underline{e}_r \\ -\sigma_{rr}(r=r_i) \underline{e}_r - \sigma_{r\theta}(r=r_i) \underline{e}_\theta - \sigma_{rz}(r=r_i) \underline{e}_z &= p_i \underline{e}_r \\ \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr}(r=r_i) = -p_i \\ \sigma_{r\theta}(r=r_i) = 0 \\ \sigma_{rz}(r=r_i) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On vérifie bien dans les deux cas que la contrainte est **négative**, et correspond bien à un état de **compression** de la matière.

Exemple 5-2 : compression d'un parallélépipède

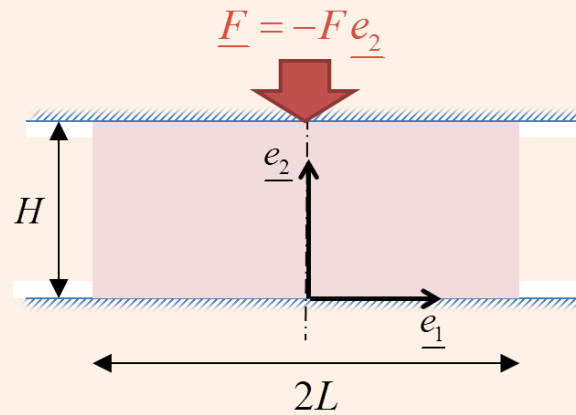


Figure 33: Exemple d'un problème plan: compression d'un parallélépipède.

Considérons donc un parallélépipède solide en contact **sans frottement** avec deux plateaux, dont l'un est utilisé pour appliquer un effort $\underline{F} = -F \underline{e}_2$ de façon **homogène**. Le parallélépipède est de hauteur initiale H , de largeur $2L$.

Sur la surface **inférieure** du parallélépipède, les points sont en contact avec un plateau immobile (**surface rigide**) et ne peuvent donc pas se déplacer verticalement. Comme le contact est sans frottement on sait que le vecteur-contrainte est nul dans le plan tangent :

$$\begin{cases} \underline{u}(x_2 = 0) = u_1 \underline{e}_1 \\ \underline{t}(x_2 = 0, -\underline{e}_2) = t_2 \underline{e}_2 \end{cases}$$

Sur la surface supérieure, on connaît une condition globale sur l'effort :

$$\int_S \underline{t}(x_2 = H, \underline{e}_2) dS = -F \underline{e}_2$$

Comme le contact est sans frottement, et que l'effort est appliqué de façon homogène, on connaît complètement le vecteur-contrainte :

$$\begin{aligned} \underline{t}(x_2 = H, \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_2 &= -\frac{F}{S} \\ \underline{t}(x_2 = H, \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_1 &= \underline{t}(x_2 = H, \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_3 = 0 \end{aligned}$$

Les deux surfaces latérales sont des surfaces libres : comme le milieu est un milieu solide, la pression atmosphérique est négligée et le vecteur-contrainte est donc nul (condition locale) :

$$\underline{t}(x_1 = \pm L, \pm \underline{e}_1) = \underline{0}$$

6. Application aux matériaux solides : élasticité linéaire

Dans les chapitres précédents, nous avons vu comment modéliser la **cinématique** d'un milieu continu, à travers notamment sa **déformation** et sa **vitesse de déformation**, puis nous avons vu comment modéliser les **efforts intérieurs** dans le milieu qui se déforme à travers différents tenseurs des contraintes. **Jusqu'ici, aucune hypothèse n'a été formulée sur la nature (solide ou fluide) du matériau.**

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux **matériaux solides**, et tenter de formuler les relations qui existent **localement** entre le champ de déformations et le champ des efforts intérieurs, en nous intéressant seulement aux aspects mécaniques (et non thermiques). Il est très important de souligner que l'on va considérer le matériau **élastique** (le matériau se déforme de façon **réversible** sous l'action d'un effort).

6.1. Constatations expérimentales

6.1.1. L'essai de traction

A retenir 6-1

Lorsqu'on cherche à **identifier une loi de comportement**, on cherche à établir une relation entre les **contraintes** et les **déformations** d'un matériau (et éventuellement sa température).

On cherche à exprimer une loi de comportement **locale** (les contraintes et les déformations s'appliquent à un élément infinitésimal du milieu continu) à partir de résultats d'expériences à l'échelle **globale**. On fait donc en général l'hypothèse d'une **homogénéité** du matériau et des champs: on tente de concevoir les essais expérimentaux pour imposer une certaine homogénéité des champs de contrainte et de déformation (torsion d'un tube mince, traction uniaxiale, etc...).

Dans le cas d'un **essai de traction uniaxiale** par exemple (Figure 34), on suppose que les champs de contraintes et de déformation sont homogènes dans la partie utile de l'éprouvette: on suppose que les têtes ne participent pas à la déformation de l'ensemble. On a schématisé ci-dessous un essai de traction pour un acier inoxydable: la tête supérieure est animée avec une vitesse $\underline{v}$ qui provoque un allongement Δl en fonction du temps et un effort $\underline{F}$ qu'on enregistre.

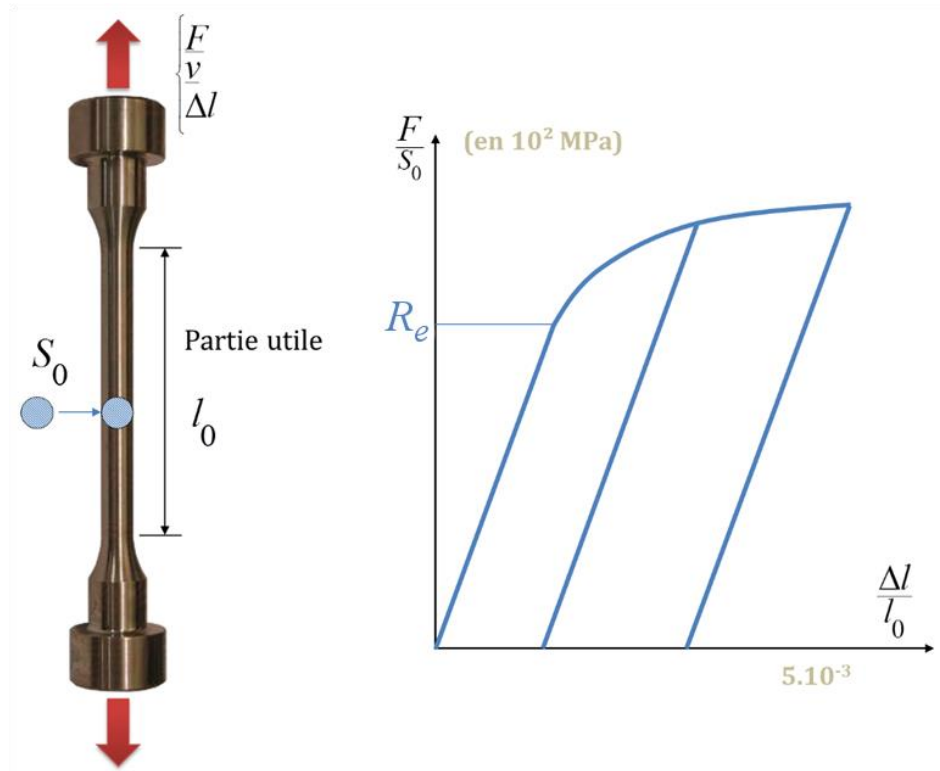


Figure 34: Essai de traction uniaxiale sur une éprouvette métallique.

tr

On remarque qu'en général, les valeurs utilisées pour la contrainte et la déformation sont (on appelle $\underline{e}_z$ la direction de traction) :

$$\frac{F}{S_0} \approx \sigma_{zz} : \text{« contrainte de l'ingénieur » ou « contrainte nominale »}$$

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon_{zz} : \text{« déformation nominale »}$$

La contrainte nominale est (dans le cas général) différente de la contrainte de Cauchy car la section transversale de l'échantillon évolue durant l'essai. Dans le cadre de l'HPP, on fait l'hypothèse que $S_0 \approx S$

6.1.2. Limite d'élasticité

Pour de nombreux matériaux, lorsque la contrainte est en-deçà de la **limite élastique** R_e , on se trouve alors dans des conditions où les contraintes et les déformations sont reliés **linéairement**. Les déformations sont alors essentiellement dues à la modification **réversible** des **espaces interatomiques**. Au-delà de ce point, le comportement devient non-linéaire, en raison notamment de phénomènes de déplacements de micro-dislocations dans le matériau... Cette partie n'est pas au programme de ce cours d'introduction à la MMC.

A retenir 6-2

Jusqu'à la **limite d'élasticité** R_e , les matériaux d'études dans ce cours seront considérés **élastiques linéaires** : les déformations sont **réversibles**, et la loi contrainte/déformation est **linéaire**.

On va tenter de définir une relation entre contraintes et déformations qui dépend du matériau considéré : il semble évident que cette relation intrinsèque au matériau ne doit dépendre ni de la **base** utilisée pour écrire les composantes des tenseurs utilisés, ni de l'**observateur** qui caractérise le matériau.

A retenir 6-3

Important : dans ce chapitre on se place à **température** constante, et les effets d'un changement de température sur les déformations (et donc les contraintes) dans le matériau ne seront pas pris en compte, même **s'ils existent bel et bien**.

6.1.3. Cas unidimensionnel : définition du module d'Young

Le postulat de base de l'élasticité linéaire est le suivant : à un état de déformation et de température correspond **un seul** état de contraintes, indépendamment de la vitesse de déformation ou de variables internes.

