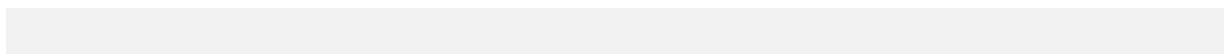


**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE  
D'ELECTRICITE ET DE MECANIQUE  
DE NANCY**

**PREMIERE ANNEE**

**TUTORATS  
&  
TRAVAUX PRATIQUES**

**MODELISATION, SIGNAUX ET SYSTEMES**

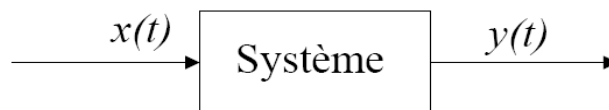




# Tutorat 1

## **SYSTEMES LINEAIRES ET INVARIANT PAR TRANSLATION ANALYSE SPECTRALE**

### 1. Linéarité et invariance par translation dans le temps



Soit un système S dont la réponse à une excitation  $x(t)$  est  $y(t)$

1) Le système S1 est défini par  $y = a x + b$

Le système S1 est-il linéaire ?

2) Le système S2 est défini par la relation

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \dots + a_n \frac{d^n y}{dt^n} = b_0 x + b_1 \frac{dx}{dt} + b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \dots + b_q \frac{d^q x}{dt^q}$$

Le système S2 est-il linéaire ?

---

### Éléments de correction

#### 1. Linéarité et invariance par translation dans le temps

1) soit S1 :

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow y(t) = ax(t) + b \\ x_1(t) &\rightarrow y_1(t) = ax_1(t) + b \\ x_2(t) &\rightarrow y_2(t) = ax_2(t) + b \\ x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) &\rightarrow y_3(t) = ax_3(t) + b = a(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) + b \end{aligned}$$

Si la fonction était linéaire  $y_{lin}(t)$  aurait pour expression :

$$y_{lin}(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \alpha(ax_1(t) + b) + \beta(ax_2(t) + b) \neq y_3(t)$$

→ donc le système S1 n'est pas linéaire

2) Linéarité : idem que 1) . Le système S2 est linéaire

## 2. Fonction porte

Calculer la transformée de Fourier d'une fonction porte de largeur  $T$  telle que :

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

On rappelle que la convolution d'une fonction porte par elle-même est :

$$y(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow y(t) = \Delta(t) \text{ telle que } \Delta(t) = \begin{cases} T-t & \text{si } |t| < T \\ 0 & \text{si } |t| > T \end{cases}$$

Quelle est la transformée de Fourier de  $\text{Tri}(t)$  ?

---

## Éléments de correction

### 2. Fonction porte

Calculer la transformée de Fourier d'une fonction porte de largeur  $T$  ?

$$P(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi ft} dt = \left[ \frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \right]_{-T/2}^{+T/2} = T \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

Calculer la transformée de Fourier de  $\text{Tri}(t)$  ? La transformée de Fourier d'un produit de convolution de deux fonctions et le produit des transformées de Fourier de ces fonctions

$$Y(f) = [X(f)]^2 = T^2 \left[ \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \right]^2$$

---

## 3. Analyse spectrale de signaux périodiques

3.1. Signal **carré** d'amplitude  $A$  et de fréquence  $f_0$  :

$$e(t) = \begin{cases} A, & \text{si } 0 < t \leq \frac{T}{2} \\ -A, & \text{si } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

- définition, pour une période  $[0, T]$  ( $T = 1/f_0$ ) :

$$e(t) = 4A \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{\sin[2\pi(2n+1)f_0 t]}{\pi(2n+1)}$$

- décomposition en série de Fourier :

- Donner l'amplitude et la fréquence du fondamental d'un signal carré de  $f_0 = 4$  kHz et  $A = 3$  volt. - Donner l'amplitude et la fréquence, : du 1<sup>er</sup> harmonique, du 2<sup>ème</sup> harmonique.

3.2. Signal **dent de scie** (amplitude  $A$ , fréquence  $f_0$ ) :

$$s_s(t) = 2A \frac{t}{T} - A$$

- définition, pour une période  $[0, T]$  ( $T = 1/f_0$ ) :

$$s_s(t) = 2A \sum_{n=1}^{n=+\infty} -\frac{\sin 2\pi n f_0 t}{\pi n}$$

- décomposition en série de Fourier :

3.3. Signal **triangulaire** (amplitude A, fréquence  $f_0$ ) :

$$s_{\Delta}(t) = \begin{cases} 4A \frac{t}{T} - A, & \text{si } 0 < t \leq \frac{T}{2} \\ -4A \frac{t}{T} + 3A, & \text{si } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

- définition, pour une période  $[0 \ T]$  ( $T=1/f_0$ ) :

$$s_{\Delta}(t) = 8A \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{\cos(2\pi(2n+1)f_0 t)}{\pi^2(2n+1)^2}$$

- décomposition en série de Fourier :

### Éléments de correction

1. Pour  $n = 0$  on obtient un signal sinusoïdal de fréquence  $f_0$  c'est donc le fondamental puisque sa fréquence est identique à celle du signal périodique. L'amplitude du fondamental est alors

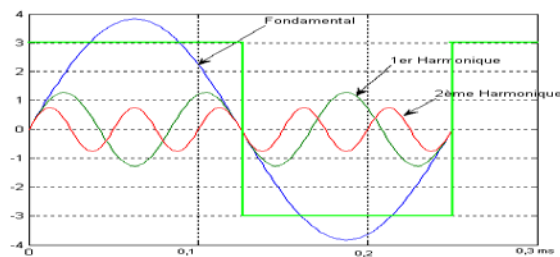
de  $\frac{4A}{\pi}$  soit 3,82 volts.

Pour  $n = 1$  on obtient un signal sinusoïdal de fréquence  $3f_0$  soit 12 kHz. C'est le premier

harmonique du signal rectangulaire. Son amplitude est alors de  $\frac{4A}{3\pi}$  soit 1,27 volts.

Pour  $n = 2$  on obtient un signal sinusoïdal de fréquence  $5f_0$  soit 20 kHz. C'est le deuxième

harmonique du signal rectangulaire. Son amplitude est alors de  $\frac{4A}{5\pi}$  soit 0,764 volts.



#### 4. Séparation de 2 fréquences

Problème : on transmet pendant un temps fini  $T$  un signal constitué d'un mélange de deux tonalités pures (sinusoïdales). A quelles conditions pourra-t-on identifier avec certitude les deux caractéristique du signal ?

Application pratique : tonalités DTMF( Dual Tone Multi Frequency) du téléphone.

On considère le signal à temps continu défini par

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = Ae^{j2\pi f_1 t} + Ae^{j2\pi f_2 t} \quad \text{tel que} \quad x_1(t) = Ae^{j2\pi f_1 t} \quad \text{et} \quad x_2(t) = Ae^{j2\pi f_2 t}$$

$f_1$  et  $f_2$  désignent 2 fréquences positives distinctes.

Soit  $y(t)$  le signal observé, égal à  $x(t)$  sur l'intervalle  $[-T/2, T/2]$  et nul partout ailleurs. La fenêtre d'observation peut être considérée comme une fonction porte tel que  $p(t) = 1$  si  $t \in [-T/2, +T/2]$  et nulle ailleurs :

$$y(t) = p(t) x(t) = p(t) (x_1(t) + x_2(t))$$

1) Calculer la transformée de Fourier  $Y(f)$  de  $y(t)$ .

Représenter le module du spectre  $|Y(f)|$  en fonction de  $f$ .

2) On fait maintenant varier la durée d'observation  $T$ .

Quelle est l'influence de cette durée d'observation  $T$  sur  $|Y(f)|^2$  ?

Sur le spectre  $|Y(f)|$  de  $y(t)$ , quelle est l'influence de la composante spectrale générée par le signal  $x_1(t)$  en  $f_2$  ou par le signal  $x_2(t)$  en  $f_1$  ?

3) Soit  $f_M = \frac{f_1 + f_2}{2}$  la fréquence moyenne .

Calculer  $P_M = |Y(f_M)|^2$  la puissance du signal à cette fréquence.

Déterminer la durée d'observation nécessaire pour que  $P_M$  soit inférieur à la moitié de la puissance minimale en  $f_1$  (et en  $f_2$ ).

---

### Éléments de correction

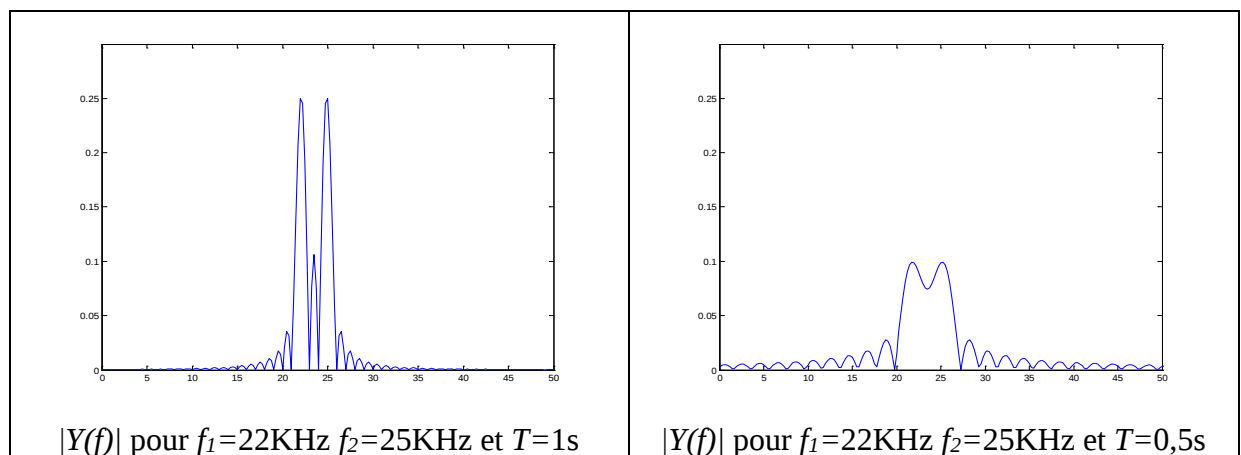
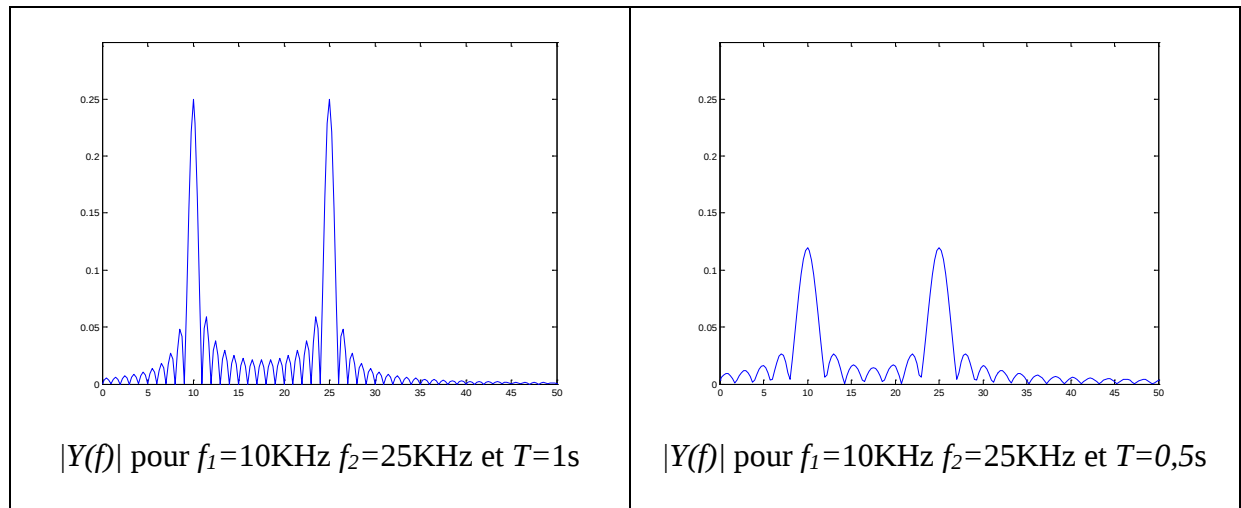
#### 3. Séparation de 2 fréquences

