

UE 111 Fondements Mathématiques -
Examen de seconde session (19/06/2019, 9 h – 11 h, A 12, A 13)

Documents et instruments électroniques interdits.

Toute réponse doit être soigneusement justifiée.

La lisibilité de la copie et la qualité de la rédaction sont des éléments essentiels dans l'appréciation générale.

Merci d'indiquer votre groupe de TD sur votre copie :

EI 1 (Mme. Geandier) ;

EI 2 (M. Maubon) ;

EI 3 (M. Bertram) ;

EI 4 (M. Calisti) ;

CPU (Mme. Kowalska) ;

MP (M. Ye).

Exercice 1.

1. Pour des propositions α, β, γ , démontrer la loi logique suivante :

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma).$$

(Indication : dresser les tables de vérité.)

2. Donner les définitions de :

$\leq$ est une *relation d'ordre partiel* sur un ensemble ;

$\leq$ est une *relation d'ordre total* sur un ensemble.

3. Montrer : si M est un ensemble muni d'une relation d'ordre total, alors pour tout $a, b, c \in M$, on a :

$$\min(a, \max(b, c)) = \max(\min(a, b), \min(a, c)),$$

où le *minimum (maximum)* de deux éléments est défini comme habituellement :

$\min(x, y) = x$ si $x \leq y$, $\min(x, y) = y$ si $y \leq x$,

$\max(x, y) = y$ si $x \leq y$, $\max(x, y) = x$ si $y \leq x$.

(Indication : distinguer des cas et faire un tableau. Pour fixer les idées, on pourra supposer que M est l'ensemble des nombres réels, muni de sa relation d'ordre total usuelle.)

Exercice 2.

1. (Questions de cours.) Donner les définitions d'une application *injective ; surjective ; bijective*. Donner la définition d'une *application réciproque* f^{-1} d'une application $f : A \rightarrow B$, ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une telle application réciproque.
2. Pour les applications suivantes, dire si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto x^3$$

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^3$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$$

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto x^3 \text{ (indication : commencer par résoudre, dans } \mathbb{C}, \text{ l'équation } x^3 = 1.$$

On pourra se servir de la décomposition polaire.)

Exercice 3.

1. (Question de cours.) Soit X et Y des ensembles finis.
 - quel est le cardinal de $X \times Y$?
 - combien y a-t-il d'applications de X vers Y ?
 - combien y a-t-il de bijections de X sur X ?
2. Soit $A = \{1, 2, 3\}$. Donner une liste explicite de toutes les applications bijectives $f : A \rightarrow A$.
3. On notera $x = (x_1, x_2)$ les éléments du plan $\mathbb{R}^2$. Soit

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \{1, 2, 3\} \text{ et } x_2 \in \{0, 1\}\}.$$

Dessiner la partie U du plan $\mathbb{R}^2$. Quel est son cardinal ? Combien y a-t-il d'applications bijectives $f : U \rightarrow U$?

4. (Question de cours.) Donner la définition d'une *partition d'un ensemble* M .
Montrer que les ensembles A_1, A_2, A_3 définis par $A_i := \{x \in U \mid x_1 = i\}$, forment une partition de U . Représentez la dans votre dessin du point 3.
5. Combien y a-t-il de bijections $f : U \rightarrow U$ qui fixent la partition du point précédent, i.e., telles que $f(A_1) = A_1$, $f(A_2) = A_2$, et $f(A_3) = A_3$?
6. Combien y a-t-il de bijections $f : U \rightarrow U$ qui préservent la deuxième coordonnée, i.e., telles que, si $y = f(x)$ pour $x \in U$, on ait $y_2 = x_2$?
7. Combien y a-t-il de bijections $f : U \rightarrow U$ qui sont compatibles avec la partition du point 4, dans le sens que, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ il existe $j \in \{1, 2, 3\}$ tel que $f(A_i) = A_j$?

Exercice 4. On pourra raisonner par récurrence dans les questions de cet exercice :

1. Décrire toutes les applications $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que
 $\forall n \in \mathbb{N} : f(n+1) = f(n) + 1$.
2. Décrire toutes les applications $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que
 $\forall m, n \in \mathbb{N} : f(m+n) = f(m) \cdot f(n)$.
3. Montrer que $\sum_{k=1}^n k \times k! = (n+1)! - 1$.

**UE 111 Fondements Mathématiques -
Examen (14/01/2019, durée : 2 heures)**

Documents et instruments électroniques interdits. Toute réponse doit être soigneusement justifiée. La lisibilité de la copie et la qualité de la rédaction sont des éléments essentiels dans l'appréciation générale.

Merci d'indiquer votre groupe de TD sur votre copie : EI 1 (Mme. Géandier) ; EI 2 (M. Maubon) ; EI 3 (M. Bertram) ; EI 4 (M. Calisti) ; CPU (Mme. Kowalska) ; MP (M. Ye).

