

**UE 111 Fondements Mathématiques -
Examen partiel (15/11/2019, durée : 2 heures)**

Documents et instruments électroniques interdits.

Toute réponse doit être soigneusement justifiée.

La lisibilité de la copie et la qualité de la rédaction sont des éléments essentiels dans l'appréciation générale.

Merci d'indiquer votre groupe de TD sur votre copie :

EI 1 (Mme. Geandier) ;

EI 2 (M. Maubon) ;

EI 3 (M. Bertram) ;

EI 4 (M. Cadorel) ;

CPU (Mme. Kowalska) ;

MP (M. Mégy).

Exercice 1. Soit A, B, C des parties d'un ensemble M . On note A^c le complémentaire de A dans M .

1. Montrer que $A \setminus B = A \cap B^c$.
2. Montrer que A est la réunion disjointe de $A \cap B$ et de $A \setminus B$.
3. Du point précédent, déduire une formule pour $\text{card}(A)$ (si M est un ensemble fini), puis une formule exprimant $\text{card}(A \Delta B)$, où $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, en termes de $\text{card}(A)$, $\text{card}(B)$ et de $\text{card}(A \cap B)$.
4. Montrer que

$$(A \setminus C) \subset ((A \setminus B) \cup (B \setminus C)).$$

5. Montrer par un contre-exemple qu'on n'a pas toujours égalité dans l'inclusion du point précédent. (*Indication : faire un diagramme de Venn, puis l'utiliser pour donner explicitement un contre-exemple en prenant, par exemple, $M = \{1, \dots, 7\}$.*)

Exercice 2.

1. (question de cours.) Soit $f : A \rightarrow B$ une application. Donner les définitions :
 f est injective ;
 f est surjective ;
 f est bijective.
2. (question de cours) Soit $f : A \rightarrow B$ une application. Supposons qu'il existe une application $g : B \rightarrow A$ telle que $g \circ f = \text{id}_A$ et $f \circ g = \text{id}_B$. Montrer que f est bijective.
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + x + 1$. L'application est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$f(n) = \frac{n}{2} + 1$ si n est pair, et $f(n) = \frac{n-1}{2}$ si n est impair.

1. Faire la table des valeurs de f pour $n = 0, 1, \dots, 8$.

2. Calculer $f(2m)$ et $f(2m+1)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$; montrer que f prend bien ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. L'application f est-elle injective? surjective? bijective?

Exercice 4. Soit M un ensemble et $f : M \rightarrow M$ une application *idempotente*, i.e., telle que $f \circ f = f$.

1. (question de cours) Donner la définition de l'*image* $\text{im}(f)$ de f .
2. Fixons un élément $a \in M$. Supposons que a appartient à l'image $\text{im}(f)$ de f . Montrer que a est un point fixe (i.e., $f(a) = a$).
3. Supposons que f est surjective. Montrer qu'alors $f = \text{id}_M$.
4. Supposons que f est injective. Montrer qu'alors $f = \text{id}_M$.
Conclure qu'une application idempotente est, soit l'application identité, soit ni surjective ni injective.
5. Soit $M = \{1, 2\}$. Faire une liste explicite de toutes les applications idempotentes $f : M \rightarrow M$.
6. Soit $M = \{1, 2, 3\}$.
 - (a) (question de cours) Combien y a-t-il d'applications de M dans M ? Combien parmi elles sont bijectives? combien sont injectives? combien sont surjectives?
 - (b) Combien y a-t-il d'applications idempotentes $f : M \rightarrow M$? (*Indication : distinguer selon le cardinal de l'image $\text{im}(f)$, qui peut être égal à 1, 2 ou 3.*)
 - (c) Existe-t-il des applications $f : M \rightarrow M$ qui ne sont ni idempotentes, ni injectives, ni surjectives (et si oui, combien)?

Corrigé succinct

barème sur $31 = 9 + 6 + 3 + 13$ points :

Dans la suite, pour abrégé, nous écrivons “ssi” pour “si et seulement si”.

1. 9 points

1. **1,5 pt** Soit $x \in M$. Par définition, $x \in A \setminus B$ ssi $[x \in A \text{ et } x \notin B]$. Or, $x \notin B$ ssi $x \in B^c$. Donc $x \in A \setminus B$ ssi $[x \in A \text{ et } x \in B^c]$, ssi $x \in A \cap B^c$.

Autre façon de répondre : par une table de vérité.

2. **1,5 pt** Soit $x \in A$. Alors des deux cas exactement l'un : $x \in B$ (et donc $x \in A \cap B$), ou bien $x \notin B$ (donc $x \in A \setminus B$). Ainsi $A = (A \cap B) \sqcup (A \setminus B)$ (réunion disjointe). Autrement dit : $A = (A \cap B) \sqcup (A \cap B^c) = (A \cap B) \sqcup (A \setminus B)$ (utilisant le point 1).

3. **2 pt** On sait que $\text{card}(A_1 \cup A_2) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2)$ si la réunion $A_1 \cup A_2$ est disjointe. Ainsi, la partie 2. donne $\text{card}(A) = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(A \setminus B)$.

Or, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (réunion disjointe), donc

$$\begin{aligned}\text{card}(A \Delta B) &= \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(B \setminus A) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) \\ &= \text{card}(A) - 2\text{card}(A \cap B) + \text{card}(B).\end{aligned}$$

4. **2 pt** Soit $x \in A \setminus C$, c-à-d, $[x \in A \text{ et } x \notin C]$. Alors des deux cas l'un : $x \in B$ ou $x \notin B$.