Si l'on considère uniquement les contraintes et déformations dans l'axe de l'éprouvette (σ_{zz} et ε_{zz} par exemple) à l'issue de l'essai de traction présenté ci-dessus, on remarque que la relation qui lie **contrainte** et **déformation** est **linéaire** pour de

nombreux matériaux. On peut donc introduire un coefficient de proportionnalité E , appelé **module de Young** et exprimé en Pascals, de sorte que :

Equation fondamentale 6-1

Dans le cas **unidimensionnel**, **élastique linéaire** : $\sigma_{zz} = E \varepsilon_{zz}$

A retenir 6-4

Le module de Young, exprimé en **Pascals** (ou plutôt GPa), est une mesure de la « rigidité » d'un matériau élastique linéaire. Il ne dépend que du **matériau**, et non de la forme de l'éprouvette.

Matériau	E (GPa)	Matériau	E (GPa)
Acier	210	Béton	20-50
Fonte	90→160	Bois	10→20
Aluminium	70	Nanotubes de Carbone	1100
Plomb	20	Verre	70
Titane	114	Caoutchouc	0.001→0.1

Tableau 3: Valeurs moyennes des modules d'Young de matériaux communs.

6.2. Matériau élastique linéaire isotrope

6.2.1. Considérations générales

En réalité, lorsque l'on applique un effort dans une direction de l'éprouvette, on observe évidemment une déformation dans cette même direction **mais aussi dans les directions transverses**.

La loi de comportement qui relie les contraintes et les déformations dans le matériau se doit donc d'être une loi **tensorielle**, **tridimensionnelle**, qui établit le lien entre le tenseur des contraintes et le tenseur de déformations.

A retenir 6-5

Dans ce chapitre on se limite à l'étude des solides élastiques linéaires isotropes sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP) : le cas général est **beaucoup** plus compliqué.

Dans le cadre de ce cours, on décide de ne pas détailler toute l'approche qui permet de formuler une telle loi : cette approche s'appuie sur la **thermodynamique des milieux continus**, et consiste à formuler des relations entre différentes **fonctions d'état** à partir de l'expression locale **des premiers et seconds principes de la thermodynamique**.

Dans le cas d'un matériau **élastique et linéaire**, on exprime ces fonctions d'état de telle sorte que :

- à un état de déformation (et de température) correspond **un seul** état de contraintes, indépendamment de la vitesse de déformation ou de variables internes
- elles conduisent à une relation **linéaire** entre contraintes et déformations.

A l'issue de cette démarche on est amenés à introduire un tenseur du quatrième ordre $\underline{\underline{A}}$ tel que :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

avec le tenseur $\underline{\underline{A}} = A_{ijkl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l$ appelé tenseur des modules d'élasticité, et $\underline{\underline{\sigma}}^0$ un tenseur de contraintes initial.

Le tenseur des modules d'élasticité possède en général 81 composantes (3x3x3x3), dont on montre que seuls **21 coefficients sont indépendants** en raison de la symétrie des tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

6.2.2. Loi de comportement élastique linéaire isotrope

En considérant ensuite **l'isotropie** du matériau, on montre que **deux paramètres matériau suffisent** à décrire le comportement élastique, et on a la relation suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma^0 \underline{\underline{I}} + \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Le terme $\sigma^0 \underline{\underline{I}}$ correspond à un état de contraintes initiales et isotrope. La plupart du temps il sera **négligé** : on considérera un état de contraintes nul initialement, dit aussi état **naturel**. On en vient donc à la relation suivante, appelée **loi de Hooke** :

Equation fondamentale 6-2

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad : \text{loi de comportement \textbf{élastique linéaire isotrope}}$$

C'est la **loi de comportement élastique linéaire isotrope en HPP**.

Cette équation contient **deux paramètres** du matériau (λ, μ) qui régissent le comportement élastique linéaire. Ils sont appelés **coefficients d'élasticité de Lamé**.

Dans cette relation on exprime les contraintes pour un état de déformation donné.

On peut aussi écrire la relation inverse, appelée **loi de comportement inverse**, et qui s'exprime :

Equation fondamentale 6-3

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \quad : \text{loi de comportement \textbf{élastique linéaire isotrope inverse}}$$

Dans cette seconde relation on fait intervenir également deux paramètres matériau :

- E : le **module d'Young** présenté dans la section précédente
- ν : le **coefficient de Poisson** (sans dimension)

Ces deux paramètres **ne sont pas indépendants** des coefficients d'élasticité de Lamé, et on passe de l'un à l'autre à partir de ces expressions :

$$\begin{cases} E = \mu \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right) \\ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda = E \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

6.2.3. Interprétation du module d'Young et du coefficient de Poisson

Plaçons-nous dans le cas de la traction **uniaxiale** exposée en début de ce chapitre : on tire cette fois sur **une éprouvette à section rectangulaire**. Pour pouvoir faire l'hypothèse des **HPP**, on considère que la plage de déformation est inférieure à 0,01 : dans cette plage, on constate qu'une relation linéaire existe entre les déformations et les contraintes.

A retenir 6-6

Dans la cas d'une traction uniaxiale selon $\underline{e}_1$, le tenseur des contraintes s'écrit simplement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 = \frac{F}{S} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$$

avec F l'effort de traction appliquée et S la section transverse de l'échantillon.

D'après la loi de Hooke inverse, on a dans ce cas :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{I} = \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_{11} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \\ &= \frac{\sigma_{11}}{E} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_{11} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \end{aligned}$$

Sous forme matricielle on peut donc voir apparaître les différentes déformations, qui correspondent à un allongement dans la direction $\underline{e}_1$ et à des rétrécissements dans les directions transverses :

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} = -\nu \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} = -\nu \varepsilon_{11} \end{pmatrix}$$

A retenir 6-7

On constate que le **module d'Young** correspond à la pente de la courbe $\sigma_{11} = f(\varepsilon_{11})$, et que le **coefficient de Poisson** est un **coefficient de compaction transverse** qui lie la déformation dans une direction aux déformations dans les deux autres directions.

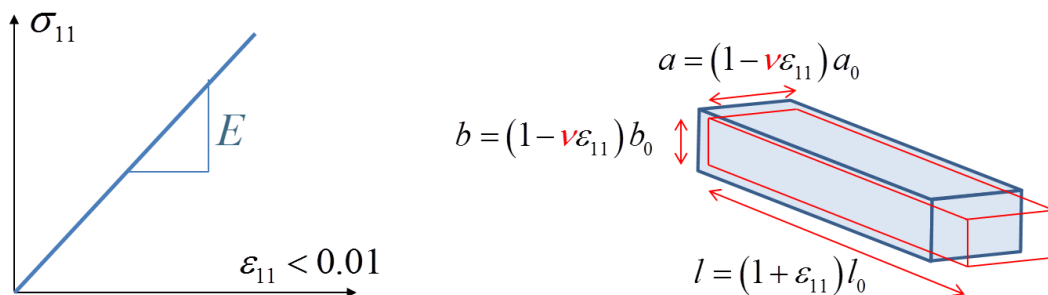


Figure 35: Interprétation du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν

*Remarque : en adoptant une approche similaire basée sur la thermodynamique, mais sans faire l'hypothèse de température constante, la loi de comportement en thermoélasticité linéaire isotrope ferait alors intervenir un **coefficient thermique** $k\Delta\Theta I$ linéaire en $\Delta\Theta$, et k est l'inverse de la dilatation thermique du matériau isotrope.*

6.2.4. Notation de Voigt

Dans la loi de comportement formulée ci-dessus en HPP, on peut se poser la question de la représentation du tenseur d'ordre 4 des modules d'élasticité :

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

soit par exemple pour une des composantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= A_{1311}\varepsilon_{11} + A_{1312}\varepsilon_{12} + A_{1313}\varepsilon_{13} + A_{1321}\varepsilon_{21} + A_{1322}\varepsilon_{22} + A_{1323}\varepsilon_{23} + A_{1331}\varepsilon_{31} + A_{1332}\varepsilon_{32} + A_{1333}\varepsilon_{33} \\ &= A_{1311}\varepsilon_{11} + A_{1322}\varepsilon_{22} + A_{1333}\varepsilon_{33} + 2A_{1312}\varepsilon_{12} + 2A_{1313}\varepsilon_{13} + 2A_{1323}\varepsilon_{23} \end{aligned}$$

En effet, si les composantes d'un tenseur d'ordre 2 peuvent s'organiser sous forme d'une matrice, il n'en est plus de même pour un tenseur d'ordre 4...

La notation de Voigt consiste à organiser les six composantes **indépendantes** des tenseurs des contraintes et des déformations (tenseurs symétriques) sous forme de vecteurs colonnes. Les composantes du tenseur des modules d'élasticité peuvent donc s'organiser sous la forme d'une matrice 6x6, et on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & A_{1123} & A_{1113} & A_{1112} \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2233} & A_{2223} & A_{2213} & A_{2212} \\ A_{3311} & A_{3322} & A_{3333} & A_{3323} & A_{3313} & A_{3312} \\ A_{2311} & A_{2322} & A_{2333} & A_{2323} & A_{2313} & A_{2312} \\ A_{1311} & A_{1322} & A_{1333} & A_{1323} & A_{1313} & A_{1312} \\ A_{1211} & A_{1222} & A_{1233} & A_{1223} & A_{1213} & A_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Cette notation permet de représenter les modules d'élasticité. Néanmoins, on doit garder à l'esprit que les vecteurs-colonnes et matrices présentes ne sont pas intrinsèques, et qu'on ne peut en aucun cas utiliser les règles de calcul tensoriel.

Pour un matériau isotrope élastique linéaire en HPP, on peut écrire la **matrice de Hooke** suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Si on utilise la loi de comportement inverse, on arrive facilement à une écriture de la **matrice de souplesse**:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est associée au **tenseur de souplesse** ou **tenseur de compliance** tel que :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\sigma}}$$

On peut montrer, en raison notamment de la symétrie des tenseurs des contraintes et des déformations, que la **matrice de Hooke** et la **matrice de souplesse** sont nécessairement **symétriques**.