Exercice 1.

1. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n + 1$ si n pair et $f(n) = n - 1$ si n impair. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair et $f(n) = \frac{n-1}{2}$ si n est impair. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, xy)$.

1. L'application f est-elle injective ?
2. Calculer $f^{-1}(\{0\} \times]0, +\infty[)$; l'application f est-elle surjective ?
3. Mêmes questions si $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ est définie par la même formule que ci-dessus. (Indication : montrer que si $x + y = s$ et $xy = p$, alors x et y sont solutions de $z^2 - sz + p = 0$; conclure.)

Exercice 3. Soit x_n appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence :

$$\prod_{k=0}^n (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=0}^n x_k.$$

Rappel de notation : $\prod_{i=0}^n a_i$ désigne le produit $a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ des nombres $a_0, \dots, a_n$.

Exercice 4. Soit $M := \{0, 1\}$ et $A_n := \{1, 2, \dots, n\}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (Question de cours.) Soit K_n l'ensemble de toutes les applications $f : M \rightarrow A_n$, et L_n celui de toutes les applications $h : A_n \rightarrow M$. Donner les formules exprimant $u_n := \text{card}(K_n)$, et $v_n := \text{card}(L_n)$, en justifiant votre réponse.
2. Pour $n = 1, \dots, 7$, faire un tableau des valeurs de u_n et de v_n . Quand a-t-on $\text{card}(K_n) = \text{card}(L_n)$? Montrer par récurrence : pour tout $n \geq 5$, on a

$$\text{card}(K_n) < \text{card}(L_n).$$

En déduire qu'il n'existe pas de bijection entre K_n et L_n , pour $n \geq 5$.

3. Soit K l'ensemble de toutes les applications $f : M \rightarrow \mathbb{N}$. Montrer que

$$\Phi : K \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad f \mapsto (f(0), f(1))$$

est une bijection.

4. Soit L l'ensemble de toutes les applications $h : \mathbb{N} \rightarrow M$. À une telle application h on associe l'ensemble $H := \{k \in \mathbb{N} \mid h(k) = 1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Montrer que

$$\Psi : L \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad h \mapsto H$$

est une bijection.

5. En utilisant des résultats du cours, conclure que K est dénombrable, tandis que L n'est pas dénombrable ; en déduire qu'il n'existe pas de bijection entre K et L .

Exercice 5.

1. (Question de cours.) Justifier, en invoquant les propriétés axiomatiques de $\mathbb{N}$, que l'application $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto s(x) = x + 1$ est injective, mais pas surjective.
2. Montrer qu'il existe plusieurs applications $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que $p \circ s = \text{id}_{\mathbb{N}}$. (Indication : pour définir les valeurs $p(x)$, distinguer les cas $x = 0$ et $x \neq 0$.) Montrer qu'une telle application p est toujours surjective, mais pas injective.
3. Montrer que parmi les applications $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que $p \circ s = \text{id}_{\mathbb{N}}$, il y a une unique qui est *croissante* par rapport à l'ordre naturel de $\mathbb{N}$.
4. Soit $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $p \circ s = \text{id}_{\mathbb{N}}$, et posons $f := s \circ p$.
 - Cette application, est-elle injective ? surjective ? Quelle est l'image $\text{im}(f)$?
 - Montrer que $f \circ f = f$ et que $f^3 = f$ (notation : $f^n = f \circ \dots \circ f$ (n fois)).
 - Montrer que f est croissante si p est croissante.
5. Soit $h := s^2 \circ p^2 = s \circ s \circ p \circ p$.
 - Quelle est l'image de l'application s^2 , et quelle est l'image de h ?
 - Montrer que $h \circ h = h$ et que $h^3 = h$.
6. Soit $g := s^n \circ p^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).
 - Quelle est l'image de g ?
 - Montrer que $g \circ g = g$.

UE 111 Fondements Mathématiques -
Examen partiel (16/11/2018, durée : 2 heures)

Documents et instruments électroniques interdits. Toute réponse doit être soigneusement justifiée. La lisibilité de la copie et la qualité de la rédaction sont des éléments essentiels dans l'appréciation générale.

Exercice 1. Pour des propositions α et β , donner les tables de vérité qui définissent les propositions $\alpha \Rightarrow \beta$ et $\alpha \Leftrightarrow \beta$, puis démontrer la loi logique suivante :

$$((\alpha \Leftrightarrow \beta) \wedge (\beta \Leftrightarrow \gamma)) \Rightarrow (\alpha \Leftrightarrow \gamma); \text{ autrement dit :}$$

Si $\alpha \Leftrightarrow \beta$ et $\beta \Leftrightarrow \gamma$, alors $\alpha \Leftrightarrow \gamma$.

