

Feuille 3 - Calcul algébrique - Résolution d'équations

Exercice 1 - *Egalités de proportions*

1. Soient a, b, c et d quatre nombres réels avec b et d non nuls. On suppose que $k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
 - (a) Montrer que si $b + d \neq 0$, alors $k = \frac{a + c}{b + d}$.
 - (b) Plus généralement, montrer que si $xb + yd \neq 0$ avec x et y réels, alors $k = \frac{xa + yc}{xb + yd}$.
2. Soient a, b, c, x, y et z six nombres réels avec a, b et c non nuls. On suppose que $m = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.
 - (a) Montrer que $(ax + by + cz)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$.
 - (b) Interpréter géométriquement ce résultat, en considérant deux vecteurs de l'espace de coordonnées (x, y, z) et (a, b, c) .

Exercice 2 - *Identités remarquables : autres identités classiques*

Montrer que pour tous réels a, b, c, x , et y , on a :

1. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
2. $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$
3. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
4. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$
6. $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1$
7. $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) = x^4 + 1$

Exercice 3 - *Fractions et expressions algébriques*

Simplifier les fractions suivantes, où x (et y) est un réel quelconque tel que les fractions aient un sens :

1. $\frac{2}{3x-3} \times \frac{5}{x+1} \times \frac{x^2-1}{5x}$
2. $\frac{x^4-1}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2+1} \times \frac{x^3}{x^2+1}$
3. $\frac{x-1}{2x} \times \left(\frac{x+1}{x-1} - 1 \right)$
4. $\frac{1}{x^4-2x^2y} \times \frac{4}{x^4} \times \frac{x^2-4y^2}{5}$
5. $\frac{\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x-1}}$
6. $\frac{9x^2-25}{3-12x^2} \times \frac{2x+1}{9x^2+30x+25}$

Exercice 4 - Fractions et expressions algébriques

Simplifier les expressions suivantes en précisant le domaine de validité :

1. $\frac{6x-7}{(x-2)(3x+1)} + \frac{3x+4}{(x-2)(2x-5)}$
2. $\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-3}{x+1} + \frac{x+1}{x-2}$
3. $2\frac{5x-1}{x(2x-1)} - \frac{3x-7}{x(2x+1)} - 2\frac{x-1}{4x^2-1}$

Exercice 5 - Equations du premier degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, d'inconnue x (et pour les plus simples, de tête) :

1. $x = -x$
2. $-2x + 5 = 1$
3. $-\frac{2}{3}x = 4,5$
4. $2x - a = 1$, avec a un paramètre réel fixé
5. $2(4 - 2x) = 6 - (5x + 1)$
6. $5(2 + 3x) - 4x = 6 - (-3 + 11x)$
7. $\frac{4x}{9} - \frac{1}{5} = \frac{3}{7}x - 1$
8. $3 - 2x = -\frac{x}{3}$
9. $\frac{2}{5-4x} = \frac{3}{7}$
10. $3 = \frac{\frac{8}{2} - \frac{4}{x}}{\frac{x}{3} + \frac{4}{3}}$

Exercice 6 - Equations plus complexes mais sans utiliser la notion de discriminant

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, d'inconnue x :

1. $4x - 5x^2 = 0$
2. $x^2 = 2x$
3. $-2x^2 + 1 = -71$
4. $\frac{2}{3}(5x-1)^2 = -\frac{1}{4}$
5. $\frac{4}{9}(3x-1)^2 = \frac{1}{4}$
6. $\frac{a}{x} + \frac{x}{a} = 2$, avec a un paramètre réel fixé
7. $2x^2 - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
8. $mx - \frac{m^2}{m-1} = \frac{x}{m} + 1$, avec m un paramètre réel différent de 1 et 0