6.3. Méthodes de résolution d'un problème d'élastostatique

On considère le cas de l'**élasticité linéaire isotrope en HPP** et sans écarts de température ($\Delta\Theta \rightarrow 0$). L'**équilibre** du milieu est défini par $\underline{a}(\underline{X}, t) = \underline{0}$ et implique que les efforts extérieurs soient en équilibre global avec les efforts intérieurs. On va présenter brièvement deux approches permettant de résoudre analytiquement ce

problème dit **d'élastostatique**, et on présentera très succinctement la méthode numérique aujourd'hui généralement employée pour résoudre ce problème.

6.3.1. Formulation du problème

Pour un système donné de frontière $\partial\Omega$ et de volume Ω , on connaît l'ensemble des forces volumiques sur Ω (généralement $\underline{f}^m = \underline{g}$ ou $\underline{f}^m = \underline{0}$) ainsi que les **conditions aux limites** à la surface du système en ce qui concerne les **déplacements** sur une partie $\partial\Omega^U$ et les **efforts surfaciques** sur une autre partie $\partial\Omega^T$.

On dit que le problème est **régulier** si on connaît **pour toute la frontière** $\partial\Omega$ des conditions aux limites en déplacement **ou** des conditions aux limites en ce qui concerne le vecteur-contrainte : on a donc dans ce cas $\partial\Omega^T \cup \partial\Omega^U = \partial\Omega$ et $\partial\Omega^T \cap \partial\Omega^U = \emptyset$ (Figure 36). Les équations du problème **d'élastostatique** s'écrivent alors:

A retenir 6-8

$$\begin{cases} (1) & \underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) + \rho(\underline{f}^m - \underline{a}) = \underline{0} \\ (2) & \underline{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\underline{\varepsilon}) \underline{I} + 2\mu \underline{\varepsilon} \\ (3) & \underline{\varepsilon} = 1/2 (\underline{\text{Grad}}(\underline{u}) + \underline{\text{Grad}}(\underline{u})^T) \\ (4) & \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{t}^s \quad \text{connu en tout point de } \partial\Omega^T \\ (5) & \underline{u} = \underline{u}^s \quad \text{connu en tout point de } \partial\Omega^U \end{cases}$$

L'indice « s » dans les deux dernières équations correspond à « surface ».

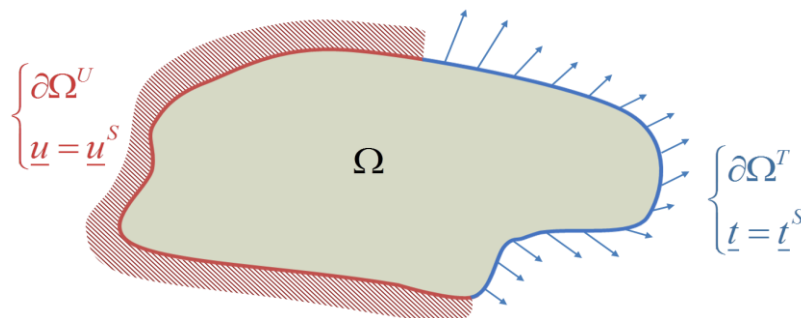


Figure 36: Formulation du problème d'élastostatique : conditions aux limites en déplacement et en vecteur-contrainte.

Si le problème est régulier alors il existe une **solution unique** concernant le **champ de contraintes et de déformations**, solution qu'on peut trouver notamment en

utilisant l'une des deux méthodes ci-dessous (approches en déplacement ou en contrainte). Si le problème n'est pas régulier, c'est-à-dire qu'on ne connaît ni le champ de déplacements ni le champ de contraintes sur au moins une partie de la frontière du système ($\partial\Omega^T \cup \partial\Omega^U \neq \partial\Omega$), alors on peut juste espérer obtenir une solution **approchée** du problème.

6.3.2. Principe de Saint-Venant

Dans le cas d'un problème non régulier, il existe un morceau de frontière pour lequel on ne peut pas formuler **localement** une condition aux limites en termes de déplacements ou de contraintes. En revanche, on sait souvent exprimer l'équilibre du système en terme **global**, notamment en exprimant le **torseur résultant**.

Dans ce cas, le **principe de Saint-Venant** nous dit que si l'on modifie la **répartition** des vecteur-contraintes sur un morceau de frontière $\partial\Omega^{SV}$ sans modifier le torseur résultant, on ne change pas sensiblement la solution du problème (champ de contraintes et de déformations) sauf au voisinage immédiat de $\partial\Omega^{SV}$.

A retenir 6-9

L'état de contraintes et de déformations **suffisamment loin** d'une surface ne dépend que du torseur résultant des efforts appliqués, et non pas de leur répartition **précise**.

Plaçons nous dans le cas représenté par la figure ci-dessous, dans laquelle une éprouvette de section S est sollicitée en traction selon $\underline{e}_z$ avec des conditions aux limites différentes à ses extrémités $\partial\Omega^{SV}$. On constate que l'état de contraintes au centre de l'éprouvette est le même dans les deux cas.

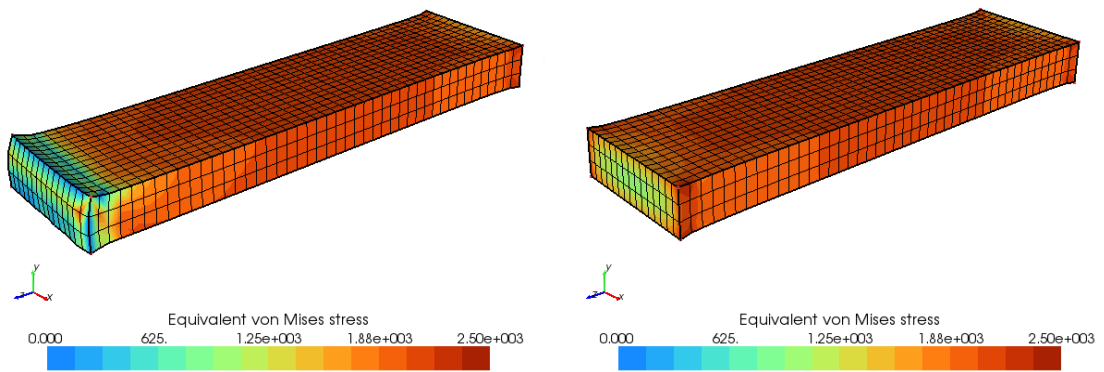
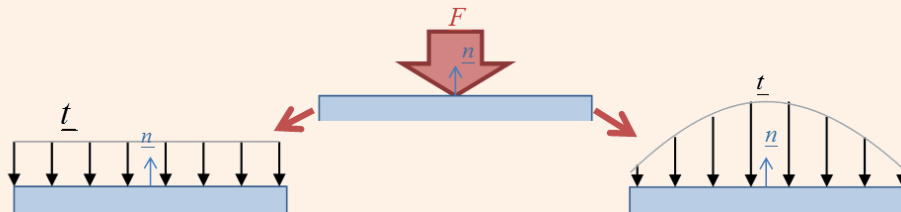


Figure 37: Illustration du principe de Saint-Venant dans le cas d'une éprouvette en traction simple.

Exemple 6-1

Reprenons le cas de deux répartitions différentes de vecteurs-contraintes menant au même effort résultant (Figure 31) : si on se place assez loin de cette surface, l'état de contraintes et de déformations sera inchangé dans les deux cas.



6.3.3. Approche en déplacement

Dans cette première approche, on se propose de **postuler un champ de déplacements** $\underline{u}$ qui doit alors être **cinématiquement admissible**, c'est-à-dire satisfaire les conditions aux limites $\underline{u} = \underline{u}^S$ sur $\partial\Omega^U$ (et être continument dérivable). Ce champ est issu de considérations physiques sur le problème considéré (conditions aux limites, symétries notamment).

Dans cette première approche, on injecte tout simplement les équations (2) et (3) ci-dessus dans l'équation (1). En se servant de l'opérateur laplacien $\underline{\Delta u} = \text{div}(\underline{\text{grad}} \underline{u})$ et après quelques lignes de calculs, on en arrive à :

$$(\lambda + \mu) \underline{\text{Grad}}(\text{Div} \underline{u}) + \mu \underline{\Delta u} + \rho(\underline{f}^m - \underline{a}) = \underline{0} : \text{équation de Navier}$$

On peut utiliser cette équation lorsque les données guident l'intuition sur la forme du champ de **déplacements**. La solution $\underline{u}$ de l'équation de Navier conduit à l'obtention de $\underline{\varepsilon}$ puis de $\underline{\sigma}$. Le champ de contraintes alors obtenu doit satisfaire : $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{t}^S$ sur $\partial\Omega^T$.

6.3.4. Approche en contrainte

Dans ce deuxième type d'approche, on propose un champ de contraintes $\underline{\sigma}$ **statiquement admissible**, c'est-à-dire qu'il doit satisfaire sur $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{t}^S$ sur $\partial\Omega^T$, et doit satisfaire évidemment les équations d'équilibre. Encore une fois, « l'intuition » de ce champ de contraintes est guidée par les symétries et les conditions aux limites du problème. On va pouvoir utiliser la loi de comportement inverse :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\sigma}) \underline{I}$$

A partir du champ de déformations obtenu, le champ de déplacement va être déterminé par intégration, ce qui implique que $\underline{\varepsilon}$ doit vérifier les **conditions de compatibilité géométrique** (section 3.2.4) :

$$\underline{\text{Rot}}^d(\underline{\text{Rot}}^g(\underline{\varepsilon})) = \underline{\text{Rot}}^g(\underline{\text{Rot}}^d(\underline{\varepsilon})) = \underline{0}$$

En injectant la loi de comportement inverse dans cette condition de compatibilité, et après quelques lignes de calculs (en faisant l'hypothèse que les efforts de volume sont uniformes), on arrive finalement au résultat suivant:

$$(1+\nu)\underline{\underline{Div}}(\underline{\underline{Grad}}(\underline{\underline{\sigma}})) + \underline{\underline{Grad}}(\underline{\underline{Grad}}(\underline{\underline{Tr}}\underline{\underline{\sigma}})) = \underline{\underline{0}} : \text{équation de Beltrami}$$

Cette équation traduit les conditions de compatibilité, d'équilibre, et la loi de comportement linéaire élastique isotrope.

