

Fondements Mathématiques

Le père fondateur :



Les « Éléments » d'Euclide :

LA METHODE :

- Axiomatique,
- Logique :
- Hypothèse A
- Conclusion B
- Théorème : $A \rightarrow B$

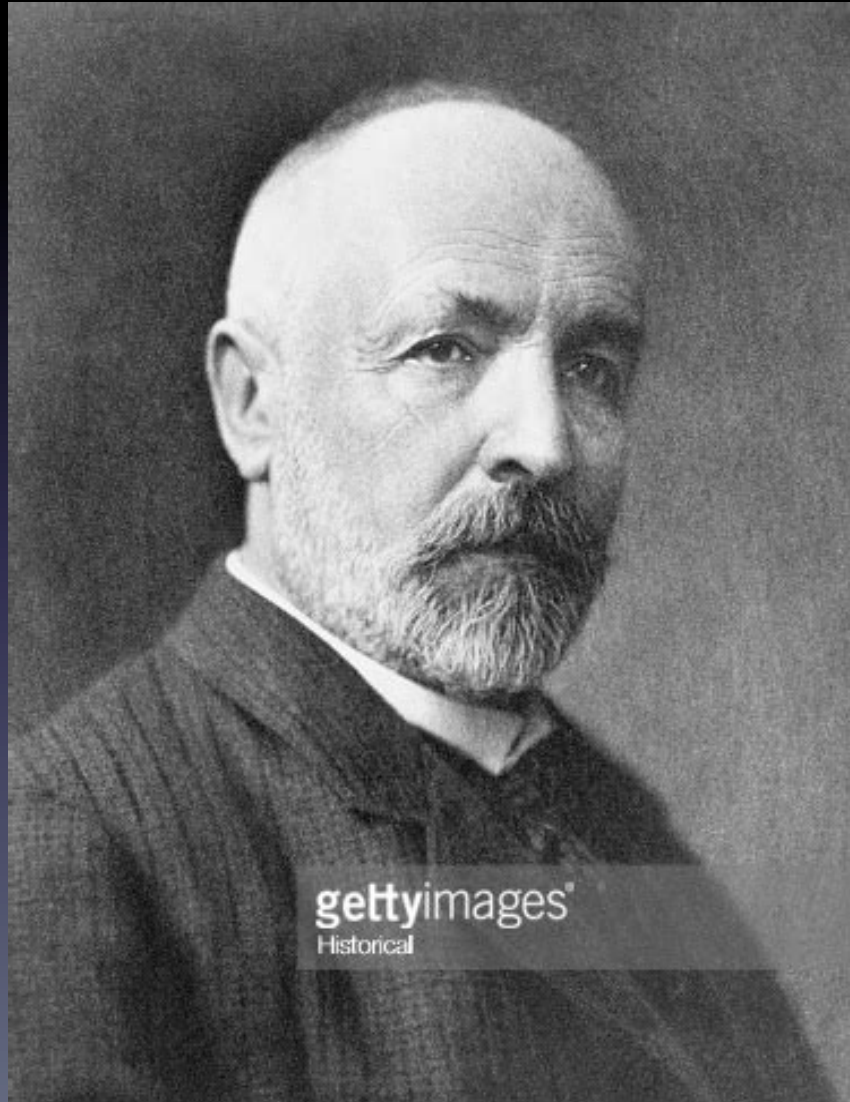
LES OBJETS :

- Les nombres (arithmétique)
- Points, droites, triangles,...
(géométrie)

Problème de fondement : C'est quoi, un nombre ?

- On peut donner des exemples de nombres :
1, 2, -1, $\sqrt{2}$, pi, e, ...
- Mais comment *définir* un nombre (naturel, entier, réel) quelconque ?