1) 
$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [p(t)(Ae^{j2\pi f_1 t} + Ae^{j2\pi f_2 t})] e^{-j2\pi f t} dt$$

$$Y(f) = \int_{-T/2}^{+T/2} (Ae^{j2\pi f_1 t} + Ae^{j2\pi f_2 t}) e^{-j2\pi f t} dt = AT \operatorname{sinc}(\pi T(f - f_1)) + AT \operatorname{sinc}(\pi T(f - f_2))$$

2) 
$$\operatorname{sinc} \pi T(f - f_1) = 0 \quad \text{quand} \quad \pi T(f - f_1) = \pm k\pi \rightarrow f = \frac{\pm k - Tf_1}{T}$$

$T$  influence la largeur des lobes des sinus cardinaux.



$$(Y(f_1))^2 = (AT)^2 + (AT)^2 [\text{sinc}(\pi T(f_1 - f_2))]^2 + 2(AT)^2 \text{sinc}(\pi T(f_1 - f_2)) \approx (AT)^2$$

et

$$P_1 = |Y(f_1)|^2 = (AT)^2$$

$$P_M = |Y(f_M)|^2 = [2AT \text{sinc}(\pi T(f_M - f_1))]^2 = 4(AT)^2 \left[ \text{sinc}\left(\pi T \left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)\right) \right]^2$$

On veut  $P_M < 1/2 P_1$ .

$$\frac{\sin\left(\pi T \left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)\right)}{\pi T \left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)} < \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

D'où

Il suffit de choisir  $T$  tel que 
$$T > \frac{4\sqrt{2}}{\pi(f_1 - f_2)}$$

#### 4.Problème : TELEMETRE A ULTRASONS

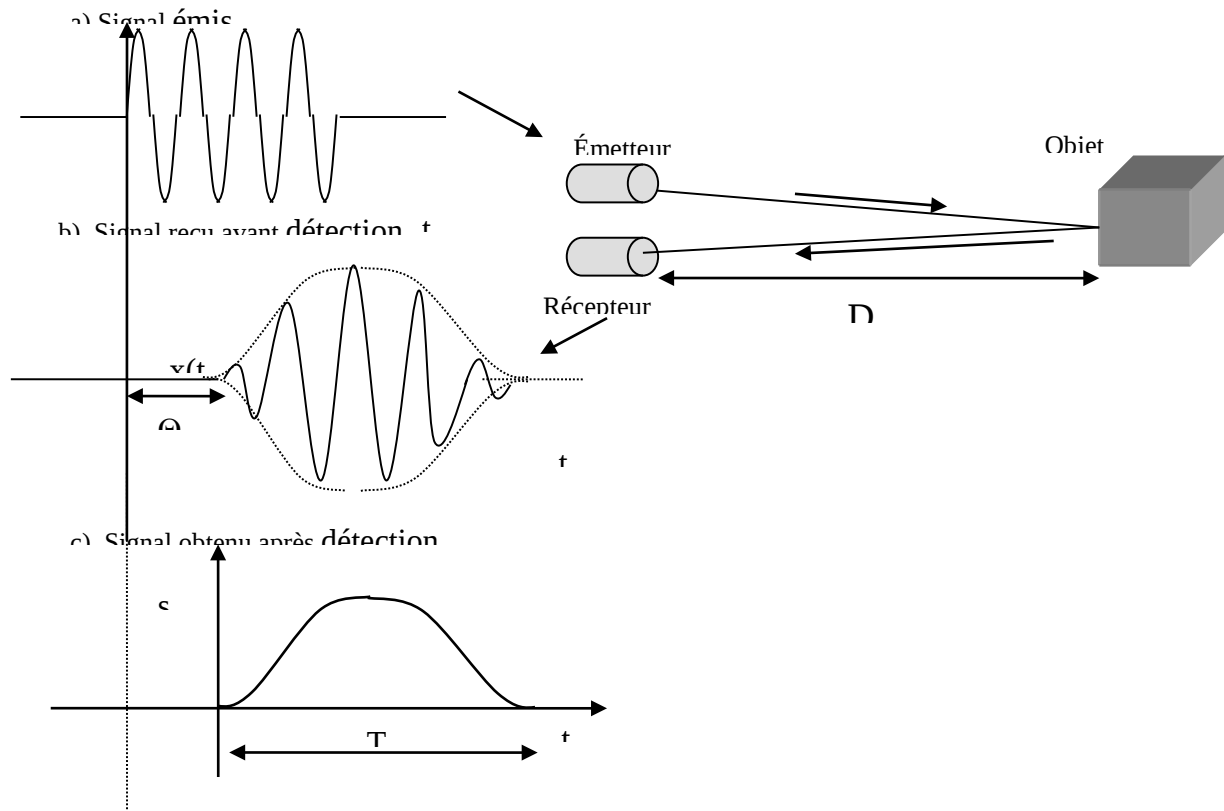


Figure 1

**Principe** : On veut mesurer la distance  $D$ , entre un objet et un télémètre. Ce dernier émet un train d'onde ultrasonore sinusoïdale de 40 kHz à l'instant  $t=0$ . L'enveloppe de la sinusoïde est rectangulaire. Ce train d'onde est réfléchi par l'objet et revient au télémètre où il est capté par un récepteur à bande étroite centrée sur 40 kHz. Il arrive au récepteur avec un retard  $\theta$  dû à la propagation de l'onde à la vitesse du son qui est de 330m/s. Le signal reçu est traité de telle sorte que l'on mesure l'enveloppe de celui-ci. Celle-ci a pour expression :

$$s(t) = A(D) \frac{1 - \cos \Omega(t - \theta)}{2} \quad \text{pour } t \text{ variant de } \theta \text{ à } T + \theta \text{ et nul ailleurs}$$

$\Omega = 2\pi/T$  avec  $T = 1\text{ms}$ .

- 1) Calculer  $\theta$ , pour une distance  $D$  de 5 m.
- 2) On désire mesurer cette durée  $\theta$ . On suppose cette distance constante pour tout l'exercice. Comme son amplitude varie avec la distance  $D$ , et que  $s(t)$  débute avec une pente très faible à l'instant  $\theta$ , on ne peut mesurer simplement cette durée. Pour cela, il faut un signal passant par zéro à un instant  $\theta + t_0$  indépendamment de l'amplitude  $D$ . On va donc utiliser la méthode suivante. On retarde le signal  $s(t)$  d'un temps  $\tau$  et l'on obtient le signal de mesure  $s_m(t)$  en soustrayant de  $s(t)$  sa valeur retardée de  $\tau$ , soit:
 
$$s_m(t) = s(t) - s(t - \tau)$$

2-1) Comment le choix de  $\tau$  influence l'allure de  $s_m(t)$  ? Quelle est la valeur optimale de  $\tau$  pour que la détection du passage par 0 (en  $t_o$ ) soit la plus facile ?

Pour ce qui suit, pour simplifier, on prendra comme origine des temps  $t = 0$ .

2-2) Calculer  $t_o$ , l'instant pour lequel  $s_m(t)$  passe par 0 par valeur décroissante. Montrer que  $s_m(t)$  n'a pas de composante continue.

$S(f)$  est la transformée de Fourier de  $s(t)$ . Son module est tracé sur la figure 2 pour les fréquences positives. Pour les fréquences supérieures à 2kHz, il a la forme d'ondulations positives d'amplitude décroissant en  $1/\omega^2$ . On appellera spectre utile l'ensemble des composantes spectrales supérieures au dixième de la composante maximale. Déterminer (sur le graphique) l'étendue du spectre utile.

2-3) Calculer  $S_m(f)$  la transformée de Fourier de  $s_m(t)$  en fonction de  $S(f)$ , celle de  $s(t)$ . Montrer que  $S_m(0) = 0$ .

2-4) Calculer le module de  $S_m(f)$  en fonction de celui de  $S(f)$ . Tracer sur la figure 2 ce module en fonction de la fréquence pour  $\tau = T/2$ .

2-5) Calculer l'étendue du spectre utile de  $s_m(t)$ .

**3)** Au lieu d'utiliser un signal retardé, on va utiliser le signal  $s_d(t)$ , obtenu par dérivation de  $s(t)$ .

3-1) Calculer  $t_o$ , l'instant pour lequel  $s_d(t)$  passe par 0 par valeur décroissante. Montrer que  $s_d(t)$  n'a pas de composante continue.

3-2) Calculer  $S_d(f)$  la transformée de Fourier de  $s_d(t)$  en fonction de  $S(f)$  celle de  $s(t)$ . Montrer que  $S_d(0) = 0$ .

3-3) Calculer le module de  $S_d(f)$  en fonction de celui de  $S(f)$ . Tracer sur la figure 3 ce module en fonction de la fréquence.

3-4) La dérivation est instable pour les hautes fréquences, on se contentera de dériver  $s(t)$  dans l'étendue de son spectre utile et de le multiplier par un gain de 1 au-delà. Montrer que le circuit de la figure 2 réalise cette fonction et calculer ses éléments.

**4)** Proposer un montage de détection d'enveloppe pour passer de  $x(t)$  signal reçu avant détection à  $S(t)$  après détection

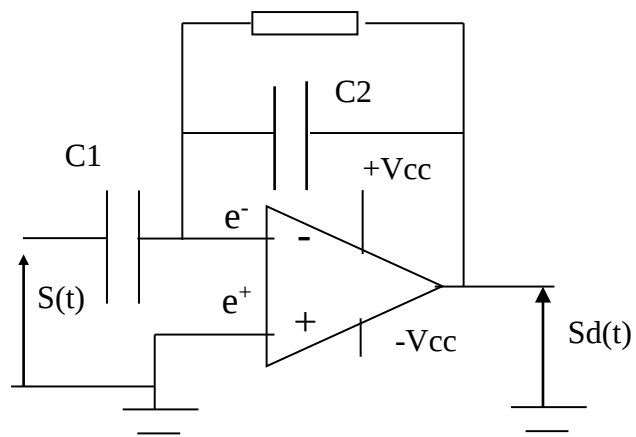


Figure 2

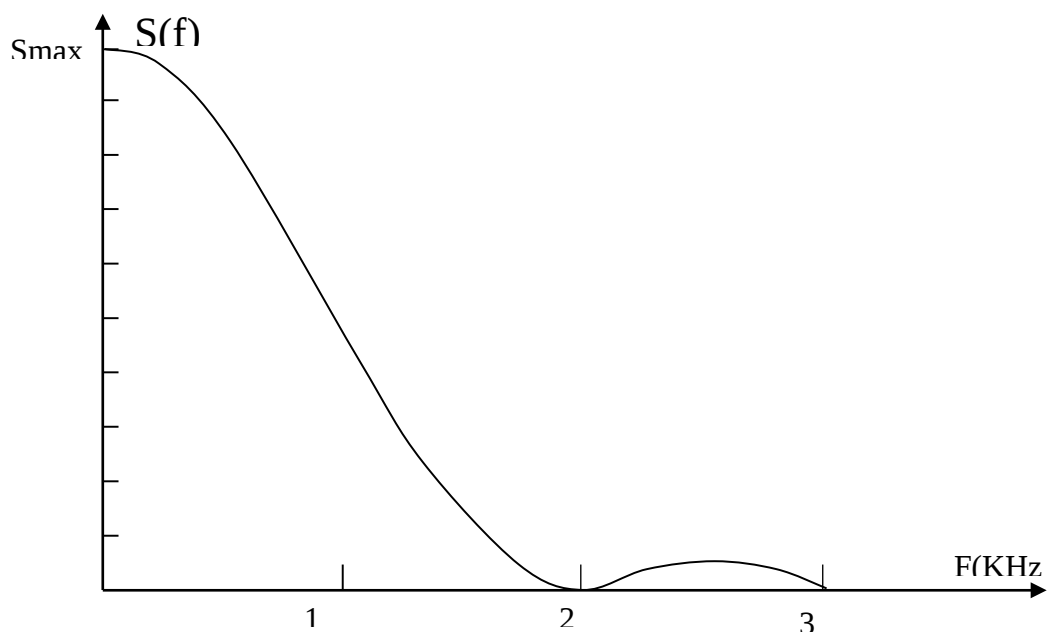


Figure 3

## Éléments de correction du télémètre à US

1) Calculer  $\theta$ , pour une distance  $D$  de 5 m.

$$V_{\text{propagation}} = \frac{\text{Distance}}{\text{Temps}} = \frac{2D}{\theta} = 0,03 \text{ s}$$

2-1)  $s(t) = A(D) \frac{1 - \cos \Omega(t - \theta)}{2}$  et  $s_m(t) = s(t) - s(t - \tau) = \frac{A(D)}{2} \sin \Omega(t - \frac{\tau}{2}) \sin \Omega(\frac{\tau}{2})$

La sensibilité au bruit est réduite quand  $s_m(t)$  est d'amplitude maximale, et le passage par 0 est plus facilement détectable.