Ces deux méthodes (approche en déplacement ou équation de Navier et approche en contrainte ou équation de Beltrami) sont expliquées schématiquement en Figure 38.

6.3.5. Une méthode très utilisée : la méthode des éléments finis

Les approches analytiques montrent vite leurs limites lorsque la géométrie et/ou le chargement et/ou la loi de comportement deviennent complexes, comme c'est le cas dans la plupart des problèmes réels.

L'ingénieur en mécanique aura donc souvent recours en des **méthodes numériques**, parmi lesquelles la plus utilisée est la **méthode des éléments finis**. Cette méthode lorsqu'elle est appliquée à la mécanique du solide se résume comme suit :

- la géométrie est discrétisée en un nombre *fini* d'éléments simples (d'où le nom), connectés en des *nœuds*, pour lesquels des solutions existent pour calculer $\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\sigma}}$
- on écrit les conditions aux limites à la surface du système (efforts et déplacements)
- on crée une matrice qui traduit l'assemblage complet entre tous les éléments du système en chacun des nœuds.
- en inversant cette matrice (ce qui peut être numériquement complexe !) on détermine le déplacement en chacun des nœuds du système, à partir desquels on peut identifier $\underline{\underline{\varepsilon}}$, puis $\underline{\underline{\sigma}}$, et s'assurer de l'équilibre du système.

Cette méthode sera abordée en 2^{ème} et 3^{ème} année et **repose sur toutes les notions abordées dans ce cours**.

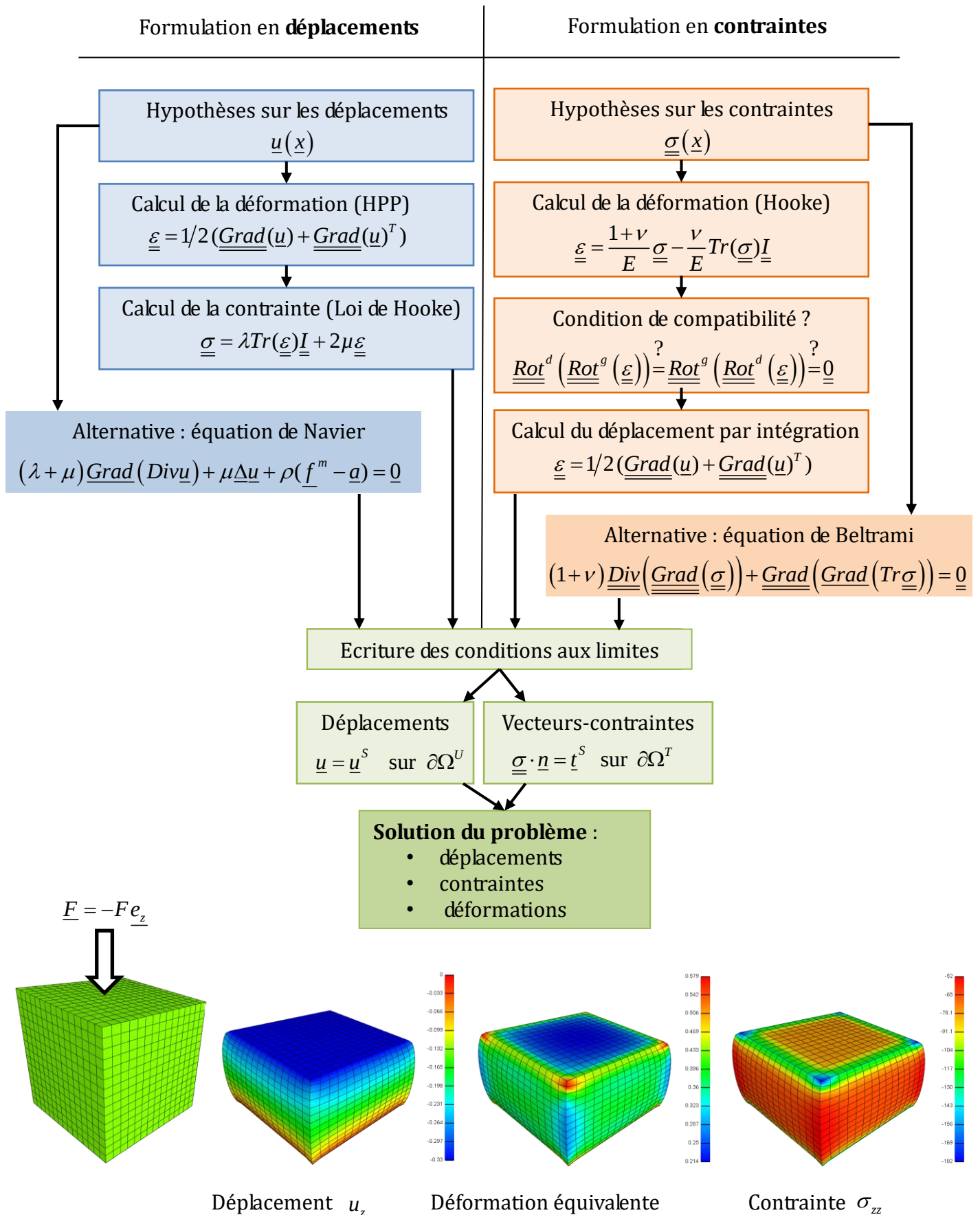


Figure 38 : Schéma de résolution d'un problème d'élastostatique.

6.4. Introduction au dimensionnement des solides et structures

6.4.1. Le dimensionnement

On a vu précédemment (dans le cas de l'essai de traction uniaxiale) la notion de **limite d'élasticité** R_e : pour de nombreux matériaux, le comportement est **élastique linéaire isotrope** en-deçà de cette limite.

Au-delà de cette limite, de nombreux autres mécanismes apparaissent et peuvent mener :

- à l' **endommagement** du matériau : ses propriétés élastiques vont alors diminuer
- à la **rupture** du matériau : des discontinuités apparaissent
- à l'apparition de **déformations plastiques**, c'est-à-dire permanentes.

A retenir 6-10

La plupart du temps, lors du **dimensionnement** d'un solide ou d'une structure, on s'assure (avec un **facteur de sécurité**) que la **limite d'élasticité** du matériau ne soit atteinte à aucun endroit.

Dans d'autres applications (comme la mise en forme des matériaux), on va justement chercher à solliciter le matériau au-delà de R_e .

6.4.1. Cas unidimensionnel

Comme on l'a rappelé, dans le cas de l'essai de traction uniaxiale le tenseur des contraintes possède une seule composante non nulle dans la direction de traction :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{zz} \underline{e_z} \otimes \underline{e_z} = \frac{F}{S} \underline{e_z} \otimes \underline{e_z}$$

Dans ce cas, le critère pour dimensionner une structure est trivial : il suffit que cette contrainte ne dépasse pas la limite élastique R_e !

$$\sigma_{zz} = \frac{F}{S} \leq R_e \text{ en traction uniaxiale}$$

Evidemment, dans le cas de la compression uniaxiale, il s'agit alors de comparer la norme de la contrainte (qui est alors négative) à la limite élastique R_e .

Ce critère suffit pour dimensionner des « treillis réticulés », qui sont des ensembles de barres articulées qui ne travaillent qu'en traction-compression et dont l'état de contraintes se réduit à une seule composante dans la direction des barres (Figure 39).

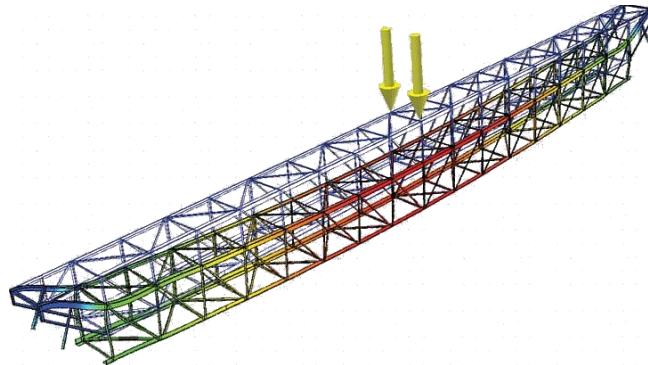


Figure 39: Dimensionnement d'un treillis constitué de barres : il faut et il suffit que la norme des contraintes uniaxiales dans chaque barre ne dépasse pas la limite d'élasticité du matériau.

6.4.1. Notion de contrainte équivalente

Dans le cas général, le tenseur des contraintes est quelconque et possède 6 composantes indépendantes :

- $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ dans un repère quelconque
- $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_I \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \sigma_{II} \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II} + \sigma_{III} \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III}$ dans le repère principal

On cherche donc à comparer ce **tenseur** avec le **scalaire** R_e , ce qui n'est a priori mathématiquement pas trivial...

On va chercher cela à définir une **contrainte équivalente** et qu'on peut définir comme ceci :

A retenir 6-11

Une **contrainte équivalente** σ_{eq} est une grandeur **scalaire** représentative de l'état **tridimensionnel** des contraintes et qui peut être comparée à la limite d'élasticité R_e .

On cherche donc à construire un scalaire à partir d'un tenseur d'ordre 2 : on pourrait choisir la somme des composantes, la trace, le déterminant... comment choisir ?

