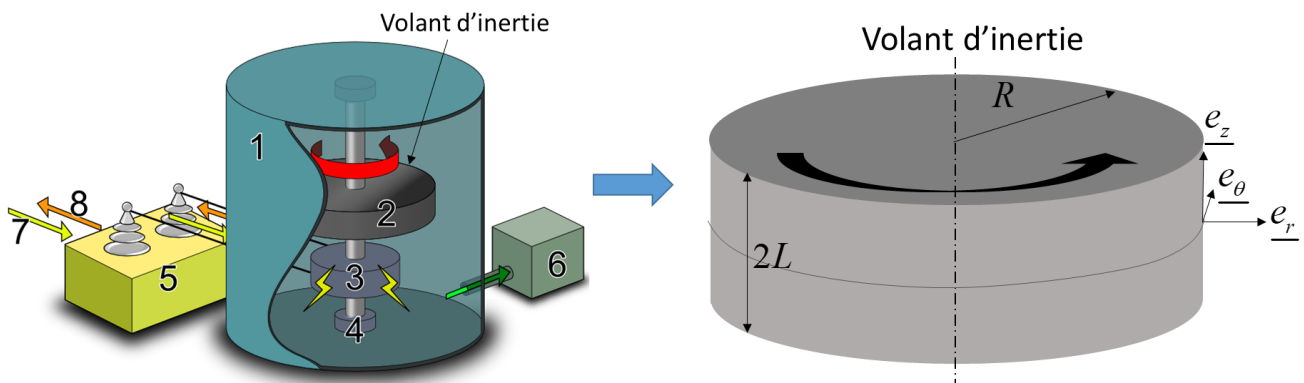


Mécanique des Milieux Continus (MMC) Etude des contraintes au sein d'un volant d'inertie

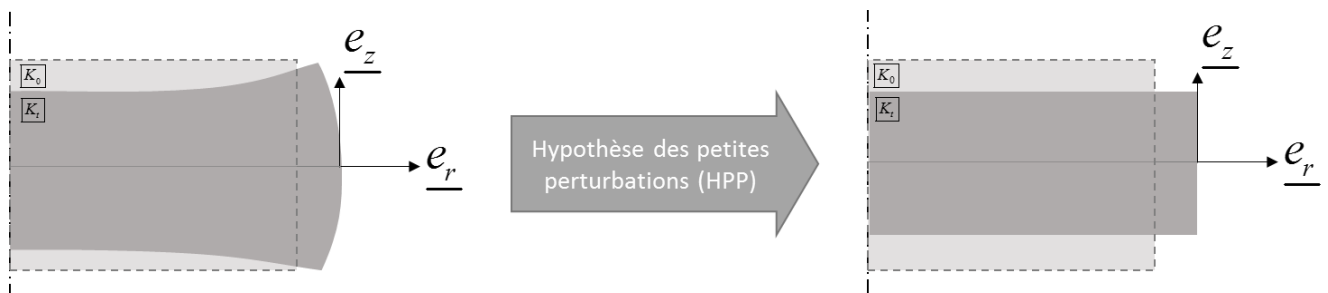
Test de janvier 2019 2h – aucun document autorisé

Un volant d'inertie et un système rotatif permettant le stockage et la restitution d'énergie cinétique. Il peut être utilisé (comme dans l'exemple ci-dessous) pour réguler ou lisser la production d'énergie électrique, en stockant l'énergie pendant de courtes durées en utilisant la rotation d'une masse importante. L'énergie stockée est d'autant plus grande que la masse du volant est importante et que la vitesse de rotation est grande : néanmoins une trop grande vitesse de rotation peut amener le matériau qui constitue le volant à sortir de sa limite d'élasticité en raison de contraintes trop importantes. On cherche ici à analyser les contraintes au sein du volant d'inertie en rotation.