→ Cette amplitude sera maximale si  $\frac{\Omega \tau}{2} = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \tau}{T}$  donc si  $\tau = \frac{T}{2}$

2-2) Calculer  $t_o$ , l'instant pour lequel  $S_m(t)$  passe par 0 par valeur décroissante

$$t_o = \frac{T}{2} + \frac{\tau}{2}$$

Montrer que  $S_m(t)$  n'a pas de composante continue :

$$\int_0^T s(t) dt = \int_{\tau}^{T+\tau} s(t - \tau) dt \quad , \quad \text{donc} \quad \int_0^{T+\tau} s_m(t) dt = \int_0^T s(t) dt - \int_{\tau}^{T+\tau} s(t - \tau) dt = 0 \quad , \quad \text{donc pas de composante continue.}$$

On appellera spectre utile l'ensemble des composantes spectrales supérieures au dixième de la composante maximale. Déterminer l'étendue du spectre utile.

$$S(f) = -A(D) \frac{\Omega^2}{2\pi f((2\pi f)^2 - \Omega^2)} e^{-j\pi f T} \sin(\pi f T) = -A(D) \frac{T \Omega^2}{2((2\pi f)^2 - \Omega^2)} e^{-j\pi f T} \text{sinc}(\pi f T)$$

qui a pour module :

$$|S(f)| = A(D) \frac{T \Omega^2 |\text{sinc}(\pi f T)|}{2|(2\pi f)^2 - \Omega^2|}$$

Valeur max de  $|S(f)|$  pour  $f=0$  :  $|S(f)| = \frac{A(D)T}{2}$

On cherche la fréquence utile pour laquelle  $S(f_u) = \frac{S(f_u)}{|S(f)|_{\max}} = \frac{1}{10}$ . D'après la courbe

$$S(f_u) = \frac{A(D)T}{20} \quad \rightarrow \quad f_u \approx 1,6 \text{ KHz}$$

2-2) Calculer  $S_m(f)$  la transformée de Fourier de  $S_m(t)$  en fonction de  $S(f)$ , celle de  $s(t)$ . Montrer que  $S_m(0) = 0$

$$TF[S(t - \tau)] = S(f) e^{-j2\pi f \tau} \Rightarrow TF[S_m(t)] = S(f)(1 - e^{-j2\pi f \tau})$$

2-3) Calculer le module de  $S_m(f)$  en fonction de celui de  $S(f)$ . Tracer sur la figure 2 ce module en fonction de la fréquence pour  $\tau = T/2$ .

$$S_m(f) = S(f)(1 - e^{-j2\pi f \tau}) \quad \text{et son module vaut} \quad |S_m(f)| = 2|S(f)| |\sin(\pi f \tau)|$$

2-4) Déterminer l'étendue du spectre utile de  $s_m(t)$ . Elle est du même ordre de grandeur soit  $f_u \approx 1,6 \text{ KHz}$

3) Au lieu d'utiliser un signal retardé on va utiliser le signal  $s_d$ , obtenu par dérivation de  $s(t)$ .

3-1 Calculer  $t_o$ , l'instant pour lequel  $s_d(t)$  passe par 0 par valeur décroissante. Montrer que  $s_d(t)$  n'a pas de composante continue

$$s(t) = A(D) \frac{1 - \cos(\Omega t)}{2} \quad \text{donc} \quad s_d(t) = A(D) \frac{\Omega}{2} \sin(\Omega t)$$

$$s_d(t) = 0 \text{ pour } t_o = \frac{T}{2} \text{ de plus } \int_0^T s_d(t) dt = 0 \text{ car } \int_0^T \sin(\Omega t) dt = 0$$

3-2 Calculer  $S_d(f)$  la transformée de Fourier de  $s_d(t)$  en fonction de  $S(f)$ . Montrer que  $S_d(0) = 0$ .

2 méthodes possibles

a) utiliser des formules établies  $TF[s_d(t)] = j2\pi f S(f)$

$$|S_d(f)| = A(D) \frac{|\sin(\pi f T)| \Omega^2}{|(2\pi f)^2 - \Omega^2|}$$

donc

$$S_d(f) = A(D) \frac{\Omega}{2} \int_0^T \sin(\Omega t) e^{-j2\pi f t} dt$$

b) refaire le calcul complet

3-4 La dérivation est instable pour les hautes fréquences, on se contentera de dériver  $s(t)$  dans l'étendue de son spectre utile et de le multiplier par un gain de 1 au-delà de la fréquence la plus élevée de celui-ci. Montrer que le circuit de la figure 2 réalise cette fonction et calculer ses éléments.

Fonction de transfert :

$$\frac{S_d(j\omega)}{S(j\omega)} = -\frac{RC_1 j\omega}{1 + RC_2 j\omega}$$

Gain, dans les basses fréquences ( $RC_2 j\omega \ll 1$ )

$$\left| \frac{S_d(j\omega)}{S(j\omega)} \right| \approx -RC_1 j\omega$$

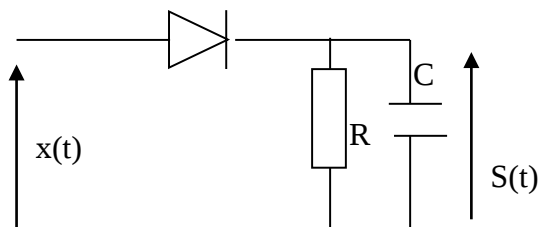
: montage dérivateur

Gain, dans les hautes fréquences ( $RC_2 j\omega \gg 1$ )

$$\left| \frac{S_d(j\omega)}{S(j\omega)} \right| \approx \frac{C_1}{C_2}$$

constante indépendante de  $f$

3-4 Proposer un montage de détection d'enveloppe pour passer de  $x(t)$  signal reçu avant détection à  $s(t)$  après détection



Le montage suivant est un détecteur de crête

$$s(t) = \left[ E \left( \frac{1}{\pi} + \frac{\sin \omega t}{2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos(2n\omega t)}{\pi(2n+1)(2n-1)} \cdot \frac{Rd}{1 + jRdCd 2n\omega} \right] \cdot A(D) \frac{1 + \cos \Omega(t-\theta)}{2}$$

Le couple  $RdCd$  est un filtre passe bas  $H(j\omega) = \frac{Rd}{1 + jRdCd \omega}$  il permet de couper les hautes fréquences qui ont subi un redressement mono-alternance.

## Tutorat 2

### FILTRE PASSE BAS POLYNOME DE BUTTERWORTH

L'objectif de ce tutorat sur le filtrage est de déterminer la fonction de transfert d'un filtre de Butterworth qui convient à un gabarit fixé par le cahier des charges utilisateur et de l'implanter dans une structure à base d'amplificateurs opérationnels.

#### Rappels sur le Filtre passe-bas de Butterworth

Il s'agit du filtre possédant la courbe de réponse la plus plate à l'origine. Soit  $f_0$  la fréquence de

$$F = \frac{f}{f_0} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

coupure du filtre à  $-3\text{dB}$ . On définit la fréquence réduite

La courbe de réponse en amplitude est notée  $A(F)$  ( $\sim$  la réponse fréquentielle).

$A^2(F)$  est appelée fonction de transfert en puissance

La fonction de transfert en puissance d'un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre  $n$  (avec  $F$  réduite comme ci-dessus) est définie par :

$$A^2(F) = \frac{1}{1 + F^{2n}}$$

#### I. Fonction de transfert

Considérons un gabarit donné figure 1 suivante

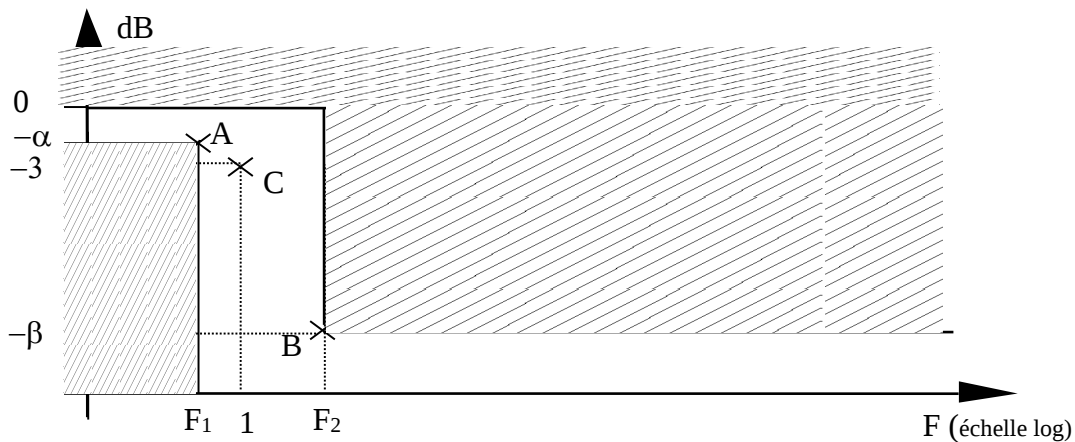


Figure 1 : Gabarit.

Ce gabarit traduit un cahier des charges de type :

Pour les fréquences  $f \in [0, F_1]$ , le filtre doit atténuer l'entrée de moins de  $\alpha$  dB

Pour les fréquences  $f \in [F_2, \infty]$ , le filtre doit atténuer l'entrée de plus de  $\beta$  dB

*Remarque : Le point C (1, -3dB) appartient nécessairement à la courbe d'atténuation  $A(F)$  défini comme ci-dessus. En effet pour  $F=1$ , quel que soit  $n$  on a :*

$$|A(F)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Or  $10 \log(A^2(F)) = 10 \log(1/2) = -10 \log(2) = -3 \text{ dB}$

Soit une atténuation de  $-3 \text{ dB}$ .

I.1) L'objectif est de déterminer le filtre de Butterworth qui respecte le gabarit imposé :  
(l'ordre du filtre et ses pôles, sa fonction de transfert).

Ordre :

$$n = \frac{1}{2} \frac{\log(10^{\frac{\beta}{10}} - 1)}{\log(F_2)}$$

On peut écrire :  $\beta = 10 \log(1 + F_2^{2n})$  soit

Cette condition nous donne une valeur réelle pour  $n$ . On prendra évidemment la valeur entière immédiatement supérieure à la valeur calculée.

Application numérique :  $f_0 = 1 \text{ KHz}$

Point A :  $F_1 = 0,84$     -1 dB     $\alpha = 1 \text{ dB}$   
 Point B :  $F_2 = 3,17$     - 40 dB     $\beta = 40 \text{ dB}$   
 Point C :  $F_2 = 1$     - 3 dB

Donc  **$n=4$**

La réponse fréquentielle  $A(F)$  est donc entièrement déterminé par le calcul de  $n$ .