« La solution » au 19-e siècle :



Georg Cantor :

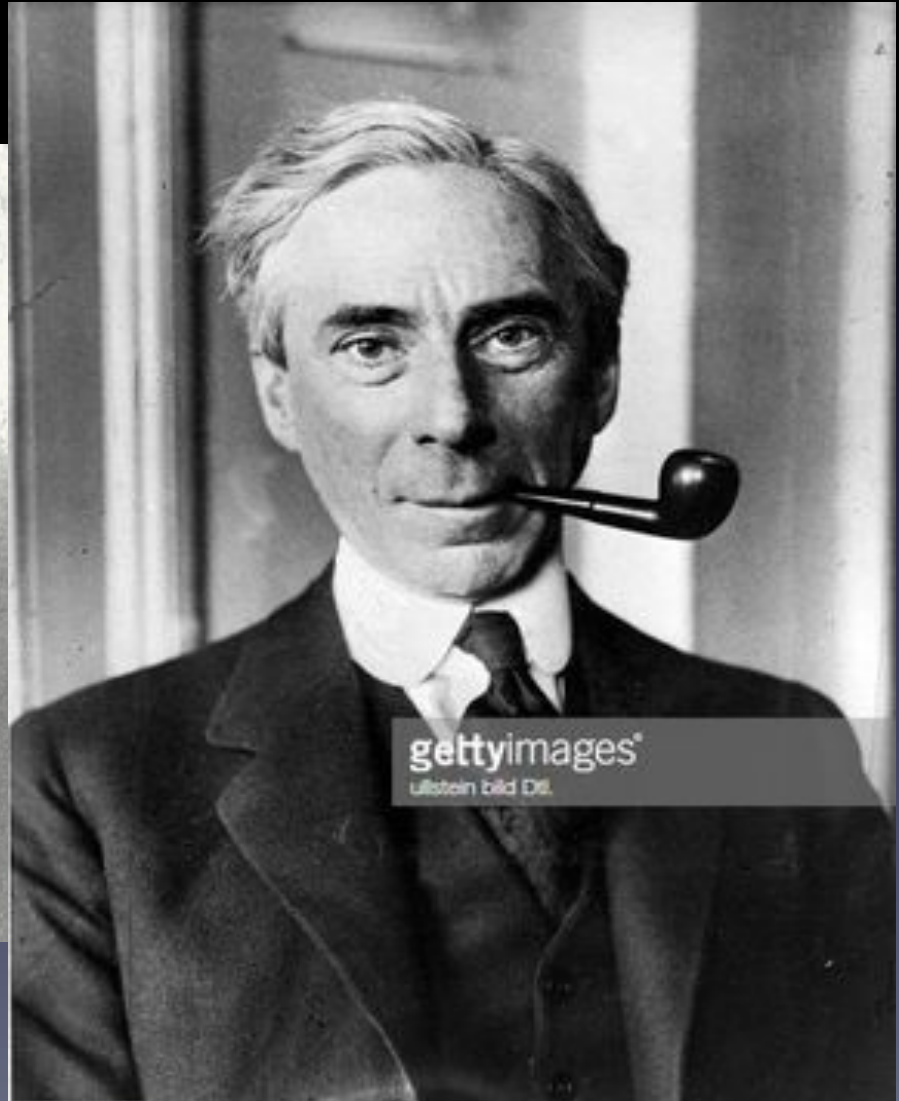
La théorie des ensembles

- Théorie universelle fondatrice de toutes les maths modernes
- Attention : distinguer ensembles finis et infinis !
- Théorie simple (naive) : ensembles finis
(première partie du cours)

Giuseppe Peano : axiomes de l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres naturels

- $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$
- On ne peut pas donner de liste de tous les nombres naturels (l'ensemble est infini) !
 - – alors, que signifient les « ... » ?
- Réponse précisée par les « axiomes de Peano »

Histoires d'infini



« L'Hôtel de Hilbert »

- Un hôtel a des chambres numérotés par les nombres naturels : no.1, no. 2, etc.
- L'hôtel est complet ce soir...
- Il arrive un car rempli de 40 touristes. Le chef d'hôtel les accueille bras ouverts et les loge tous en chambre individuelle...