Si $x \in B$, alors $[x \in B \text{ et } x \notin C]$, donc $x \in B \setminus C$.

Si $x \notin B$, alors $[x \in A \text{ et } x \notin B]$, donc $x \in A \setminus B$.

Donc, dans les deux cas, $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$, d'où l'inclusion cherchée.

Autre façon de répondre : par table de vérité.

5. **2 pt** Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$, $C = \{3, 5, 6, 7\}$. Alors :

$$A \setminus C = \{1, 2\}, \quad (A \setminus B) \cup (B \setminus C) = \{1, 3\} \cup \{2, 4\} = \{1, 2, 3, 4\},$$

et il y a inclusion stricte $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$. (Remarque : si ces relations ne sont pas écrites explicitement, mais correctement illustrées par un diagramme de Venn, cela donne 1 point.) (Rque : on peut trouver d'exemples plus simples.)

2. 6 pts

1. **2 pt** cf. cours.

2. **2 pt** cf. cours

3. **2 pt** On a $f(-2) = 4 - 2 + 1 = 3 = f(1)$, et $1 \neq -2$, donc f n'est pas injective.

On a $f(x) = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, ainsi $f(x) \geq \frac{3}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et ainsi $y = 0$ n'admet pas d'antécédent. Doc f n'est pas surjective non plus.

3. 3 pts

1. **0,5 pt** Les valeurs sont

$$f(0) = 1 \quad f(1) = 0 \quad f(2) = 2 \quad f(3) = 1 \quad f(4) = 3 \quad f(5) = 2 \quad f(6) = 4 \quad f(7) = 3 \quad f(8) = 5.$$

2. **1 pt** Comme $2m$ est pair, $f(2m) = \frac{2m}{2} + 1 = m + 1$.

Comme $2m + 1$ est impair, $f(2m + 1) = \frac{2m+1-1}{2} = m$.

Dans les deux cas, $f(n)$ est bien un entier.

3. **1,5 pt** Comme $f(0) = 1 = f(3)$ et $0 \neq 3$, f n'est pas injective (et donc f n'est pas bijective).

Soit $m \in \mathbb{N}$. Alors $n = 2m + 1$ est un antécédent de m . Donc f est surjective.

4. 13 pts

1. **1 pt** $\text{im}(f) = \{f(x) \mid x \in M\} = \{y \in M \mid \exists x \in M : y = f(x)\}$
2. **1 pt** Soit $a \in \text{im}(f)$. Il existe donc $x \in M$ tel que $a = f(x)$. Or, $f \circ f = f$, donc $f(f(x)) = x$, donc $f(a) = f(f(x)) = f(x) = a$.
3. **1,5 pt** Soit f surjective. Donc $\text{im}(f) = M$. D'après le point précédent, pour tout $a \in M = \text{im}(f)$, on a $f(a) = a = \text{id}(a)$, d'où $f = \text{id}_M$.
4. **2,5 pt** Soit f injective. Soit $a \in M$ et $y := f(a)$. Alors $f(y) = f(f(a)) = f(a)$. Comme f est injective, il s'ensuit que $y = a$, et donc $f(a) = a$. Ceci étant vrai pour tout $a \in M$, il s'ensuit que $f = \text{id}_M$.

(Rque : si M est fini et $f : M \rightarrow M$ est injective, alors f est aussi surjective, et on peut appliquer le point précédent. Si correctement écrit, cet argument donne 1,5 points.)

En résumé, si $f \neq \text{id}_M$, alors f ne peut pas être surjective ou injective.

5. **1 pt** Soit $M = \{1, 2\}$. Il existe $2^2 = 4$ applications $M \rightarrow M$. Les deux applications constantes $f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = 2$ sont idempotentes, et id_M aussi. La quatrième application vérifie $f \circ f = \text{id}$, donc elle n'est pas idempotente. Rque : il existe donc 3 applications idempotentes $M \rightarrow M$.

6. Soit $M = \{1, 2, 3\}$.

- (a) **2 pt** Il y a $3^3 = 27$ applications $M \rightarrow M$; parmi elles, $3! = 6$ sont bijectives. Une application $f : M \rightarrow M$ est injective ssi elle est bijective ss elle est surjective ("principe des tiroirs"), donc il y en a 6 également.

- (b) **2,5 pt** Soit $f : M \rightarrow M$ idempotente.

Si $\text{card}(\text{im } f) = 3$, alors f est surjective, donc $f = \text{id}$ (question 3).

Si $\text{card}(\text{im } f) = 1$, alors f est constante. Or, il y a 3 constantes possibles.

Si $\text{card}(\text{im } f) = 2$, il y a 6 possibilités de choisir f . En effet, il y a $\binom{3}{2} = 3$ possibilités de choisir $\text{im } f$; ce choix fait, il existe encore 2 possibilités pour fixer l'image du dernier élément.

Exemple avec $\text{im}(f) = \{1, 2\}$: alors forcément $f(1) = 1, f(2) = 2$; et alors $f(3) = 1$ convient (car $f(f(3)) = f(1) = 1 = f(3)$, donc f est idempotent) ; et pareil si $f(3) = 2$.

Donc il y a $1 + 3 + 6 = 10$ applications idempotentes $M \rightarrow M$.

- (c) **1,5 pt** oui, car il y a 27 applications au total, dont 6 bijectives et 10 idempotentes (avec seulement id_M relevant des deux cas en même temps), donc $27 - 6 - 9 = 12$ qui ne sont ni idempotentes, ni bijectives. D'après la partie 4., ce sont aussi les applications qui ne sont ni idempotentes, ni injectives, ni surjectives.