I.2) Calculer la fonction de transfert  $H(j\omega)$  tel que  $|A(F)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega)$

Pour décomposer  $|A(F)|^2$  en  $H(j\omega)H(-j\omega)$ , il faut décomposer en éléments simples le dénominateur de  $H(j\omega)H(-j\omega)$ . La solution ne sera trouvée que dans l'ensemble des

nombre complexes. On pose  $p = j\frac{\omega}{\omega_0} = jF$ , donc  $F = -jp$

Il reste désormais à identifier la fonction de transfert  $H(p)$ , en régime harmonique en posant

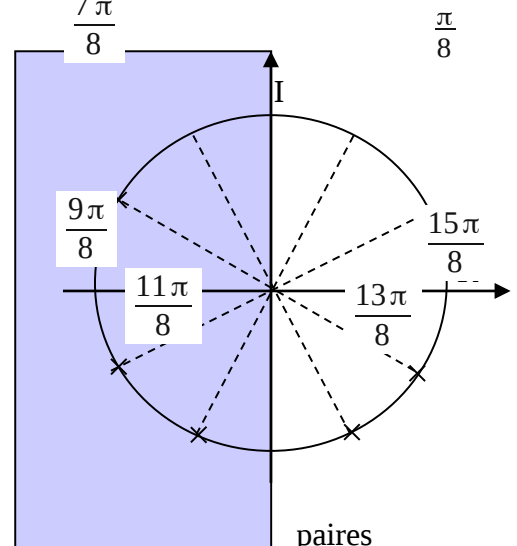
$$|H(p)|^2 = H(p)H(-p) = [A(F)]^2 = \frac{1}{1 + (-jp)^{2n}}$$

Les pôles de  $H(p)H(-p)$  sont donc solutions de l'équation :

$$1 + (-jp)^{2n} = 0 \Rightarrow p_k = e^{j\left(\frac{\pi + 2k\pi}{8}\right)}$$

$$H(p)H(-p) = \frac{1}{(p-p_0)(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_7)} \quad \text{avec}$$

$$p_k = \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{8}\right) + j \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{8}\right)$$



Les solutions sont les racines d'ordre 8 de  $(-1)$ . On obtient 4 paires de pôles conjugués. Il faut remarquer que les pôles déterminés sont ceux de  $H(p)$  et de  $H(-p)$ . On ne gardera pour  $H(p)$  que les paires de pôles à partie réelle négative qui correspondent à un montage stable.

Remarque:

$\frac{1}{p-a}$  à pour transformée de Laplace inverse  $e^{at}$  avec  $t$  le temps  
 si la partie réelle de  $a > 0$ , la réponse temporelle du système diverge, il n'est pas stable  
 si la partie réelle de  $a < 0$  la réponse du système pour ce pôle converge vers 0 il est stable

I.3) Mettre la fonction de transfert sous la forme de 2 fonctions de transfert du second ordre. Les filtres réalisés à partir de composants de base analogique sont d'ordre 1 ou 2. En regroupant les paires de pôles conjugués deux à deux, on obtient 2 fonctions de transfert d'ordre 2 à coefficients réels.

$$H(p) = \frac{1}{(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)(p-p_5)} = \frac{1}{(p-p_2)(p-p_5)} \times \frac{1}{(p-p_3)(p-p_4)} = H_1(p) \times H_2(p)$$

Rappel : La fonction de transfert des filtres du second ordre d'un filtre passe bas de gain

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

unitaire et de paramètres  $\omega_0$  et  $\xi$  est :

Un filtre de Butterworth d'ordre pair peut donc être obtenu par la mise en cascade de cellules d'ordre 2. Toutes ces cellules ont la même fréquence de coupure  $f_0$ . Chaque cellule possède un coefficient d'amortissement respectivement  $\xi_1$  et  $\xi_2$  lié à la paire de pôles qui la caractérise.

Donner les deux fonctions de transfert en régime harmonique et les valeurs des deux facteurs d'amortissement  $\xi_1$  et  $\xi_2$  correspondant respectivement à  $H_1(j\omega)$  et à  $H_2(j\omega)$

## II Étude de la fonction de transfert du second ordre

Une structure à contre réactions multiples est capable de réaliser un filtre analogique du second ordre répondant à la fonction de transfert suivante:

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + 2\xi j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Calculer le module  $|H(j\omega)|$  de  $H(j\omega)$

Calculer le maximum  $|H(j\omega)|_{\max}$  et la pulsation correspondante  $\omega_{\max}$ . Discussion en fonction de  $\xi$  et  $\omega_0$

### Solution

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = 2K \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\left[1 - 2\xi^2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]}{\left(\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^{3/2}}$$

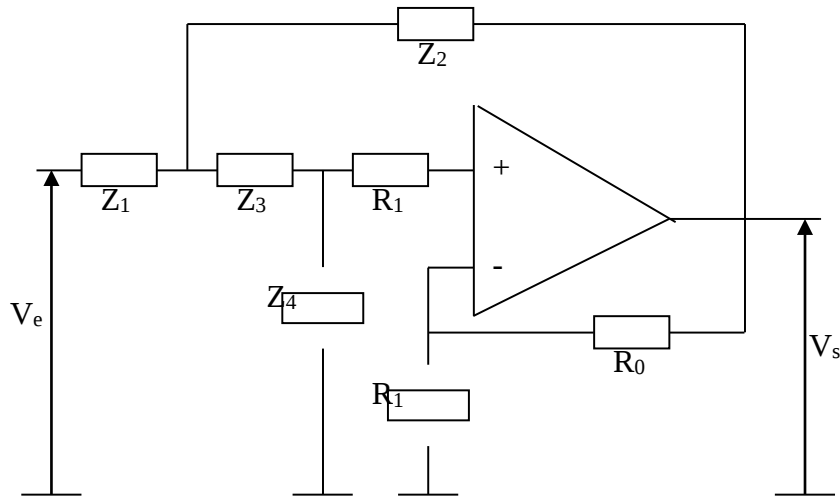
$$\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = 0 \quad \text{pour } \omega_{\max} = 0 \text{ ou pour } \omega_{\max}^2 = \omega_0^2(1 - 2\xi^2) \quad (\text{possible si } 1 - 2\xi^2 \geq 0 \text{ soit } \frac{\sqrt{2}}{2} \geq \xi)$$

Le max dépend  $\xi$  et il vaut

$$|H(j\omega)|_{\max}(\xi) = \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

### III Réalisation d'une cellule de filtrage

- Calculer la fonction de transfert du filtre à contre réaction multiple ci dessous
- Montrez que la mise en cascade de deux cellules de filtrage de ce type pour  $H_1(j\omega)$  et  $H_2(j\omega)$  peut permettre d'implanter la fonction de transfert  $H(j\omega)$  du filtre d'ordre 4 précédemment étudié.



$$K = 1 + \frac{R_0}{R_1}$$

Pour cela, on prendra  $Z_1 = Z_3 = R$  et  $Z_2 = Z_4 = 1/Cj\omega$ . On notera

Identifiez les valeurs du gain statique, de la fréquence de coupure et du coefficient d'amortissement en fonction de  $R$ ,  $C$  et  $K$ . Montrez que ce montage permet de régler le coefficient d'amortissement  $\xi$  en agissant sur  $R_0$ . Quelle est la valeur à donner à  $R_0$  pour les deux cellules ?

**Solution :**

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{K}{1 + RCj\omega(3-K) + (RCj\omega)^2},$$

gain statique =  $K$ ,

pulsation de coupure  $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{RC}$

facteur d'amortissement  $2\xi = 3 - K = 3 - \left(1 + \frac{R_0}{R_1}\right)$

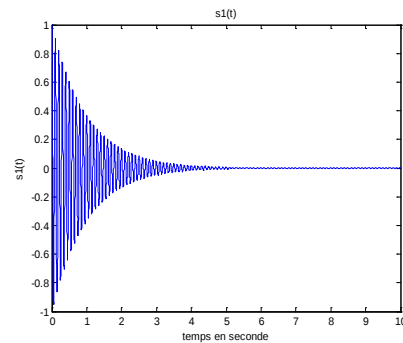
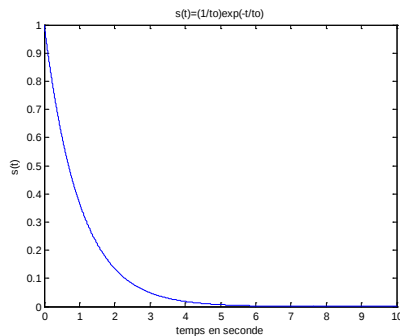
## Tutorat 3

### SIGNAUX ET MODULATION

1. Soit un signal  $s(t)$  un signal à énergie finie qui a pour transformée de Fourier  $S(f)$  et pour largeur de bande effective  $[0, F_{\max}]$ .

1.1.  $s_{m1}(t)$  a pour expression :  $s_{m1}(t) = s(t) \cos \omega_1 t = s(t) \cos 2\pi f_1 t$  avec  $F_{\max} \ll f_1$   
Exprimer la transformée de Fourier  $S_{m1}(f)$  de  $s_{m1}(t)$  en fonction de  $S(f)$

C'est de la modulation d'amplitude



Exemple :  $s(t) = \frac{e^{-t/\tau_0}}{\tau_0}$  avec  $\tau_0 = 1\text{s}$ ,  $s_{m1}(t) = \frac{e^{-t/\tau_0}}{\tau_0} \cos(2\pi f_1 t)$ ,  $f_1 = 10\text{Hz}$

1.2. Si  $s(t)$  a une largeur de bande effective de  $[0, F_{\max}]$  avec  $F_{\max} \ll f_1$ , quelle est la largeur de bande de  $s_{m1}(t)$  ?

La largeur de bande effective représente les fréquences contenues dans le signal, ce qui signifie que le signal ne contient pas d'oscillation au delà de  $F_{\max}$ . C'est une définition assez pratique. Car si  $s(t)$  est réel, le module de sa transformée de Fourier est symétrique par rapport à  $f=0$ . Le spectre de  $s(t)$  est donc contenu dans l'intervalle  $[-F_{\max}, F_{\max}]$ . Le spectre de  $s_{m1}(t)$  est translaté de  $\pm f_1$  par rapport à celui de  $s(t)$ , il est

donc contenu dans l'intervalle  $I = [-f_1 - F_{\max}, -f_1 + F_{\max}] \cup [+f_1 - F_{\max}, +f_1 + F_{\max}]$

Par exemple, le son audible ( $s(t)$ ) à une fréquence maximum  $F_{\max}$  de 18 kHz. Si  $f_1 = 103$  MHz alors le signal modulé en amplitude  $s_{m1}(t)$  a pour intervalle spectral  $I = [-103,018 \cdot 10^6, -102,982 \cdot 10^6] \cup [102,982 \cdot 10^6, 103,018 \cdot 10^6]$

2. Un signal utile possède une largeur de bande effective  $[0, F_{max}]$  avec  $F_{max}=18\text{kHz}$ . Le bruit additif qui perturbe ce signal est un signal 'aléatoire' stationnaire. Sa densité spectrale de puissance est constante telle que  $G(f)=G_0=1.10^{-7} \text{ V}^2/\text{Hz}$ . Quelle est la puissance (moyenne) du bruit dans la bande utile ?

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x^*(t) dt$$

En général, pour un signal  $x(t)$  :

$$P_b = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df = \int_{-F_{max}}^{+F_{max}} G_0(f) df = 2G_0 F_{max}$$

Mais aussi (pour  $x(t)=b(t)$ ) :

$$AN : P_b = 0.0036 \text{ V}^2$$

Quelle est la tension efficace de bruit ?  $V_{eff, b} = \sqrt{P_b} = \sqrt{2G_0 \cdot F_{max}} = 0,06 \text{ V}$ .

Ce qui signifie que l'erreur commise lors du recueil du signal utile est de 0,06V

## Application

# DETECTION SYNCHRONE MESURE DE CONCENTRATION DE SOLUTIONS

On veut mesurer la concentration  $C$  d'un corps dans un liquide. On fait passer un faisceau lumineux de flux  $\Phi_e$  et de fréquence appropriée à travers une cellule en verre d'épaisseur fixe dans laquelle circule le liquide perpendiculairement au faisceau lumineux. Une partie du flux entrant dans cette cellule est absorbée et un flux  $\Phi_s$  ressort de la cellule. On définit  $T$  le coefficient de transmission de la cellule.

$$T(t) = \frac{\Phi_s(t)}{\Phi_e(t)} = f(C(t))$$

$T(t)$  varie avec une étendue spectrale de  $\Delta f = 5 \text{ Hz}$ .  $\hat{T}(f)$  est la transformée de Fourier de  $T(t)$ .  
Le flux  $\Phi_s$  éclaire une cellule photoélectrique délivrant une tension  $V_c$  :

$$V_c(t) = k \cdot \Phi_s = k \cdot \Phi_e \cdot T(t)$$

### 1) Mesure à flux $\Phi_e$ constant

L'amplitude de  $V_c$  varie de 0 à 2 mV selon la concentration. Ensuite cette tension est amplifiée par un amplificateur de gain  $A = 5000$  dans une bande passante de 0 à 2 kHz. Le bruit de fond  $V_b$  introduit par l'amplificateur est équivalent à un générateur de bruit s'ajoutant à  $V_c$ . Sa densité spectrale de puissance vaut :

$$G_b(f) = G_0 + 10000 G_0 e^{-\frac{|f|}{10}} \quad \text{avec } G_0 = 10^{-12} \text{ V}^2/\text{Hz}$$

- 1.1 Quelle est l'amplitude maximale de  $V_s$  ?
- 1.2 Un filtre passe-bas supposé parfait a une bande passante juste égale à l'étendue spectrale  $V_c(t)$ . Calculer la puissance du bruit sortant de ce filtre.
- 1.3 Quelle est la valeur efficace de bruit qui se superpose à la tension  $V_s$  ?
- 1.4 Peut-on mesurer  $V_s$  avec une précision de 1/512 de son amplitude maximale ?