6.4.2. Surface de charge

Expérimentalement, on peut chercher à soumettre un matériau à un état de contraintes combiné (cisaillement, compression, traction) dans toutes les directions de l'espace. Dans ce cas, on peut définir un point, appelé **point de charge**, dans l'**espace des contraintes principales** (ou « espace de Westergaard »), construit à partir des valeurs des trois contraintes principales. On observe alors que, dans cet espace, la **limite d'élasticité** devient une surface définie par son équation $f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$ appelé **surface de charge** qu'il ne faut pas atteindre si l'on veut rester dans la **zone élastique** du matériau (Figure 40).

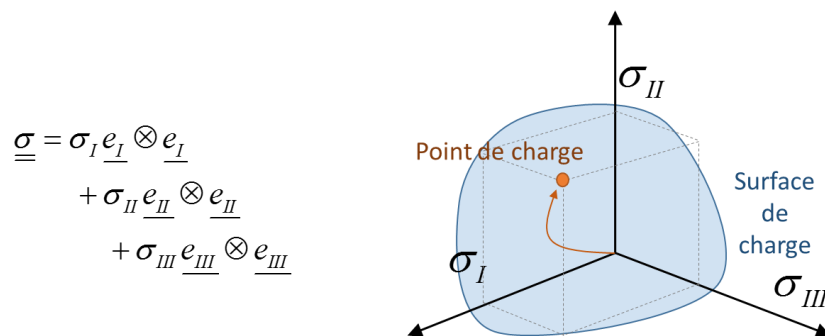


Figure 40: Point de charge et surface de charge pour un état de contraintes quelconque.

Un **critère de dimensionnement tridimensionnel** correspond donc à une définition de cette surface de charge. On dit qu'on atteint la limite d'élasticité lorsque :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{eq} - R_e = 0$$

Des campagnes d'essais expérimentales ont conduit à proposer des définitions pour la contrainte équivalente, en fonction du matériau étudié. On se contentera d'étudier ici la contrainte équivalente la plus utilisée : **la contrainte équivalente de Von Mises**.

6.4.3. Contrainte équivalente de Von Mises

La contrainte équivalente de Von Mises est la plus utilisée actuellement en mécanique, car il s'avère qu'elle permet de d'approcher la surface de charge de la plupart des matériaux de construction classiques. Notamment, c'est souvent la

contrainte de Von Mises (comprendre : « contrainte équivalente au sens du critère de Von Mises ») qui est affichée par défaut en sortie d'un calcul par éléments finis.

Le critère de Von Mises est basé sur l'énergie de *distorsion élastique*.

Sans démonstration ici, on se contentera de dire que l'introduction de cette **contrainte équivalente** est le résultat d'une constatation expérimentale que l'on peut faire sur de nombreux matériaux : il est quasiment impossible de dépasser le régime élastique d'un matériau en imposant un changement de volume sans changement de forme, tandis qu'un changement de forme sans changement de volume va rapidement induire des déformations plastiques irréversibles. Une contrainte équivalente basée sur l'**énergie de distorsion élastique** (énergie élastique causée par un changement de forme sans changement de volume) est donc utilisée, et on montre qu'elle peut s'écrire :

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}$$

On obtient donc bien une valeur **scalaire**, qui prend en compte les différentes contraintes normales et tangentielles. On peut également exprimer cette contrainte équivalente à partir des composantes **principales** du tenseur des contraintes :

Equation fondamentale 6-4

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} : \text{contrainte de Von Mises}$$

Pour vérifier que l'état de contraintes dans un matériau ne risque pas d'induire des déformations irréversibles (déformations plastiques), il s'agit alors de **s'assurer que cette contrainte équivalente est inférieure à la limite d'élasticité R_e du matériau** :

Equation fondamentale 6-5

L'état de sollicitation dans un matériau n'induit pas de déformations irréversibles si et seulement si : $\sigma_{VM} \leq R_e$

Exemple 6-2

Pour construire expérimentalement la surface de charge d'un matériau, on peut avoir recours à un essai **combiné** : on prendra ici l'exemple d'un essai de l'essai de **traction-torsion** d'une éprouvette cylindrique à paroi mince. Dans ce cas on peut montrer que l'état de contraintes peut s'écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e_z} \otimes \underline{e_z} + \tau (\underline{e_z} \otimes \underline{e_\theta} + \underline{e_\theta} \otimes \underline{e_z})$$

On peut aisément exprimer cet état de contraintes planes dans le repère principal :

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{(\underline{e_I}, \underline{e_{II}}, \underline{e_{III}})} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \end{pmatrix}$$

Selon le critère de Von Mises, la contrainte équivalente s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_{VM} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \end{aligned}$$

Ainsi, dans ce cas, le matériau restera dans sa zone élastique si est seulement si on respecte la condition :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R_e$$

On observe naturellement que, si on enlève la torsion on a $\tau = 0$ et donc le critère : $\sigma_{VM} = \sigma \leq R_e$.

Résumé du CHAPITRE 6 : ce qu'il faut savoir

- ✓ **Essai de traction**
- ✓ **Loi de comportement élastique linéaire isotrope en HPP : loi de Hooke**
- ✓ **Calcul de contraintes** à partir d'un champ d'un champ de déplacement
- ✓ **Interprétation du module de Young** et du **coefficient de Poisson**
- ✓ **Formulation et résolution** d'un problème d'élastostatique
- ✓ **Dimensionnement** : calcul d'une contrainte équivalente

7. Applications aux fluides

Puisque le chapitre précédent vient d'être consacré à l'application de la MMC au cas particulier des matériaux solides, il n'est pas surprenant de s'intéresser désormais au cas des matériaux **fluides**. On ne donnera ici qu'une brève introduction à la **mécanique des fluides**, étant donné que cette discipline fondamentale pour un ingénieur ENSEM sera largement abordée par la suite. Cependant, les fondements qui vont être exposés ici seront considérés **acquis** dans la suite de votre cursus de mécanicien des fluides, et méritent donc d'être bien assimilés.

Comme évoqué précédemment, la description **eulérienne** paraît évidente pour décrire le mouvement d'un fluide, étant donné que la recherche d'une configuration de référence perd son sens dans le cas d'un écoulement. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser plus particulièrement à la description **d'écoulements** de base pour des fluides simples dits **newtoniens**. Nous allons d'abord rappeler ou remettre en forme les équations déjà énoncées dans les parties précédentes mais qui s'avéreront très utiles pour étudier l'écoulement de tels fluides. Nous nous intéresserons ensuite à l'expression de lois de comportement adaptées, puis nous énoncerons quelques propriétés des écoulements de ces fluides.

7.1. Cinématique des fluides

7.1.1. Description de la transformation

Comme décrit en section 3.1.2, on s'intéressera dans tout ce chapitre au cas où on définit la transformation par l'intermédiaire d'un **champ de vitesses** exprimé dans la **configuration actuelle**. Il suffit donc que l'on mesure instantanément sur une image la vitesse **de chaque « particule de fluide »**, ou chaque point matériel, du milieu : c'est

approximativement le principe de la « vélocimétrie par imagerie de particules », illustrée sur la figure ci-dessous (Figure 41) :

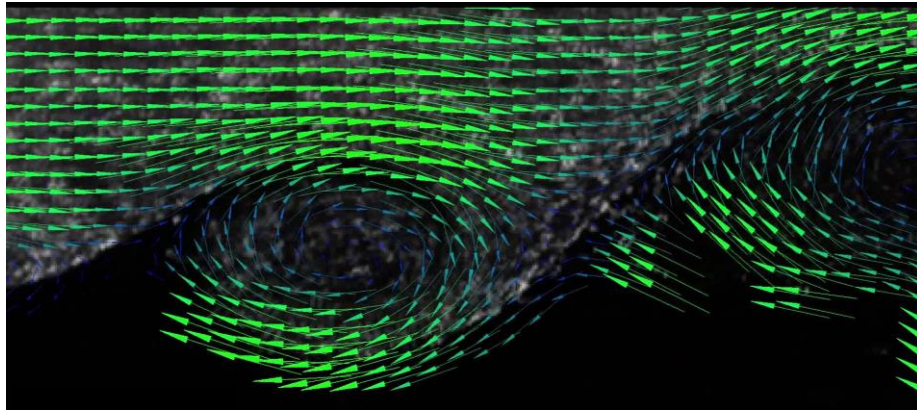


Figure 41 : Exemple d'image issue de « vélocimétrie par imagerie de particules », où on visualise de champ de vitesses de chaque point matériel du milieu dans la configuration actuelle.

Dans ce chapitre on décrit donc la cinématique du milieu de la façon suivante :

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$$

7.1.2. Vitesse de déformation

Dans le cadre de la description eulérienne adaptée à la mécanique des fluides, on rappelle les résultats obtenus précédemment (section 3.2.5) en ce qui concerne la cinématique d'un milieu continu. Le tenseur $\underline{k}$, appelé parfois « tenseur de description eulérienne », s'exprime simplement :

$$\underline{k} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t)$$

Le gradient d'un champ de vecteurs peut être décomposé en une partie symétrique et une partie antisymétrique (section 2.2.2.7), correspondant respectivement à une « déformation locale » et une « rotation locale ». On obtient alors le tenseur **vitesse de déformation eulérienne** $\underline{d}$:

Equation fondamentale 7-1

$$\underline{d} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) + \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T \right) : \text{vitesse de déformation}$$

ainsi que le tenseur **vitesse de rotation** $\underline{\underline{\Omega}}$:

Equation fondamentale 7-2

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) - \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T \right) : \text{vitesse de rotation}$$

7.1.3. Vorticité et tourbillon

On rappelle que le rotationnel du champ de vecteurs vitesse $\underline{v}(\underline{x}, t)$ s'écrit facilement à partir de l'opérateur Nabla :

$$\underline{rot} \underline{v} = \underline{\nabla} \wedge \underline{v} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \underline{e}_i$$

On peut définir alors la **vorticité** du fluide, qui est un champ de vecteurs $\underline{\omega}$, égal au rotationnel du champ de vecteurs vitesse $\underline{v}(\underline{x}, t)$:

Equation fondamentale 7-3

$$\underline{\omega}(\underline{x}, t) = \underline{rot} \underline{v}(\underline{x}, t) : \text{vorticité du fluide}$$

La direction de ce champ de vecteurs correspond à l'**axe de la rotation locale** du champ de vecteur (d'où le nom de l'opérateur *rotationnel*).