(Indication : dresser la table de vérité en fonction des valeurs de vérité de α, β, γ .)

La réciproque de cette loi est-elle vraie ?

Exercice 2. Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E . Rappeler la définition du complémentaire U^c d'une partie $U \subset E$, et démontrer les propriétés

$$(U^c)^c = U, \quad E^c = \emptyset, \quad \emptyset^c = E,$$

puis démontrer les équivalences ou implications suivantes :

1. $(A \cup B = E) \Leftrightarrow (B^c \subset A)$;
2. $(A \cap B = \emptyset) \Leftrightarrow (A \subset B^c)$;
3. $((A \cup B \subset A \cup C) \text{ et } (A \cap B \subset A \cap C)) \Rightarrow (B \subset C)$;
4. $((A \cup B = A \cup C) \text{ et } (A \cap B = A \cap C)) \Rightarrow (B = C)$.

Exercice 3. Soit $f : A \rightarrow B$ une application. Pour chacun des items suivants, définir la propriété en utilisant les quantificateurs $\exists, \forall$, et donner un exemple d'application entre des ensembles finis vérifiant cette propriété.

1. f est surjective.
2. f n'est pas surjective.
3. f est injective.
4. f n'est pas injective.
5. f est bijective.
6. f n'est pas bijective.
7. f n'est ni injective ni surjective.

Exercice 4. Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de cardinal fini $n > 0$ et Y un ensemble ayant deux éléments (notés 0 et 1). Combien a-t-on d'applications de X dans Y ? Quelles sont les applications non surjectives ? En déduire le nombre d'applications surjectives de X dans Y .

Application : On range au hasard n boules, numérotées de 1 à n , dans trois tiroirs. Dans combien de cas exactement deux tiroirs seront occupés ? (On pourra d'abord regarder pour les tiroirs no. 1 et 2 et utiliser une application qui associe à une boule le numéro du tiroir où elle se trouve.)

Exercice 5. Soient E, F, G et H quatre ensembles, et $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$ trois applications. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors g est bijective.

Corrigé succinct du partiel du 16 / 11 / 2018 :

Exercice 1. 5 points

question préliminaire : cf. cours (1 pt)

Ensuite, on dresse la table de vérité de $(\alpha \Leftrightarrow \beta) \wedge (\beta \Leftrightarrow \gamma)$ en fonction des valeurs de vérité de α, β, γ (il y a 8 cas possibles : pour chacune parmi α, β, γ , les valeurs peuvent être 0 ou 1) ; puis la table de $((\alpha \Leftrightarrow \beta) \wedge (\beta \Leftrightarrow \gamma)) \Rightarrow (\alpha \Leftrightarrow \gamma)$: on constate que la valeur de vérité est 1 (vraie) dans tous les 8 cas ; cette propriété est donc toujours vraie : il s'agit d'une loi logique. Par contre, en utilisant les tables, on constate que la réciproque, i.e.,

$$(\alpha \Leftrightarrow \gamma) \Rightarrow ((\alpha \Leftrightarrow \beta) \wedge (\beta \Leftrightarrow \gamma))$$

n'est pas toujours vraie (4 pts).

Exercice 2. 7 points

$U^c = \{x \in E \mid x \notin U\}$, donc

$$(U^c)^c = \{x \in E \mid \neg(x \in U^c)\} = \{x \in E \mid \neg(\neg(x \in U))\} = \{x \in E \mid x \in U\} = U$$

$$E^c = \{x \in E \mid x \notin E\} = \emptyset,$$

$$\emptyset^c = \{x \in E \mid x \notin \emptyset\} = E. \text{ (1 pt)}$$

1. On démontre séparément les deux directions de cette équivalence (1,5 pts) :

“ $\Rightarrow$ ” : Soit $A \cup B = E$. Alors $B^c = E \setminus B = (A \cup B) \setminus B = A \setminus B \subset A$, donc $B^c \subset A$.

“ $\Leftarrow$ ” : Soit $B^c \subset A$. Alors, utilisant la loi de de Morgan, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \subset A^c \cap A = \emptyset$, donc $(A \cup B)^c = \emptyset$, et donc $A \cup B = E$.

2. Raisonnement analogue de celui du point précédent, ou bien :

remarquons que $A \cap B = \emptyset$ ssi $A^c \cup B^c = E$; il suffit donc de remplacer, au point précédent, A par A^c et B par B^c , puis on applique la loi de de Morgan. (1,5 pts)

3. Supposons que $((A \cup B \subset A \cup C) \text{ et } (A \cap B \subset A \cap C))$ est vrai, et montrons qu'alors $B \subset C$. Soit $x \in B$. Comme $(A \cup B \subset A \cup C)$, il s'ensuit que $x \in A$ ou $x \in C$. Or, si $x \in A$, alors aussi $x \in A \cap B$, et comme $(A \cap B \subset A \cap C)$, il s'ensuit que $x \in C$. Dans tous les cas, on aura donc $x \in C$. Donc $x \in B$ implique $x \in C$, et on conclut que $B \subset C$. (1,5 pts).