### 2) Utilisation du détecteur synchrone

Comme on vient de le voir, le bruit  $V_b$  est important à basse fréquence ; afin d'améliorer les résultats, on va utiliser une amplification à détection synchrone, selon le schéma de la figure 2. Un flux lumineux  $\Phi_0$  venant de la lampe est modulé à  $F = 1000 \text{ Hz}$  par une roue avec des trous, de telle sorte que le flux  $\Phi_e$  soit de la forme :

$$\Phi_e = \Phi_0 (1 + \sin \Omega t)$$

$\Phi_0$  a la valeur de la question 1 et  $\Omega = 2\pi F$ .

Un miroir sans tain laisse passer le flux  $\Phi_e$ , et le flux réfléchi attaque une cellule photoélectrique identique à celle attaquée par  $\Phi_e$ . La tension  $V_r$  délivrée par cette cellule va subir le même traitement que  $V_c$  et fournira grâce à un écrêteur la tension  $p(t)$  :

$$P(t) = P_0 \text{ signe}(\sin \Omega t) \text{ avec } P_0 = 1 \text{ V}$$

2-1- Quel est le spectre du flux  $\Phi_e$  ?

2-2- Quel est le spectre de  $V_c$  en fonction de celui de  $\Phi_e$  et de  $T(f)$  ?

Afin d'éliminer la composante continue de  $V_c$  et réduire le bruit  $V_b$ , on construit, avec le même amplificateur qu'en 1), un amplificateur de gain 5000, passe-bande de largeur  $B = 100 \text{ Hz}$  centrée sur 1000 Hz. Pour les calculs on supposera ce filtre parfait.

2-3- Dans quelle condition le bruit de fond en sortie de l'amplificateur est un bruit dit blanc ?

2-4- Quelle est  $P_{ba}$ , la puissance de bruit  $V_{ba}$  en sortie d'amplificateur ?

Le signal  $V_a(t)$  sortant de l'amplificateur subit une multiplication de telle sorte que  $V_m(t)$ , la sortie du multiplieur soit :

$$V_m(t) = V_a \cdot p(t) = V_a \cdot \text{signe}(\sin \Omega t)$$

2-5- Le signal sortant du multiplieur se décompose en une composante utile  $V_u$ , qui permet de mesurer  $T(t)$  et des composantes haute fréquence qui seront éliminées par le filtre passe bas suivant dont la bande sera la plus petite possible compatible avec l'étendue spectrale de  $T(t)$ . Calculer  $V_u$ .

2-6- Quelle est  $\varepsilon_{\text{eff}}$ , la valeur efficace de la tension de bruit se superposant au signal utile dans la tension de sortie  $V_s$  du filtre passe bas initial ? Peut-on mesurer  $V_s$  avec une précision du 1/512 de sa valeur maximale ?

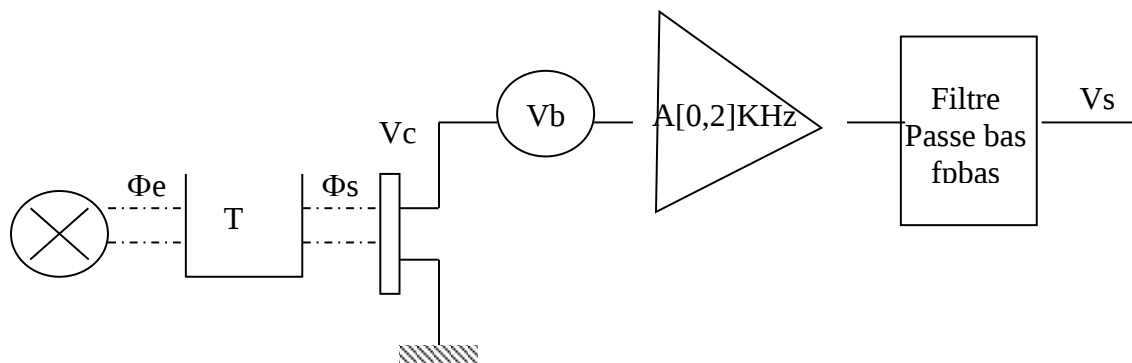


Figure 1 : mesure à flux constant

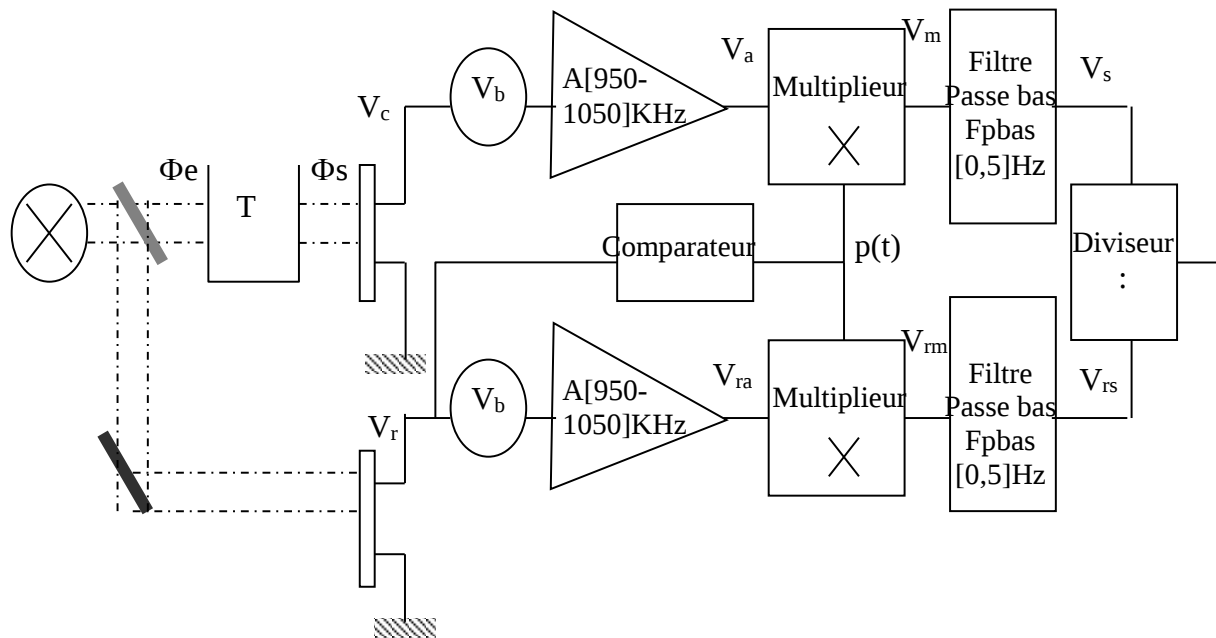


Figure 2 : Chaîne de mesure à détection synchrone

## Éléments de correction du problème

1-1.  $V_c = k \Phi_s = k \Phi_e T$  et  $0 \leq V_c \leq 2mV$   $A = \text{cste} = 5000$  pour  $f \in [0, 2KHz]$  et 0 ailleurs  
 $V_s = A(f) V_c$  or les composantes spectrales différentes de 0 de  $V_c \in [0, 5Hz]$  donc  
 $0 \leq V_s \leq A \cdot 2 \cdot 10^{-3} V$  soit  $0 \leq V_s \leq 10 V$

$$P_{bs} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{bs}(f) df = \int_{-5}^{+5} A^2 G_{be}(f) df = 2 \int_0^5 A^2 G_{be}(f) df = 1,97 V^2$$

1-2.

1-3.  $\epsilon_{eff} = \sqrt{P_{bs}} = 1,4 V$

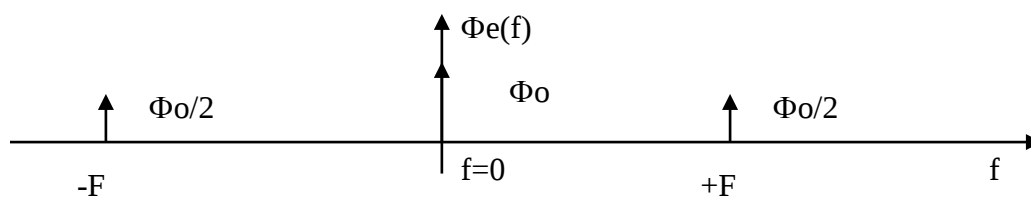
$$q = \frac{V_{s,max}}{512} = 20 mV$$

1-4. Le quantum , donc il n'est pas possible de mesurer  $V_s$  au  $1/512^{\text{eme}}$  près

2-1.  $\hat{\Phi}_e(f) = \Phi_o \left( \delta(f) - \frac{1}{2} j \delta(f-F) + \frac{1}{2} j \delta(f+F) \right)$  ,

$$|\hat{\Phi}_e(f)| = \Phi_o \left( \delta(f) + \frac{1}{2} \delta(f-F) + \frac{1}{2} \delta(f+F) \right)$$

En module :

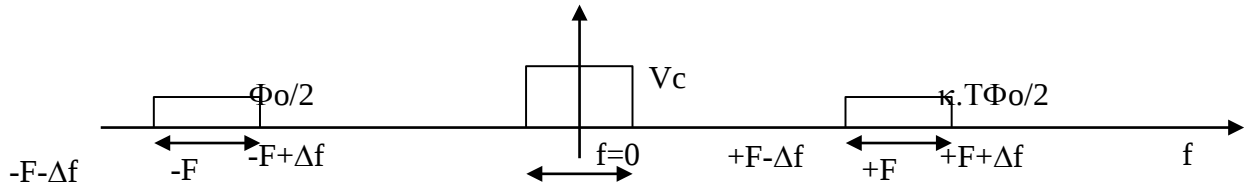


2-2.

$$TF(V_c(t)) = TF(\Phi_e(t) \cdot k \cdot T(t)) = k(\hat{\Phi}_e(f) * \hat{T}(f)) = \Phi_o k \left[ T(f) - j \frac{1}{2} T(f-F) + j \frac{1}{2} T(f+F) \right]$$

en module :

$$|TF(V_c(t))| = \Phi_o k \left[ T(f) + \frac{1}{2} T(f-F) + \frac{1}{2} T(f+F) \right]$$



2-3. Le bruit  $V_b$  peut être considéré blanc si le filtre est à bande étroite  $[F-B/2, F+B/2]$  par rapport à  $F$ .

$$P_{ba} \approx 2 \int_{950}^{1050} G_o A^2 df = 2 G_o A^2 \cdot 100$$

2-4.

2-5.- Après filtre passe-bande :  $V_a = (V_c + V_{ba})A$  dans la bande passante et 0 ailleurs.