On considère un volant cylindrique constitué d'un matériau homogène élastique, linéaire et isotrope d'épaisseur $2L$ et de rayon R , qui tourne à une vitesse Ω . Même si la forme que prend ce volant en rotation peut être a priori compliquée (figure ci-dessous), on se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations et on va considérer que la géométrie du volant reste cylindrique durant la transformation. Par conséquent, on fera l'hypothèse dans toute la suite que le champ de déplacements peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{u}(r, z) = u_r(r) \underline{e}_r + u_z(z) \underline{e}_z$$



On considère que le poids propre du volant est négligeable, et que le volant est soumis uniquement aux forces volumiques dues à sa rotation. L'équation d'équilibre pourra par conséquent s'écrire :

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \Omega^2 r \underline{e}_r = \underline{0}$$

1. A partir du champ de déplacements postulé précédemment, **calculer** le champ de déformations et **interpréter physiquement** chacune des composantes non nulles de ce champ. (/2)

2. Calculer le champ de contraintes au sein du volant (/1)

3. Dans le résultat précédent, à **quoi correspondent** les paramètres λ et μ ? En fonction de quelques autres paramètres sont-ils souvent calculés, et à quoi correspondent **physiquement** ces deux autres paramètres ? (/1)

4. A partir de la projection sur $\underline{e_z}$ de **l'équation d'équilibre** proposée précédemment, montrer que la composante u_z du champ de déplacements est sous la forme $u_z = Az$ avec A une constante. (/1)

5. A partir de la projection sur $\underline{e_r}$ de **l'équation d'équilibre** proposée précédemment, montrer que la composante u_r du champ de déplacements doit satisfaire l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} = B r \quad \text{avec } B \text{ une constante connue} \quad B = -\frac{\rho \Omega^2}{\lambda + 2\mu} \quad (/2)$$

6. La forme suivante est solution de cette équation différentielle :

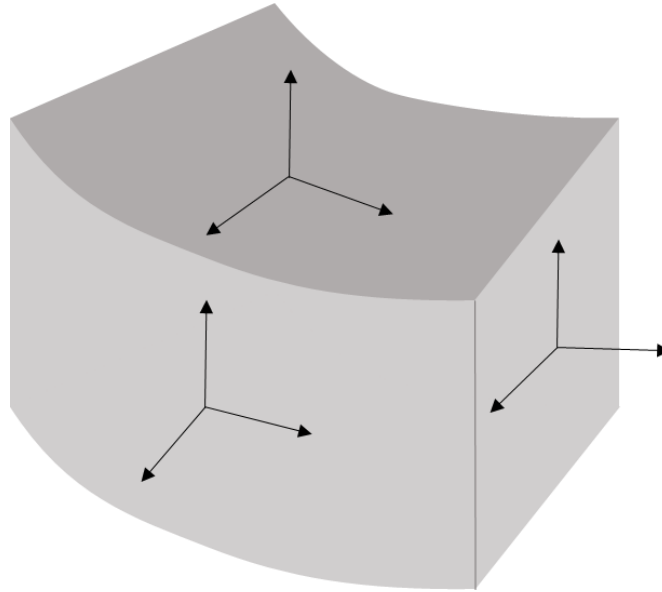
$$u_r = \frac{Br^3}{8} + \frac{C}{r} - \frac{Dr}{2} \quad \text{avec } C, D \text{ deux constantes et} \quad B = -\frac{\rho\Omega^2}{\lambda + 2\mu}$$

Montrer que la constante C est nécessairement **nulle**. (/1)

7. On trouve au final (tous calculs faits) un tenseur des contraintes du type :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{rr} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

Placer toutes les composantes du tenseur des contraintes $(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_{z\theta})$ sur la figure ci-dessous représentant un élément infinitésimal de matière en coordonnées cylindriques. Quel sera **le signe** des composantes non nulles $(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz})$ dans notre cas? **Pourquoi** ? (/2)



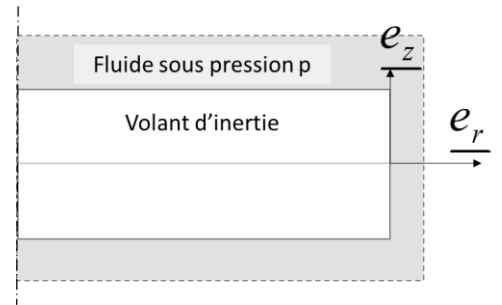
8. Les constantes A et D du champ de déplacement doivent être déterminées dans le champ de déplacement final suivant :

$$\underline{u} = \left(\frac{Br^3}{8} - \frac{Dr}{2} \right) \underline{e}_r + Aze_z \quad \left(B = -\frac{\rho\Omega^2}{\lambda + 2\mu} \text{ est une donnée du problème} \right)$$

A partir des conditions **de surfaces libres** sur les faces supérieures et inférieures du volant ($\underline{n} = \pm \underline{e}_z$) et sur sa surface latérale ($\underline{n} = \underline{e}_r$), **écrire** (sans les résoudre !)

les deux équations qui permettent de déterminer ces deux constantes. (/2)