Intéressons-nous maintenant au tenseur vitesse de rotation $\underline{\underline{\Omega}}$ défini ci-dessus. En considérant ce tenseur comme une application linéaire, on peut analyser la façon dont il transforme un vecteur quelconque $\underline{a}$:

$$\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{a} = \Omega_{ij} a_j \underline{e}_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) a_j \underline{e}_i = \frac{1}{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} a_j \underline{e}_i - \frac{1}{2} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} a_j \underline{e}_i$$

On peut alors définir un second vecteur, appelé en général **vecteur tourbillon** $\underline{\Omega}$ de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{a} = \frac{1}{2} \underline{rot} \underline{v} \wedge \underline{a} = \underline{\Omega} \wedge \underline{a}$$

On a par conséquent : $\underline{\Omega}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \underline{rot} \underline{v}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \underline{\omega}(\underline{x}, t)$

7.2. Lois de conservation

7.2.1. Masse

7.2.1.1 Rappel : conservation de la masse

Une première forme de **loi de conservation de la masse** a été formulée précédemment (section 3.2.6.2):

Equation fondamentale 7-4

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(\underline{v}) = 0 : \text{conservation de la masse}$$

On peut également proposer la forme suivante :

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = 0$$

avec $\underline{da} = \underline{n} da$ un élément de surface orienté.

- $\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega_t$: effet de la variation dans le temps de la masse volumique
- $\int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} \cdot \underline{da}$: terme de convection (flux de matière sortant)

7.2.1.2 Cas des écoulements stationnaires : conservation du débit

Dans le cas d'écoulements **stationnaires** (on rappelle que dans ce cas la description eulérienne du mouvement est indépendante du temps), on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \underline{0}$$

La conservation de la masse devient alors : $\int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = 0$

Si l'on considère le cas d'une canalisation en écoulement stationnaire, où la frontière du milieu peut être décomposée en une surface d'entrée S_e , une surface de sortie S_s , et la paroi de la canalisation S_p . On peut alors écrire l'équation :

$$\int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = \int_{S_e} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} + \int_{S_s} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} + \int_{S_p} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = 0$$

La paroi de la canalisation étant étanche, on en déduit :

$$-\int_{S_e} \rho \underline{v} \cdot d\underline{a} = \int_{S_s} \rho \underline{v} \cdot d\underline{a} = Q_m : \text{conservation du } \mathbf{d\u00e9bit} \text{ massique}$$

Ceci exprime tout simplement qu'il y a dans ce cas **conservation du d\u00e9bit massique**. Le d\u00e9bit massique Q_m s'exprime \u00e9videmment en $kg.s^{-1}$ et ne doit pas \u00eatre confondu avec le d\u00e9bit volumique Q_v exprim\u00e9 en $m^3.s^{-1}$.

7.2.1.1 Cas du fluide incompressible

Dans le cas d'un fluide **incompressible**, on a naturellement :

$$\rho(\underline{x}, t) = \rho_0 \text{ ind\u00e9pendant de } \underline{x} \text{ et de } t$$

Si on reprend l'\u00e9quation pr\u00e9c\u00e9dente il vient naturellement :

$$-\int_{S_e} \underline{v} \cdot d\underline{a} = \int_{S_s} \underline{v} \cdot d\underline{a} = \frac{Q_m}{\rho} = Q_v : \text{il y a } \mathbf{conservation du d\u00e9bit volumique}$$

De plus, reprenons l'\u00e9quation locale de la conservation de la masse :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0$$

On en d\u00e9duit tout naturellement que dans le cas incompressible :

Equation fondamentale 7-5

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0 : \text{cas du fluide } \mathbf{incompressible}$$

C'est une des \u00e9quations fondamentales pour la m\u00e9canique des fluides.

En r\u00e9alit\u00e9, tous les fluides sont compressibles (de la m\u00eame fa\u00e7on que tous les solides sont d\u00e9formables), mais certains plus que d'autres. La compressibilit\u00e9 des **liquides** est en revanche tr\u00e8s faible, et l'hypoth\u00e8se de fluide incompressible est tr\u00e8s g\u00e9n\u00e9ralement r\u00e9alis\u00e9e pour l'\u00e9tude de l'\u00e9coulements d'eau (liquide) ou d'huile dans des canalisations par exemple.

Exemple 7-1

Consid\u00e9rons un tube coud\u00e9 de section constante S , poss\u00e9dant une surface d'entr\u00e9e S^e et de sortie S^s aux pressions p^e et p^s respectivement, et les vitesses d'entr\u00e9es et de sorties sont $\underline{v}^e = -v^e \underline{e}_1$ et $\underline{v}^s = v^s \underline{e}_2$.

Un fluide incompressible s'écoule à l'intérieur du tube.

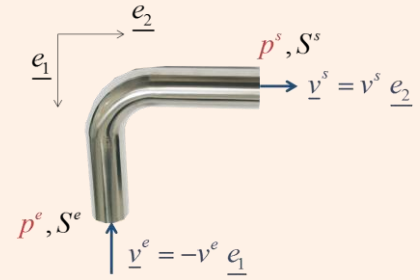
La conservation du débit massique telle que formulée

ci-dessus s'écrit :

$$-\int_{\mathcal{C}^e} \rho \underline{v}^e \cdot \underline{n}^e da = \int_{\mathcal{C}^s} \rho \underline{v}^s \cdot \underline{n}^s da \quad \text{avec } \underline{n}^e = \underline{e}_1 \text{ et } \underline{n}^s = \underline{e}_2$$

La masse volumique est constante, et si on fait de plus l'hypothèse que la vitesse est répartie uniformément sur la section on a alors :

$$\begin{aligned} -\int_{S^e} \rho (-v^e \underline{e}_1) \cdot \underline{e}_1 da &= \int_{S^s} \rho v^s \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2 da \\ \Rightarrow \rho v^e S^e &= \rho v^s S^s \Rightarrow v^e = v^s \end{aligned}$$



7.2.2. Quantité de mouvement

On a montré précédemment (section 3.2.6.1) que la dérivée particulière de l'intégrale de volume de la quantité $b(\underline{x}, t)$ (eulérienne) s'exprimait :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} b d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} b \underline{v} \cdot d\underline{a}$$

Si on pose $b = \rho v_i$ dans cette équation on obtient alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho v_i d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \rho v_i \underline{v} \cdot d\underline{a}$$

Ceci étant vrai pour toutes les composantes de la vitesse, on peut ainsi exprimer la formule de transport de la quantité de mouvement :

Equation fondamentale 7-6

$$\frac{d}{dt} \underline{p} = \sum \underline{F}^{ext} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{v}) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) da : \text{formule de transport d'Euler}$$

Ce théorème permet d'exprimer la variation de quantité de mouvement comme la somme d'un terme volumique (variation au sein du système) et d'un terme de transfert par la frontière (quantité de mouvement due au flux entrants et sortants). Comme précédemment, la variation de quantité de mouvement est égale à la somme des efforts extérieures agissant sur le système.

Exemple 7-2

Reprenons l'exemple du tube coudé ci-dessus, pour lequel on a $v^e = v^s = v$.

Au temps t , une masse $dm^e = \rho v^e S^e dt = \rho v S dt$ entre dans le tube et au temps $t + dt$, une masse une masse $dm^s = \rho v^s S^s dt = \rho v S dt = dm^e$ en ressort. Si on écrit la variation de la quantité de mouvement entre ces deux moments pour le système composé du fluide dans le tube et des masses qui entrent et sortent entre t et $t + dt$ on obtient:

$$\begin{aligned} d\underline{p} &= (\underline{p}(t+dt) + dm^s \underline{v}^s) - (\underline{p}(t) + dm^e \underline{v}^e) \\ d\underline{p} &= \underline{p}(t+dt) + \rho v^2 S dt \underline{e}_2 - \underline{p}(t) + \rho v^2 S dt \underline{e}_1 \end{aligned}$$

Comme il y a conservation du mouvement on a $\underline{p}(t+dt) = \underline{p}(t)$ et donc :

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \rho v^2 S (\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = \sum \underline{F}^{ext}$$

On va considérer que le tube est horizontal et que les forces de volumes (pesanteur) sont négligeables. Le fluide est donc soumis aux forces de pression sur les sections d'entrée et de sortie ainsi qu'à la force de réaction $\underline{F}$ exercée par la paroi sur le fluide, et donc:

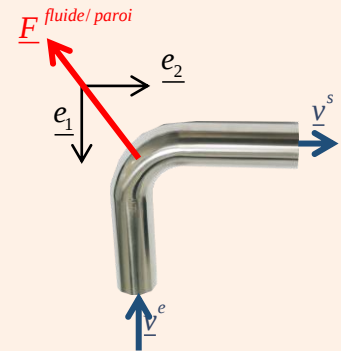
$$\underline{F}^{ext} = -p^e S^e \underline{e}_1 - p^s S^s \underline{e}_2 + \underline{F}$$

On peut en déduire l'effort total :

$$\begin{aligned} \rho v^2 S (\underline{e}_1 + \underline{e}_2) &= -p^e S \underline{e}_1 - p^s S \underline{e}_2 + \underline{F} \\ \Rightarrow \underline{F} &= S (p^e + \rho v^2) \underline{e}_1 + S (p^s + \rho v^2) \underline{e}_2 \end{aligned}$$

Cet effort est exercé par la paroi sur le fluide : la force exercée par le fluide par la paroi est évidemment l'opposée, la direction de cet effort n'est pas surprenante.

$$\underline{F}^{fluide/paroi} = -S (\rho v^2 + p^e) \underline{e}_1 - S (\rho v^2 + p^s) \underline{e}_2$$



7.3. Fluides newtoniens : loi de comportement

Des observations expérimentales permettent de montrer que, pour un fluide en **hydrostatique**, la contrainte normale est identique quelle que soit la normale considérée $\underline{n}$, ce qu'on peut par conséquent noter :

$$\forall \underline{n}, \quad \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n} = -p \underline{n}$$

On vient d'introduire ici la notion de pression p , et en hydrostatique on a donc le tenseur des contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}}$$

Il n'y a dans ce cas aucune contrainte tangentielle, ce qui peut constituer une définition d'un fluide : un fluide est un matériau qui **au repos** ne peut supporter aucune contrainte tangentielle.