- Après multiplication :  $V_m(t) = V_a(t) p(t)$

- Après convolution par un filtre passe-bas  $h_b(t)$  :

$$V_s(t) = [V_a(t) p(t)] * h_b(t) = [A(V_c + V_{ba}) p(t)] * h_b(t)$$

- En passant en fréquentiel (TF de l'équation précédente) :

$$TF(V_s) = [TF(V_a) * TF(p)] \cdot TF(h_b) = A[TF(V_c) * TF(p) + TF(V_{ba}) * TF(p)] \cdot TF(h_b)$$

En remarquant que

a) Le développement en série de Fourier de  $p(t)$  :

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)\Omega t)$$

est une somme de sinusoïdes, donc  $TF(p(t))$  est un peigne de Dirac (pondéré)

b) La TF d'un filtre passe bas  $h_b$  parfait de fréquence de coupure  $f_b$  est une porte  $\Pi(-f_b, f_b)$

=> la  $TF(V_m)$  sera constituée de la  $TF(V_c)$  convoluée avec les impulsions de Dirac situées entre  $(-f_b, f_b)$

- Après le filtre passe bas, on a une partie utile  $V_{cs}$  et le bruit  $V_{bs}$

$$V_s(t) = V_{cs}(t) + V_{bs}(t) = AV_c(t) \frac{1}{2} \frac{4}{\pi} + AV_b(t) \frac{1}{2} \frac{4}{\pi}$$

2-6. Donc la puissance du bruit de sortie

$$P_{bs} = \int_{-\infty}^{+\infty} [V_{bs}(t)]^2 dt = \int_{-5}^{+5} [TF(V_{bs})]^2 df = 2 \int_0^{+5} G_o A^2 \frac{4}{\pi^2} df = 2 G_o A^2 \cdot 5 \frac{4}{\pi^2} \approx 10^{-4} V^2$$

*La tension efficace de bruit est de*  $\epsilon_{eff} = \sqrt{P_{bs}} = 10 mV \ll Quantum = 20 mV$

## ENSEM 1A

### TRAVAUX PRATIQUES - MODELISATION, SIGNAUX ET SYSTEMES

#### TP. 1 MESURE ET IDENTIFICATION

Maîtrise de l'oscilloscope et application à l'identification de la fonction de transfert d'un système inconnu.

#### TP. 2 FILTRAGE

Familiarisation avec un logiciel de simulation en électronique.  
Analyse temporelle et fréquentielle de différents filtres.

#### TP. 3 MODULATION ET DETECTION SYNCHRONES

Réalisation d'un capteur de déplacement et amélioration du signal délivré par des techniques de filtrage et modulation / démodulation synchrone

### MODE D'ÉVALUATION ET NOTATION DES TP

- o Les enseignants vont attribuer des notes **en séance, par binôme** en fonction des résultats et de l'implication des élèves
- o **Un examen de TP** sera organisé à la fin du semestre 1 (les élèves vont participer à un tirage au sort entre MSS et Informatique)
- o **Note finale : (note examen + moyenne des notes en séance)/2**



# TP 1 : Mesure et identification (3h)

## Objectif du TP

Le but de ce TP introductif est d'apprendre à mesurer convenablement des signaux. Il convient donc de maîtriser parfaitement le fonctionnement de l'oscilloscope (Mode AC/DC, synchronisation, seuil de déclenchement ...). Ces connaissances s'appliquent notamment à l'identification des systèmes, modélisés par des fonctions de transfert. A titre d'exemple, on identifiera par deux méthodes différentes la fonction de transfert d'un système inconnu.

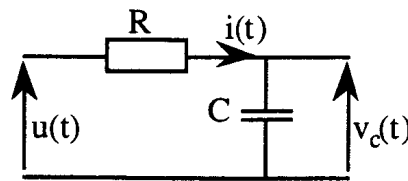
*Rappel :* Les fonctions de transfert d'un système de premier ordre et d'un système de deuxième ordre sans zéros s'écrivent :

$$H_1(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$
$$H_2(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}},$$

avec K le gain du système,  $\tau$  la constante de temps,  $\omega_n$  la pulsation naturelle et  $\xi$  le facteur d'amortissement.

## Fonctionnement de l'oscilloscope

On considère le circuit électrique suivant :



## Travail demandé

### 1. Etude de la réponse à un échelon de tension (Réponse indicielle)

*Objectif :* identifier les paramètres (couple RC), manipulation oscilloscope

- ✓ Comment exciter correctement le circuit (choix de la fréquence, régime permanent) ?
- ✓ Comment visualiser la réponse du circuit à l'oscilloscope ? (choix de la voie de synchronisation et du seuil)

Pour une bonne qualité de visualisation :

- Quelle voie de synchronisation est-il préférable d'utiliser.
- Comparer les modes AC et DC
- Conclusion ?
- ✓ Donner la constante de temps (méthode des 63%, de la tangente, méthode de  $3\tau$ )

### 2. Identification d'une fonction de transfert

*Objectif:* Identifier la fonction de transfert d'un circuit inconnu. Le circuit à identifier est le **circuit 3b**.

Deux méthodes sont utilisées pour l'identification du circuit.

### 2.1. **Méthode 1** : Réponse indicielle du circuit (cas des systèmes simples)

- ✓ Tracer la réponse indicielle du circuit.
- ✓ En déduire les informations utiles selon le type de réponse:
  - système du 1er ordre : constante de temps
  - système du 2ème ordre : temps de montée, dépassement + Abaques
- ✓ En déduire la fonction de transfert du système (utiliser les abaques, voir Annexe).

### 2.2. **Méthode 2** : Diagramme de Bode (gain, phase) (tous systèmes)

- ✓ Tracer, pour le même circuit, les diagrammes de Bode.

#### Conseils pratiques

- limiter la variation de la fréquence entre 0 et 10 kHz.
- faire un balayage rapide pour repérer les points caractéristiques (fréquence de coupure, résonance),
- prendre 4 à 5 points maximum par décade mais régulièrement espacés
- le gain et le déphasage doivent être mesurés simultanément (même fréquence)
- les courbes sont tracées l'une au-dessus de l'autre pour faciliter l'interprétation
- tracer les asymptotes
- gain: échelle log/log ; phase: échelle semi-log.
- Les courbes doivent être tracées sur place.

### 3. Bonus : réponses des autres circuits

- ✓ Visualiser rapidement les réponses indicielles des 3 autres circuits. Ce type de réponse est-elle toujours suffisante pour conclure sur la fonction de transfert ?

## TP 2 : Filtrage (4h)

### Objectif du TP

L'objectif principal de ce TP est d'analyser le signal de sortie de différents filtres dans l'espace temporel et fréquentiel en fonction de signaux tests d'entrée et de justifier les modifications ou distorsions éventuelles de ce signal de sortie. Cette analyse sera faite à l'aide du logiciel de simulation *MultiSim (NI)*. Le simulateur présente plusieurs intérêts :

- pouvoir visualiser les phénomènes transitoires sur les signaux ;
- simuler le fonctionnement avant réalisation ;
- tester la robustesse du circuit en fonction des caractéristiques des composants et des variables de perturbations externes (température, bruit électromagnétique ...)

### Préparation: rappels sur les filtres

*En théorie :*

- Les filtres sont définis en fonction de leur comportement fréquentiel  
-> Comportement fréquentiel idéal: types – passe-bas, passe-bande, passe-haut, ...
- Les systèmes réels modélisés comme des systèmes invariants dans le temps sont caractérisés (en fréquentiel) par leur diagrammes de Bode  
Tout système de fonction de transfert  $H(p)$  est une mise en cascade de systèmes d'ordre 1 et 2 (caractéristiques: ordre, fréq. coupure (à -3 dB), bande passante, pulsation propre, ...)

*En pratique :*

- Le cahier des charges nous permet de définir des gabarits : gain et variations maximales acceptables du gain dans la bande passante, atténuation minimale dans la bande coupée
- Le gabarit permet de définir les caractéristiques des fonctions de transferts: ordre, gain dans la bande passante... Par la suite, les fonctions de transfert sont approximées par des polynômes pour les passe-bas, passe-haut (pour les passe-bande, on distingue deux cas : ordre > 2 – mise en cascade des filtres passe-bas – passe-haut ; ordre 2, cas traité séparément).

### Travail demandé

#### 1. Initiation au logiciel de simulation *MultiSim* :

Construisez et simulez un filtre passif (RC) passe-bas de premier ordre. Visualisez la réponse du filtre pour différents signaux d'entrée (échelon, signal périodique carré, sinusoïdes de différentes fréquences). Visualisez le diagramme de Bode.

#### 2. Simulation du filtre de Butterworth étudié en tutorat.

**2.1.** Etudiez la cellule de filtrage dont le schéma est donné figure suivante (voir aussi le tutorat sur les filtres). Montrez que le montage permet de réaliser un filtre passe-bas du 2<sup>ème</sup> ordre (pour un rappel sur les fonctions de transfert de premier et de deuxième ordre, voir le TP 1) Pour cela, on prendra  $Z_1 = Z_3 = R$  et  $Z_2 = Z_4 = 1/C_p$  et on notera  $K=1+R_0/R_1$ .

Identifiez les valeurs du gain statique  $A(0)$ , de la fréquence de coupure  $f_0$  et du coefficient d'amortissement  $\xi$ . Montrez qu'on peut régler le coefficient d'amortissement en agissant sur  $R_0$ .

**2.2.** Calculez les valeurs des composants pour deux cellules de filtrage ayant ce schéma, dont les valeurs des paramètres seront :

- $\omega_{0,1} = 2\pi 1000 \text{ rad/sec}$  ;  $\xi_1 = 0,92$  ;  $K_1 = 3-2\xi_1$
- $\omega_{0,2} = 2\pi 1000 \text{ rad/sec}$  ;  $\xi_2 = 0,38$  ;  $K_2 = 3-2\xi_2$ .

Réalisez ces filtres à l'aide du logiciel de simulation et testez leur fonctionnement :

- Tracez les courbes des réponses temporelle indicielle et fréquentielle en gain et phase des deux cellules ;
- Tracez les signaux de sortie à un signal d'entrée carré de fréquence 200 Hz, 1000 Hz et 3000 Hz. Expliquez la forme des signaux observés : pour cela il est utile de visualiser le spectre de fréquence du signal et des signaux de sortie.

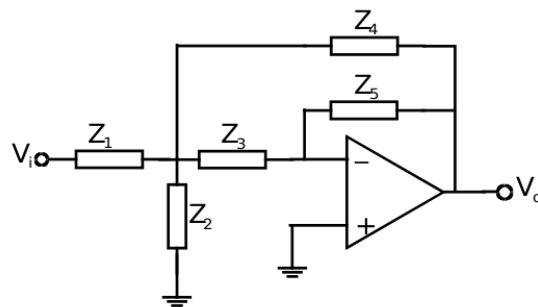
**2.3.** Réalisez un filtre de quatrième ordre en mettant en cascade les deux cellules précédentes. Analysez le fonctionnement du filtre obtenu, vérifiez qu'il s'agit d'un filtre de Butterworth :

- Tracez les courbes des réponses temporelle (indicielle) et fréquentielle (gain et phase);
- Tracez les signaux de sortie du filtre à un signal d'entrée carré de fréquence 200 Hz, 1000 Hz et 3000 Hz. Expliquez la forme des signaux observés.

### 3. Simulation d'un structure de Rauch.

2.1. Étudiez la cellule de filtrage dont le schéma est donné figure suivante. Montrez que le montage permet de réaliser des filtres de 2<sup>ème</sup> ordre passe-bas, passe-haut ou passe-bande, en fonction des valeurs des impédances. Montrez que, pour un passe-bande, le rapport entre la largeur de bande (définie à -3 dB) et la fréquence centrale (facteur de qualité) est déterminé par le facteur d'amortissement :

$$\frac{\Delta \omega_c}{\omega_0} = 2\xi$$



2.2. Calculez les valeurs des composants pour réaliser un filtre passe-bande de fréquence centrale 3000 Hz, de gain 10 et de largeur de bande 300 Hz. Réalisez ce filtre et simulez son fonctionnement:

- Tracez les courbes des réponses temporelle (indicielle) et fréquentielle (gain et phase);
- Tracez les signaux de sortie du filtre à un signal d'entrée carré de fréquence 3 Hz, 3000 Hz. Expliquez la forme des signaux observés.

## TP 3 : Modulation et détection synchrone (4h)

### Objectif du TP

Restituer un phénomène physique par démodulation synchrone afin d'améliorer le rapport signal sur bruit. Le principe est présenté figure 1.