4. En échangeant les lettres B et C dans 3., on obtient que

$$(*) \quad ((A \cup C \subset A \cup B) \text{ et } (A \cap C \subset A \cap B)) \Rightarrow (C \subset B)$$

Supposons maintenant que $((A \cup B = A \cup C) \text{ et } (A \cap B = A \cap C))$. En utilisant 3., il s'ensuit que $B \subset C$; mais d'après (*), on a aussi $C \subset B$, donc $B = C$. (1,5 pts)

Exercice 3. 6 points Chaque formule logique vaut 0,5 pts :

$$1. \forall b \in B : \exists a \in A : b = f(a)$$

$$2. \exists b \in B : \forall a \in A : b \neq f(a)$$

$$3. \forall (a, a') \in A^2 : (f(a) = f(a') \Rightarrow a = a')$$

$$4. \exists (a, a') \in A^2 : (f(a) = f(a') \text{ et } a \neq a')$$

$$5. \forall b \in B : \exists! a \in A : b = f(a), \text{ i.e. :}$$

$$(\forall b \in B : \exists a \in A : b = f(a)) \wedge (\forall (a, a') \in A^2 : (f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'))$$

$$6. (\exists b \in B : \forall a \in A : b \neq f(a)) \vee (\exists (a, a') \in A^2 : (f(a) = f(a') \text{ et } a \neq a'))$$

$$7. (\exists b \in B : \forall a \in A : b \neq f(a)) \wedge (\exists (a, a') \in A^2 : (f(a) = f(a') \text{ et } a \neq a'))$$

Pour 1., 3. et 5., on peut citer comme exemple l'application $f = \text{id}_A$ avec $A = B = \{1, 2\}$; pour 2., 4. 6. et 7. l'application $f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$ telle que $f(1) = 1 = f(2)$ (où 2 n'a aucun antécédent, et 1 en a deux).

Remarque : ne cherchez pas des exemples compliqués ! Au contraire, quand on demande un exemple, il vaut mieux trouver un exemple le plus simple possible.

Exercice 4. 4 points

Il y a 2^n applications $f : X \rightarrow Y$ (pour chaque x_i il existe 2 choix : $f(x_i) = 0$ ou bien $f(x_i) = 1$; cela donne un arbre de décisions binaires à n étages). (1 pt)

L'image de f peut avoir cardinalité 1 ou 2 puisque $\text{im}(f)$ est une partie de Y . Si $\text{card}(\text{im}(f)) = 2$, alors forcément $\text{im}(f) = Y$, donc f est surjective. Ainsi f n'est pas surjective ssi $\text{card}(\text{im}(f)) = 1$, i.e., ssi f est constante. Comme il y a deux constantes possibles, cela donne 2 applications non surjectives : $f_1(x) = \text{const} = 0$ et $f_2(x) = \text{const} = 1$. Les autres $2^n - 2$ applications sont donc surjectives. (1 pt)

Soit $f : X \rightarrow \{1, 2, 3\}$ l'application qui associe à une boule x_i le numéro $f(x_i)$ du tiroir où elle se trouve. Dire que *exactement deux tiroirs sont occupés* veut dire que $\text{card}(\text{im}(f)) = 2$. Or, il existe exactement 3 parties $A \subset \{1, 2, 3\}$ de cardinal 2, à savoir $A = \{1, 2\}$ ou $\{2, 3\}$ ou $\{1, 3\}$. Dans la question précédente, on a vu qu'il existe exactement $2^n - 2$ applications f telles que $\text{im}(f) = \{1, 2\}$. Il en est de même pour les autres choix de A : il y a donc $3 \times (2^n - 2)$ applications $f : X \rightarrow \{1, 2, 3\}$ telles que $\text{card}(\text{im}(f)) = 2$. (2 points)

Exercice 5. 3 points

Supposons que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.

En particulier, $g \circ f$ est donc surjective. Il s'ensuit que g est surjective : en effet, pour tout $b \in G$, il existe $e \in E$ tel que $b = (g \circ f)(e) = g(f(e))$; si on pose $a = f(e)$, on a donc bien $g(a) = b$. (1,5 pts)

En particulier, $h \circ g$ est aussi injective. Il s'ensuit que g est injective : en effet, supposons $g(a) = g(a')$; cela implique que $h(g(a)) = h(g(a'))$, i.e., $(h \circ g)(a) = (h \circ g)(a')$, donc $a = a'$. Ainsi g est injective et surjective, donc bijective. (1,5 pts)