Lorsqu'on veut mettre ce fluide en mouvement, et donc dans le cas de l'**hydrodynamique**, on observe que des **contraintes visqueuses** s'ajoutent au tenseur des contraintes hydrostatique, et que l'on peut écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$$

On dit qu'un fluide est **newtonien** si une relation **linéaire** existe entre la **vitesse** de déformation $\underline{\underline{d}}$ (partie symétrique du gradient du champ de vitesses) et le tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\underline{\tau}}$. Dans le cas d'un fluide **incompressible isotrope**, cette relation linéaire se réduit à un seul coefficient μ qui est la **viscosité dynamique** du fluide, et on a :

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \underline{\underline{d}} = \mu \left(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} + \left(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} \right)^T \right)$$

La loi de comportement d'un fluide newtonien est donc donnée par la relation :

Equation fondamentale 7-7

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}} : \text{loi de comportement du fluide newtonien}$$

La **viscosité dynamique** correspond donc à la contrainte de cisaillement qui accompagne l'existence d'un gradient de vitesse dans un fluide. Pour les fluides

newtoniens, cette propriété du matériau est indépendante du gradient de vitesse ; elle n'est en revanche pas du tout indépendante des variations de **température** du fluide. Par exemple, la viscosité dynamique de l'eau à 20°C est d'environ $10^{-3} Pa.s$, tandis qu'elle vaut $1.75 \times 10^{-3} Pa.s$ à 0°C.

7.4. Equation de Navier-Stokes

7.4.1. Démonstration et énoncé

Nous avons écrit précédemment (section 4.3.4) l'équation d'équilibre suivante, valable pour des matériaux solides ou fluides :

$$\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho (\underline{\underline{f}}^m - \underline{\underline{a}}) = \underline{\underline{0}}$$

L'accélération qui intervient dans cette équation peut être écrite en description eulérienne à partir de la dérivée particulaire de la vitesse :

$$\underline{\underline{a}} = \frac{d\underline{\underline{v}}}{dt} = \frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{v}}$$

Il vient donc l'équation d'équilibre suivante :

$$\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{f}}^m = \rho \left(\frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{v}} \right)$$

Considérons désormais la loi de comportement d'un **fluide newtonien** énoncé ci-dessus :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}}$$

On peut donc réécrire l'équation d'équilibre sous la forme :

$$\underline{\underline{\text{div}}}(-p \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}}) + \rho \underline{\underline{f}}^m = -\underline{\underline{\text{div}}}(p \underline{\underline{I}}) + \underline{\underline{\text{div}}}(2\mu \underline{\underline{d}}) + \rho \underline{\underline{f}}^m = \rho \left(\frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{v}} \right)$$

Les deux termes $\underline{\underline{\text{div}}}(p \underline{\underline{I}})$ et $\underline{\underline{\text{div}}}(2\mu \underline{\underline{d}})$ méritent d'être développés :

$$\underline{\underline{\text{div}}}(p \underline{\underline{I}}) = \frac{\partial p}{\partial x_j} \underline{\underline{e}}_j = \underline{\underline{\text{grad}}}(p)$$

$$\underline{\underline{\text{div}}}(2\mu \underline{\underline{d}}) = \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} \underline{\underline{e}}_i = 2\mu \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} \underline{\underline{e}}_i = 2\mu \underline{\underline{\text{div}}}(\underline{\underline{d}})$$

L'équation d'équilibre devient : $-\underline{\underline{\text{grad}}}(p) + 2\mu \underline{\underline{\text{div}}}(\underline{\underline{d}}) + \rho \underline{\underline{f}}^m = \rho \left(\frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{v}} \right)$

On peut enfin calculer le terme $\underline{\underline{div}}(\underline{\underline{d}})$ au vu de sa définition :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{\underline{v}} + \left(\underline{\underline{grad}} \underline{\underline{v}} \right)^T \right) \Rightarrow \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{d}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}} \underline{\underline{v}}) + \frac{1}{2} \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}} \underline{\underline{v}})^T$$

Le terme $\underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}} \underline{\underline{v}})$ se formule à partir du laplacien : $\underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{v}} = \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}} \underline{\underline{v}})$

Enfin, si on considère un fluide **incompressible** tel que $\underline{\underline{div}} \underline{\underline{v}} = 0$:

$$\left(\underline{\underline{grad}}(\underline{\underline{v}}) \right)^T = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \Rightarrow \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}}(\underline{\underline{v}}))^T = \frac{\partial \left(\underline{\underline{grad}} \underline{\underline{v}} \right)_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i = \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \underline{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \cancel{\underline{\underline{div}} \underline{\underline{v}}} \underline{e}_i = \underline{0}$$

On reformule donc l'équation d'équilibre de la façon suivante :

$$-\underline{\underline{grad}}(p) + \mu \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{v}} + \rho \underline{\underline{f}}^m = \rho \left(\frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{v}} \right)$$

Si l'on prend en compte le fait que dans la plupart des cas la seule force massique $\underline{\underline{f}}^m$ est l'accélération de la pesanteur $\underline{\underline{g}}$, on arrive enfin à **l'équation de Navier-Stokes** essentielle en mécanique des fluides :

Equation fondamentale 7-8

$$\rho \frac{d\underline{\underline{v}}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{v}} \right) = -\underline{\underline{grad}}(p) + \mu \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{v}} + \rho \underline{\underline{g}} : \text{équation de Navier-Stokes}$$

La démonstration qui vient d'être faite n'est bien entendu pas triviale pour un étudiant qui découvre la MMC, et il faudra surtout retenir le constat suivant

A retenir 7-1

L'équation de Navier-Stokes est la combinaison de **l'équation d'équilibre** d'un milieu continu, de la **loi de comportement d'un fluide newtonien** et de **l'incompressibilité** du fluide.

7.4.2. Utilisation

L'équation de Navier-Stokes est donc une équation **différentielle**, dont les inconnues sont le champ de **vitesse**s et la **pression**. On a donc 4 inconnues (les trois composantes du champ de vitesses $\underline{\underline{v}}(\underline{\underline{x}})$ et la pression $p(\underline{\underline{x}})$) pour une équation

vectorielle (donc trois équations)... en pratique, la condition d'incompressibilité du fluide $\text{div } \underline{v} = 0$ constitue la quatrième équation qui permet de résoudre le système.

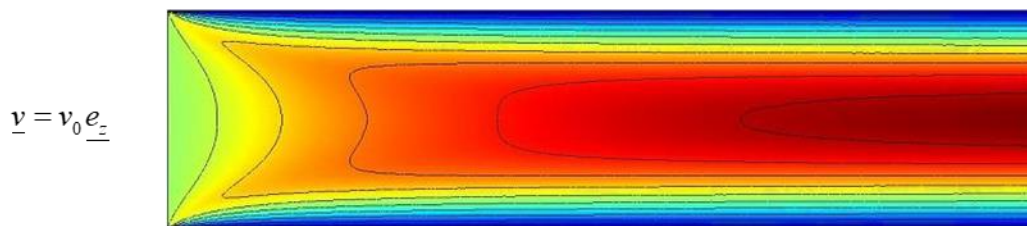
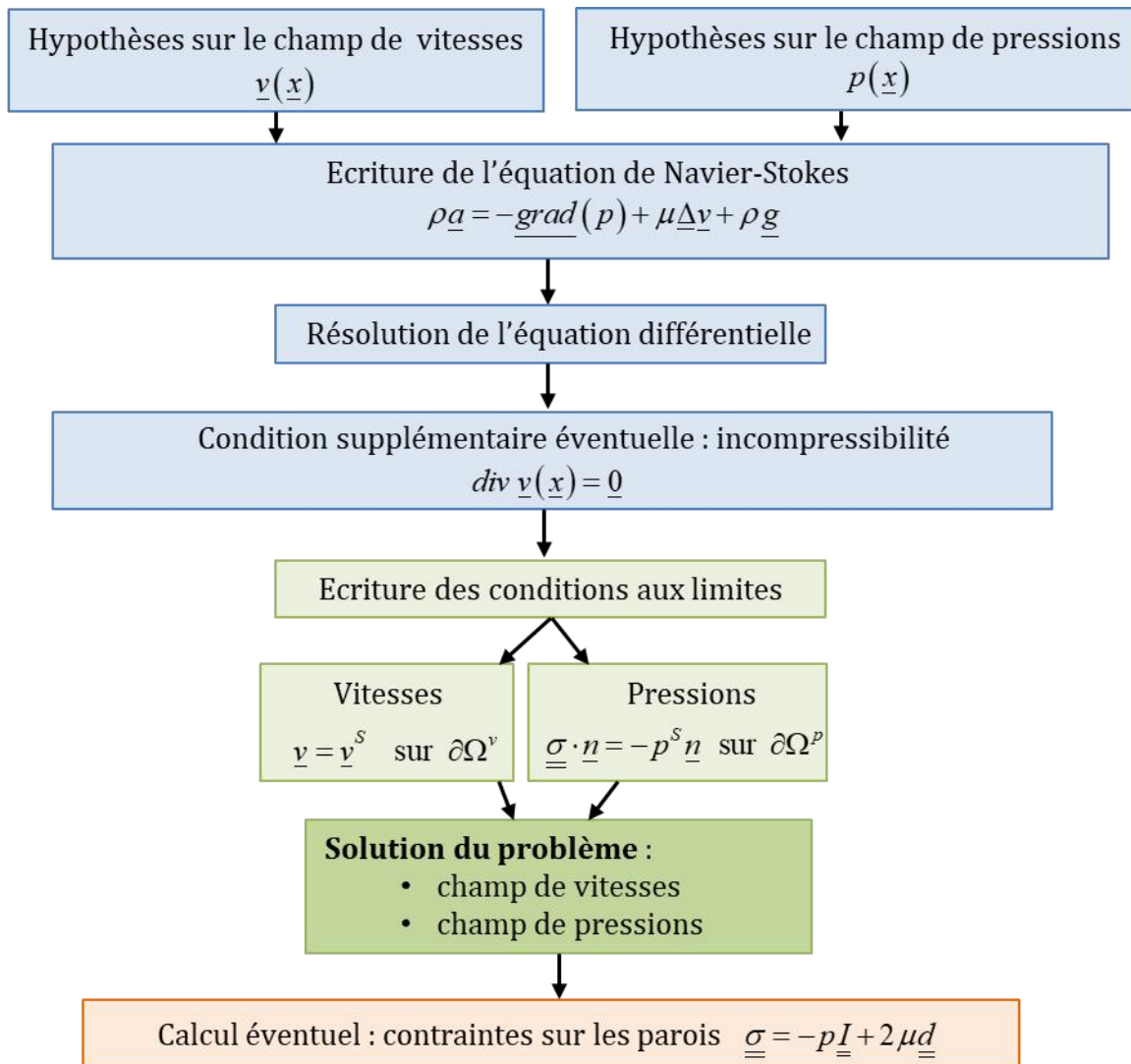
Oublions la rigueur mathématique un court instant : l'équation de Navier-Stokes peut être vue comme l'analogie de « *somme des forces = masse × accélération* », dans le sens où :