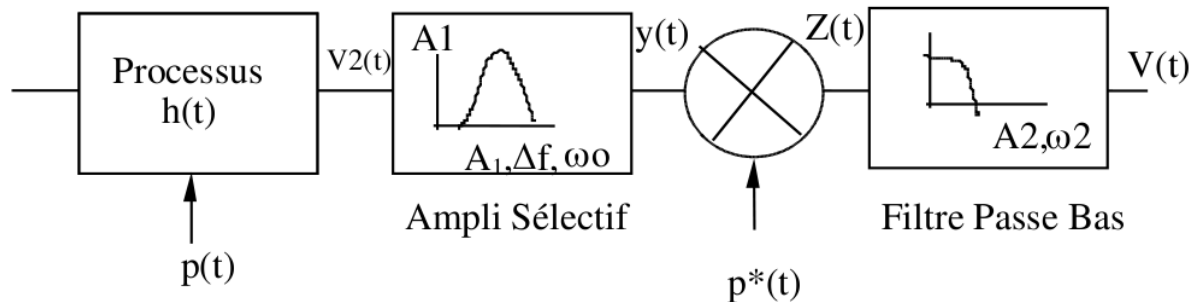


Figure 1 : Principe de la détection synchrone

### Réalisation de la maquette

1. Le capteur est un transformateur d'inductance mutuelle variable en fonction de l'allongement / déplacement du secondaire (figures 2 et 3). Il est excité, à travers une résistance fixe  $R=100\Omega$ , par un signal sinusoïdal de fréquence  $f_0=3\text{kHz}$ , le signal recueilli en sortie de capteur étant de très basse amplitude et noyé dans le bruit. On rappelle que l'inductance mutuelle d'un transformateur s'écrit:

$$M_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 D_2^2}{4\pi(l_0 + \Delta l)}$$

Les caractéristiques constructives du capteur sont les suivantes:

**Bobine primaire :**

- nombres de spires  $N_1 = 55$
- longueur  $l_1 = 15 \text{ mm}$
- inductance  $L_1 = 4.9 \mu\text{H}$
- résistance  $r_1 = 0.69 \Omega$

**Bobine secondaire :**

- spires circulaires  $D_2 = 8 \text{ mm}$
- nombre de spires  $N_2 = 20$
- longueur  $l_0 = 15 \text{ mm}$

**Perméabilité du vide :**  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$

2. Les schémas électroniques de principe sont présentés figures 4 et 5.

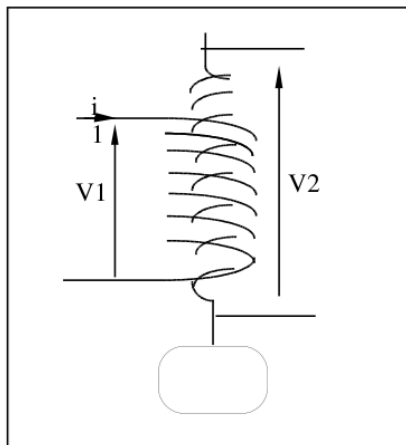


Figure 2 :  
Capteur

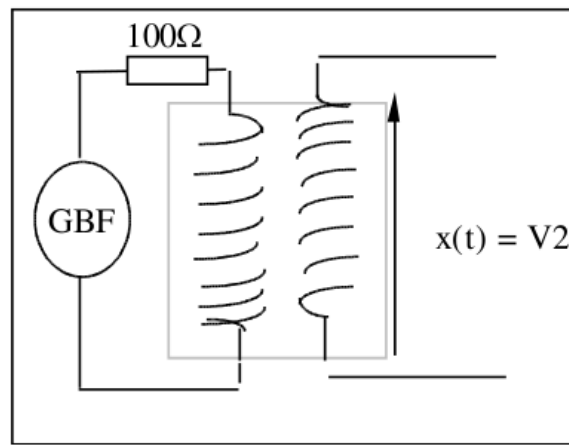


Figure 3 : Processus

Figure 4 :  
Amplificateur  
Passe Bande

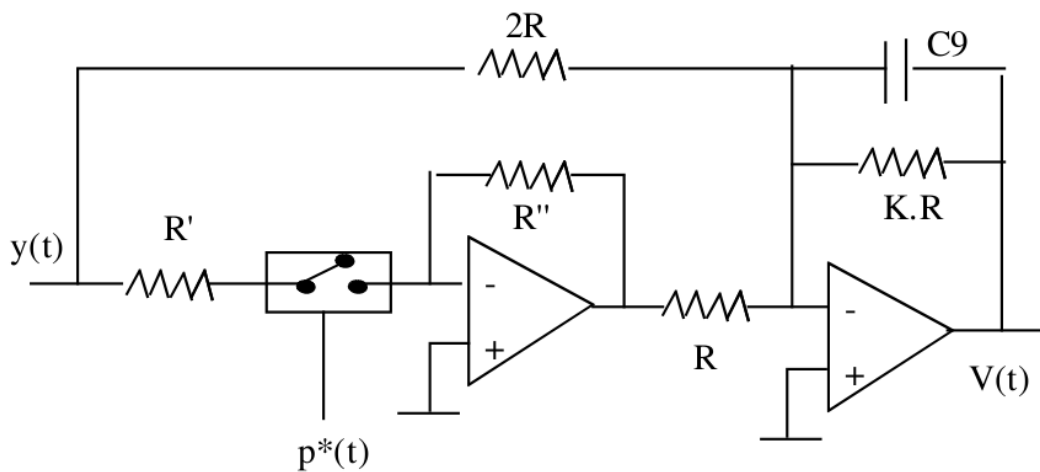
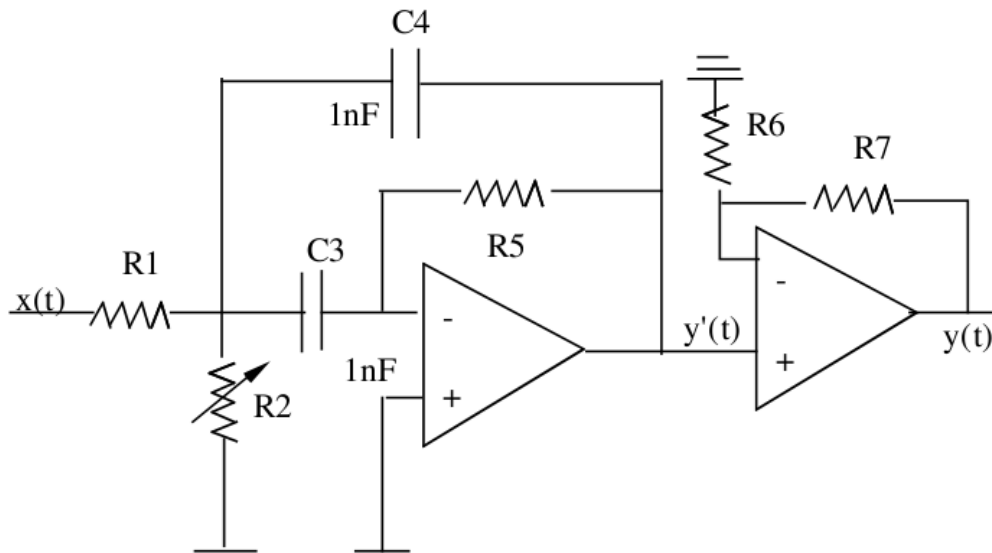


Figure 5 :  
Multiplieur  
et filtre

Passe Bas

### Travail demandé

Les différentes étapes à aborder lors du TP sont les suivantes :

1. Déterminer la loi théorique de variation de tension de sortie du capteur en fonction de l'élongation  $\Delta \ell$  du ressort. Visualiser le signal de sortie du capteur  $V_2(t)$  à l'oscilloscope et vérifier expérimentalement cette loi. Tracer la courbe  $V_2(t)=f(\Delta \ell)$ .
2. Quels sont les signaux individuels qui entrent dans la composition du signal de sortie du capteur  $V_2(t)$  et quel est leur contenu fréquentiel ? Pouvez vous estimer la fréquence maximale  $f_{\max}$  du signal **utile** en sortie de capteur ?

Le signal de sortie  $V_2(t)$  passe ensuite à travers un amplificateur sélectif (ou filtre passe bande) de fréquence de centrale  $f_0=3\text{kHz}$ , de gain  $A_1=10$ , de largeur de bande  $\Delta f_0=300\text{ Hz}$ , suivi d'un amplificateur simple  $A_2=19$  (figure 4).

3. Quel est le rôle de ce montage ? Calculer les fonctions de transfert de chaque étage.
4. Justifier le choix des valeurs précédentes. Calculer les valeurs des composantes électroniques du montage. Vérifier expérimentalement que le montage respecte les spécifications de l'énoncé. Visualiser le signal de sortie de l'amplificateur sélectif  $y(t)$ .

Le signal  $y(t)$  passe à travers un multiplieur et un filtre passe bas de gain  $A_3$  et de fréquence de coupure  $f_2$  (figure 5).

5. Quel est le rôle de ce montage ? Calculer la fonction de transfert.
6. Quelles sont les spécificités nécessaires aux signaux  $p(t)$  et  $p^*(t)$  pour réaliser la détection synchrone avec cette structure de multiplieur ?
7. Proposer des valeurs pour  $A_3$  et  $f_2$  telles que le signal de sortie du capteur soit facilement exploitable. Calculer les valeurs des composantes électroniques du montage (la valeur de la résistance  $R$  est donnée,  $R=10\text{k}\Omega$ , voir schéma en Annexe). Visualiser le signal de sortie redressé et le signal final  $V_s(t)$  redressé et filtré passe-bas.

Questions supplémentaires:

8. Faire varier la fréquence légèrement autour de la fréquence centrale du filtre passe bande. Que constatez-vous?
9. Attaquer le primaire de la bobine successivement par un signal  $p(t)$  : sinusoïdal, triangulaire ou carré. Interprétez.
10. Estimer le rapport signal sur bruit en sortie de chaîne de traitement.