« Le paradoxe de Russell »

- Version moderne du très ancien « paradoxe du menteur » : *un homme dit « je mens en ce moment ».*
- Vrai ou faux ?
- ... absurde dans les deux cas !
- Il s'agit ici d'un vrai problème de logique, et non d'un banal tour de passe-passe !

Les maths modernes



Le groupe Bourbaki : « Éléments de mathématique »

- « Structures » : hiérarchie d'objets mathématiques
- Groupes ...
- Anneaux ...
- Corps ...
- Espaces vectoriels... : les maths de Licence !

Alexandre Grothendieck et les catégories

- Plus important encore que les ensembles : les fonctions, ou applications $f : A \rightarrow B$
- Grande partie du cours : apprendre le langage des fonctions et applications
- Approche moderne « catégorielle » : donner la priorité aux « morphismes » (les « flèches »)

Début - Fin

Point de départ :

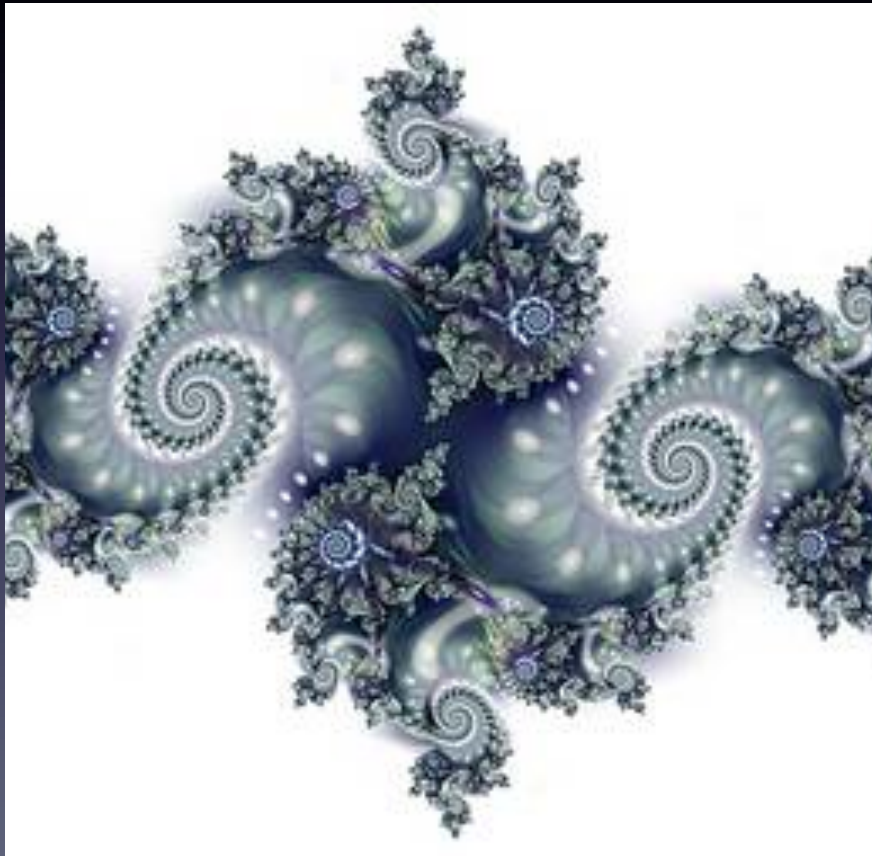
- Les axiomes (ce que nous acceptons ; ce qui est hors de doute)

Où on va :

- Le monde mathématique :
les nombres et la géométrie
sont à la base de toute
science exacte et
d'innombrables
applications

Le monde mathématique

Où vit cet animal ?



L'univers, est-il plat ?