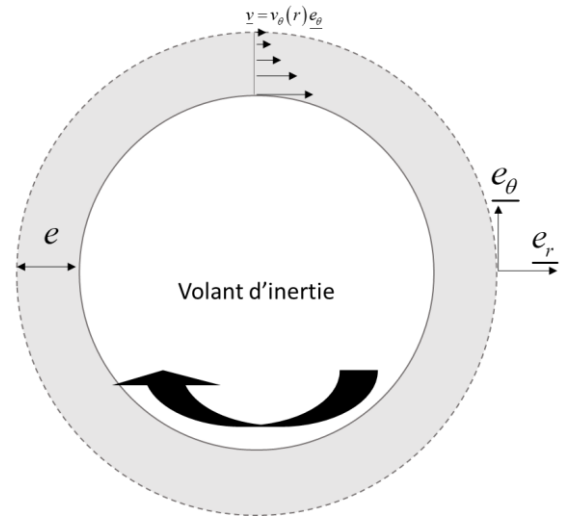
Afin de compenser les contraintes importantes dans le volant d'inertie qui risquent de l'endommager, on a l'idée de placer ce volant dans une enceinte contenant un fluide sous pression p .



9. Que deviennent **les deux conditions aux limites** écrites à la question précédente ?
Attention ! Le frottement du fluide va créer une contrainte tangentielle que l'on ne cherchera pas à déterminer ici. (/1)

Ce fluide va évidemment générer du frottement, ainsi que des contraintes de cisaillement à la surface du volant. On cherche dans la suite à **déterminer l'ordre de grandeur de ces contraintes** pour la surface latérale ($\underline{n} = \underline{e}_r$) du volant.

On considère donc un **cylindre en rotation** dans une enceinte contenant une épaisseur e de fluide sous pression p . L'écoulement est **stationnaire**, laminaire et **établi**, et le fluide est **newtonien incompressible**. On considère une **adhérence** parfaite du fluide aux parois, et des considérations physiques nous amènent à écrire un champ de pression $p(r, z)$ ainsi que le champ de vitesses au sein du fluide sous la forme $\underline{v} = v_\theta(r) \underline{e}_\theta$.



10. A partir de **l'équation de Navier-Stokes**, déterminer les équations qui régissent le champ de **vitesses** et de pressions au sein du fluide. (/2)

11. **Montrer** que la projection sur $\underline{e}_\theta$ de l'équation de Navier-Stokes admet pour solution un champ du type $v_\theta(r) = \frac{\alpha}{r} + \beta r$. (α et β deux constantes) (/1)

12. Comment déterminer les deux constantes α et β ? (**Ecrire les équations** sans les résoudre.)

13. Calculer la **contrainte due au fluide** au niveau de la paroi de normale $\underline{e}_r$ du volant d'inertie. (/1)

Au final, on vient de déterminer le champ de contraintes global sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \underline{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\sigma}^{rotation} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\sigma}^{fluide} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Evidemment, dans les solutions technologiques actuelles, on choisit plutôt de faire le vide dans l'enceinte du volant d'inertie afin de minimiser les forces de frottement, et ainsi de stocker l'énergie avec le meilleur rendement possible.

Formulaire

Déformation sous l'hypothèse des petites perturbations : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T)$

Taux de déformation : $\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}\left(\left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}\right)^T + \underline{\underline{grad}} \underline{v}\right)$

Vecteur-contrainte : $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$

Equation d'équilibre : $\underline{\underline{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho(\underline{f}^m - \underline{a}) = \underline{0}$

Loi de comportement du solide élastique linéaire :
$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \end{cases}$$

Loi de comportement d'un fluide newtonien : $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}}$

Equation de Navier-Stokes : $\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{Grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\nabla} p + \mu \underline{\Delta} \underline{v} + \rho \underline{g}$

Gradient d'un champ de scalaires en coordonnées cylindriques :

$$\underline{\underline{Grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \underline{e}_z$$

Gradient d'un champ de vecteurs en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Grad}} \underline{T} = & \frac{\partial T_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial T_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial T_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

Divergence d'un champ de vecteurs en coordonnées cylindriques :

$$\text{Div} \underline{T} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r T_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T_z}{\partial z}$$

Divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2 en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Div}} \underline{\underline{T}} = & \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \right) \underline{e}_r + \\ & \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{\theta r} + T_{r\theta}) + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \right) \underline{e}_\theta + \\ & \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{zr} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \underline{e}_z \end{aligned}$$