- $-\underline{\text{grad}} p$ correspond aux « forces de pression »
- $\mu \underline{\Delta} \underline{v}$ correspond aux « forces visqueuses »
- $\rho \underline{g}$ correspond aux « forces de pesanteur »
- $\frac{d\underline{v}}{dt} = \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\text{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right)$ correspond à l'accélération du fluide

L'équation de Navier-Stokes est non linéaire du fait de l'expression de l'accélération. La résolution de cette équation nécessite bien entendu des **conditions aux limites**, dont les formes les plus naturelles sont :

- une vitesse donnée au bord: $\forall \underline{x} \in \partial\Omega, \underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}^0(\underline{x})$
- une pression donnée en un point du bord : $p(\underline{x}^0 \in \partial\Omega) = p^0$

Une condition aux limites classiquement rencontrée est la condition **d'adhérence à la paroi**, qui stipule que $\forall \underline{x} \in \partial\Omega, \underline{v}(\underline{x}) = \underline{0}$. Cette condition est notamment illustrée en bas de la figure ci-dessous (Figure 42), présentant le schéma de résolution d'un problème de mécanique des fluides « classique ».



Exemple de l'écoulement « de Poiseuille » : norme du champ de vitesses

Figure 42 : Schéma de résolution d'un problème classique de mécanique des fluides

7.4.3. Résolution numérique : la CFD (Computational Fluid Dynamics)

Dans la méthode des **éléments finis** (abordée en section 6.3.5), l'idée est de **découper la matière** en éléments simples et d'en étudier les déformations : c'est une approche lagrangienne, qui paraît évidente en mécanique du solide.

En mécanique des fluides numériques (ou CFD en anglais), on va en général plutôt chercher à **découper l'espace** en petits volumes, et de faire des bilans sur chacun de ces volumes : c'est une vision eulérienne de la transformation, beaucoup plus adaptée à la mécanique des fluides. On utilise couramment deux approches (**méthodes des différences finies** et **méthode des volumes finis**) afin de résoudre les équations qui régissent le mouvement du fluide. L'approche générale peut se résumer comme suit :

- la géométrie du volume fluide, délimitée par des parois considérées rigides, est discrétisée en une *série finie de volumes élémentaires* (Figure 43)
- on renseigne les propriétés du fluide et les hypothèses (les équations qui gouvernent sa dynamique vont alors en découler) ainsi que les conditions initiales (pressions, vitesses, etc...) pour des cas transitoires
- les équations de la mécanique des fluides sont résolues pour chaque volume (les méthodes sont variées), et la détermination du champ de pression et de vitesse aux bords du volume sert de condition aux limites pour le volume voisin.

Cette méthode sera abordée davantage en 2^{ème} et 3^{ème} années, notamment pour des cas compressibles impliquant la présence de turbulence (Figure 43).

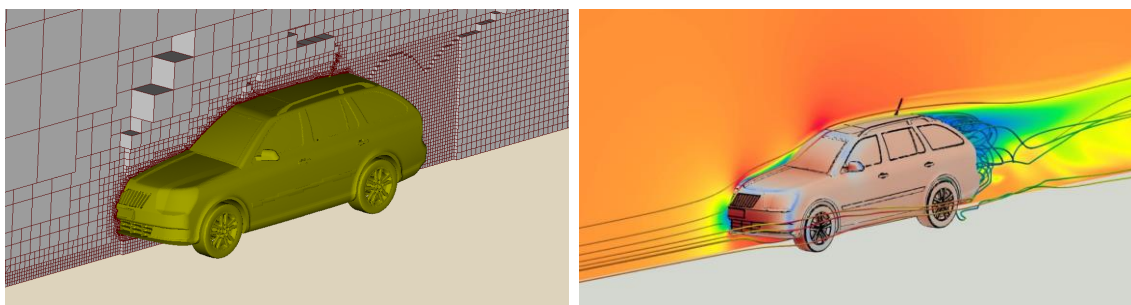


Figure 43 : Exemple de résolution de l'écoulement fluide autour d'un véhicule. A gauche : maillage du volume fluide, à droite : amplitude du champ de vitesses après résolution.

Résumé du CHAPITRE 7 : ce qu'il faut savoir

- ✓ **Définition et calcul d'une vitesse de déformation et de rotation**
- ✓ **Définition et calcul de la vorticité d'un fluide**
- ✓ **Loi de conservation de la masse et conservation du débit massique**
- ✓ **Loi de comportement d'un fluide newtonien : définition et utilisation**
- ✓ **Equation de Navier-Stokes : hypothèses, interprétation physique**

Résumé des notations utilisées

Nom	Notation	Unité SI	Commentaire / définition
Scalaire	a		Elément de $\mathbb{R}$
Vecteur	$\underline{a}$		Elément de $\mathbb{R}^3$
Tenseur d'ordre n	$\underline{\underline{A}}$ (n>2) $\underline{\underline{A}}$ (n=2)		Elément de $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^3$
Configuration de référence	K_0		Ensemble des points à $t = t_0$
Configuration actuelle	K_t		Ensemble des points à t
Vecteur déplacement	$\underline{u}$	m	Différence entre la position d'un point dans K_0 et K_t
Vecteur vitesse (<i>eulérien</i>)	$\underline{v}$	$m \cdot s^{-1}$	Dérivée temporelle du déplacement
Gradient de la transformation	$\underline{\underline{F}}$	Sans unité	Tenseur mixte transformant un vecteur de K_0 dans K_t
Jacobien de la transformation	J	Sans unité	Déterminant de $\underline{\underline{F}}$: variation de volume
Tenseur des déformations de Green-Lagrange	$\underline{\underline{E}}$	Sans unité	Compare les produits scalaires dans K_0 et K_t (lagrangien)
Tenseur des déformations d'Euler-Almansi	$\underline{\underline{e}}$	Sans unité	Compare les produits scalaires dans K_0 et K_t (eulérien)
Tenseur des déformations linéarisé	$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Sans unité	Linéarisation de $\underline{\underline{E}}^{GL}$ en HPP
Tenseur de description eulérienne	$\underline{\underline{k}}$	s^{-1}	Gradient eulérien des vitesses
Tenseur vitesse de déformation eulérienne	$\underline{\underline{d}}$	s^{-1}	Partie symétrique de $\underline{\underline{k}}$
Tenseur vitesse de rotation	$\underline{\underline{\Omega}}$	s^{-1}	Partie antisymétrique de $\underline{\underline{\Omega}}$
Vecteur-contrainte (<i>eulérien</i>)	$\underline{t}$	$Pa = N \cdot m^{-2}$	Densité surfacique d'effort exercée par le complémentaire d'un milieu sur un milieu pour une facette donnée
Tenseur des contraintes de Cauchy	$\underline{\underline{\sigma}}$	$Pa = N \cdot m^{-2}$	« Contient » les projections de tous les vecteurs-contraintes pour toutes les facettes (<i>eulérien</i>)
Loi de comportement			Loi locale liant les contraintes, les déformations et la température d'un milieu
Module de Young	E	$Pa = N \cdot m^{-2}$	Lien entre une composante de $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en HPP et en élasticité linéaire
Coefficient de Poisson	ν	Sans unité	Lien entre déformation selon une direction et selon la direction transverse
Vorticité	$\underline{\underline{\omega}}$	s^{-1}	Rotationnel du champ de vitesses
Viscosité dynamique	μ	$Pa \cdot s$	Lien entre $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{d}}$ pour un fluide newtonien