### Remarques :

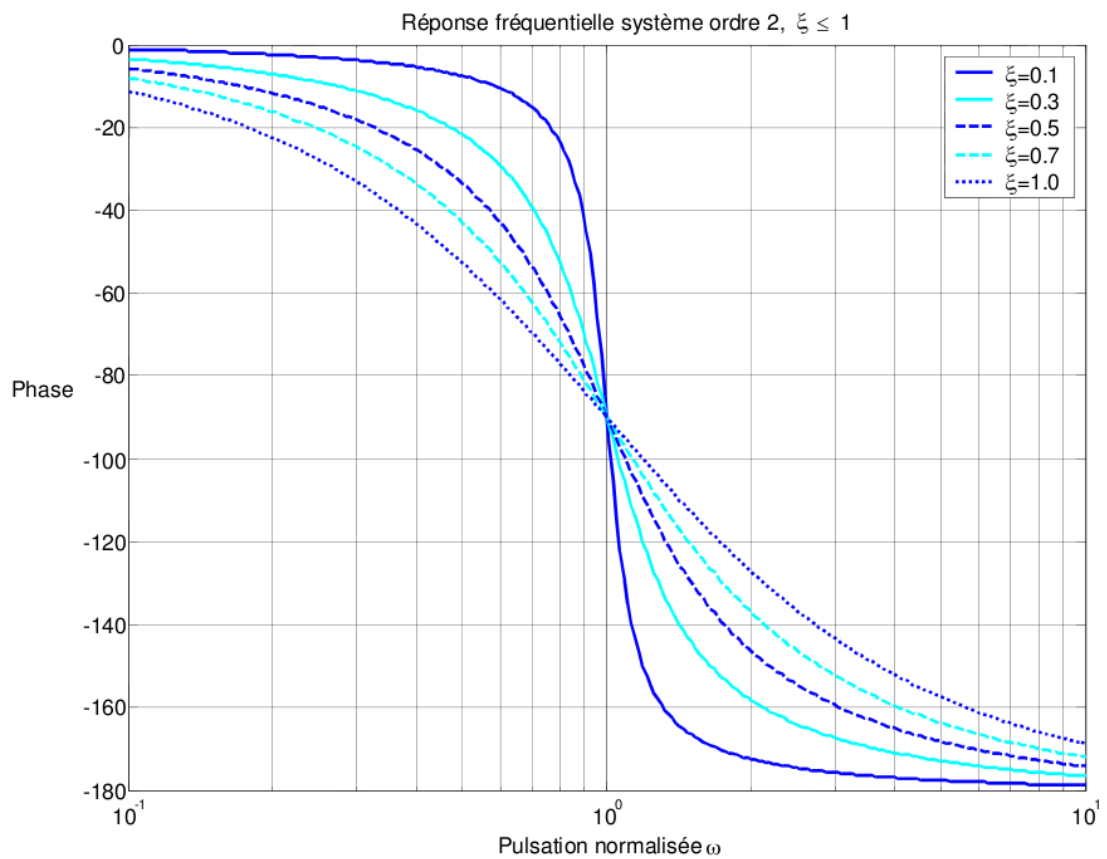
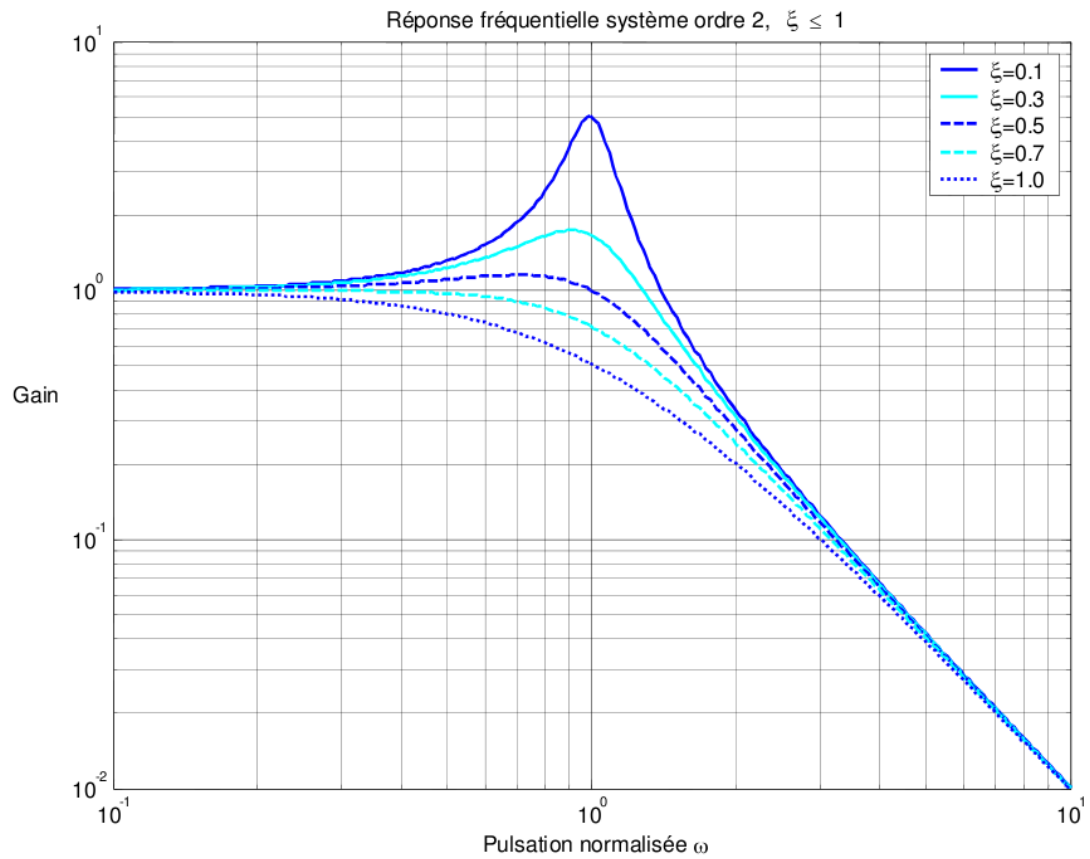
1. Pour le choix de  $f_0$ , tenir compte du fait que  $x(t)$  est de l'ordre de quelques mV, mais que le produit Gain x Bande Passante des amplificateurs est de 2MHz.
2. La fonction d'interrupteur commande (voir figure 5) est remplie par un circuit intégré spécialisé (CD4066) :

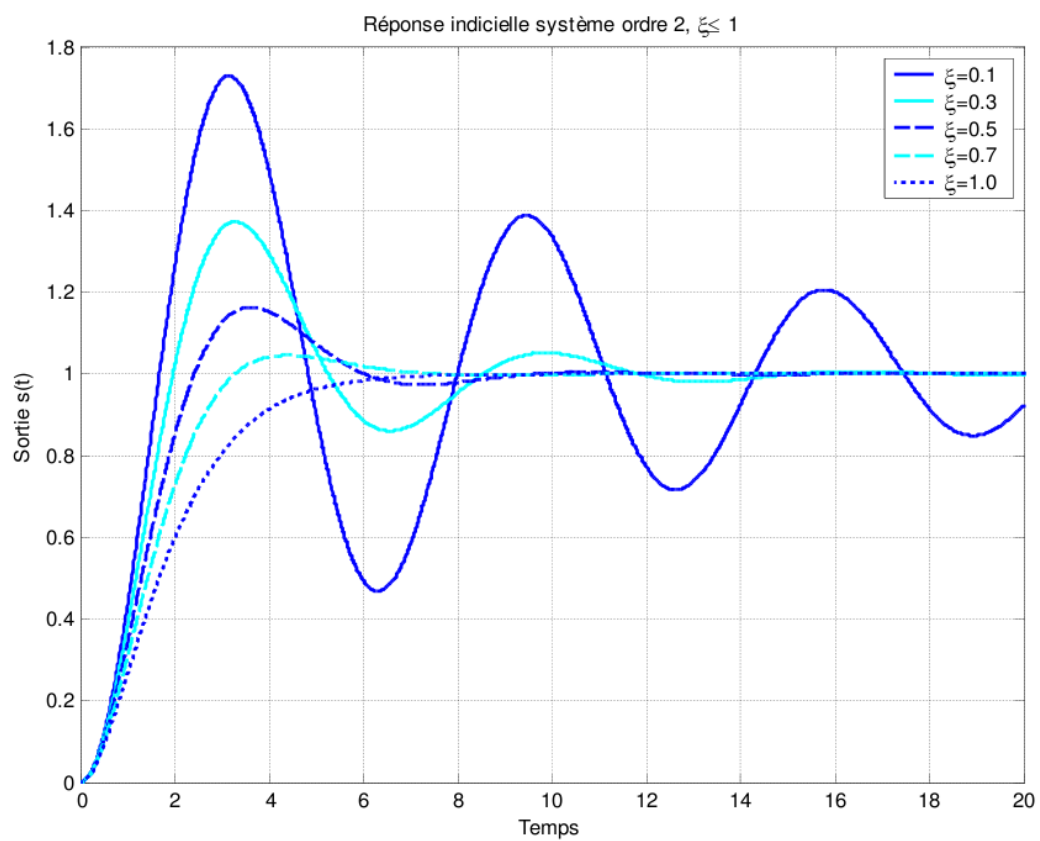
[www.ee.washington.edu/stores/DataSheets/cd4000/cd4066.pdf](http://www.ee.washington.edu/stores/DataSheets/cd4000/cd4066.pdf) .

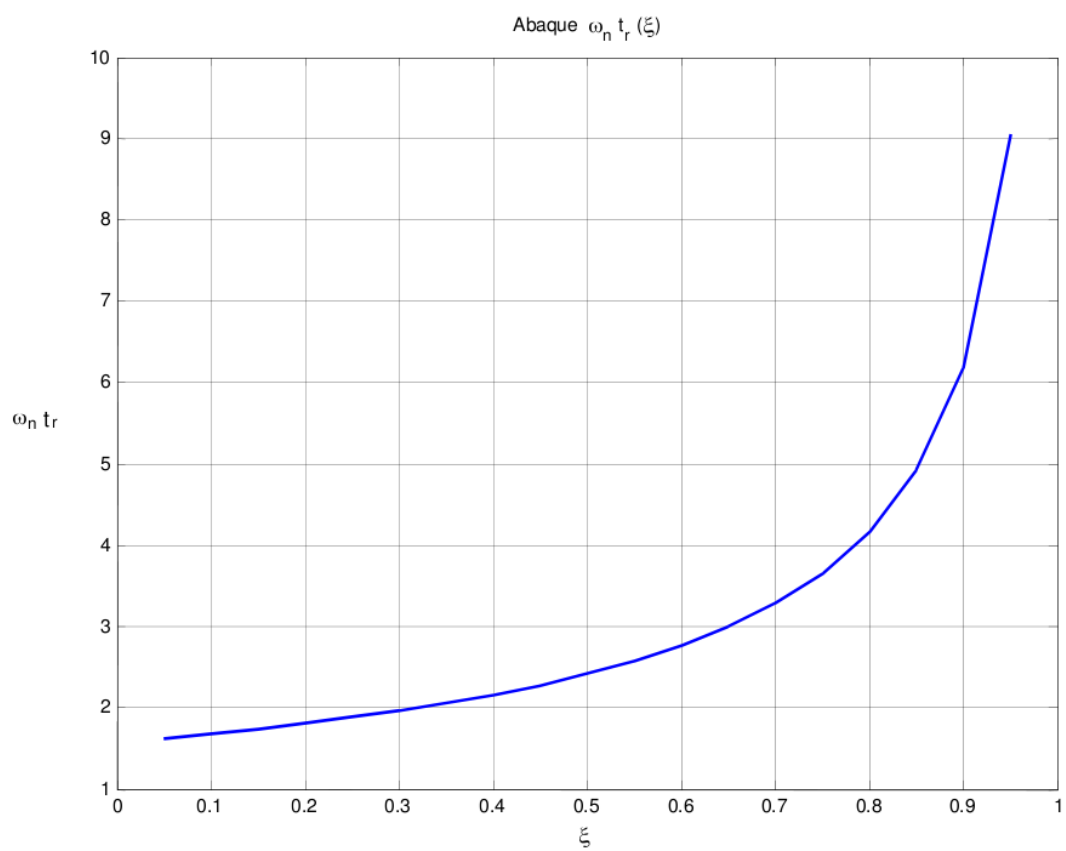
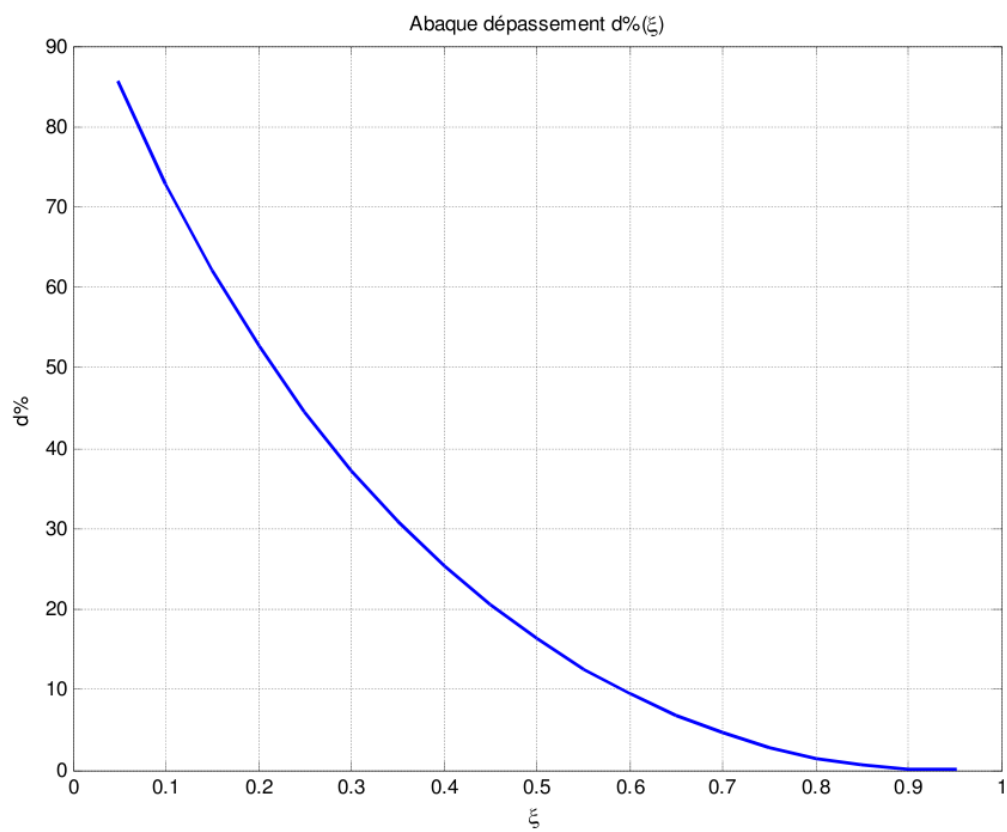
3. Le schéma électronique complet et détaillé du montage est donnée en Annexe.



# ANNEXES







### Schéma complet du montage « TP3 - Modulation et Détection Synchrone »

