

Suites - Exercices

Novembre 2019

I. Suites numériques - généralités

Exercice 1

Déterminer les 4 premiers termes des suites suivantes:

(a) $u_n = 2n^2 - n + 1$

(b) $v_n = \frac{2n+1}{2-3n}$

Exercice 2

Dans cet exercice, on mettra en évidence la monotonie des suites

- (a) On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{3^n}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) est strictement croissante.
- (b) La suite (v_n) est définie par : $v_n = \frac{n}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est strictement décroissante à partir du rang 2.
- (c) Soit (u_n) la suite dont le terme de rang n est définie par : $u_n = -32n + 102$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que cette suite est décroissante.
- (d) Soit (w_n) la suite dont le terme de rang n est définie par : $w_n = 2n - \frac{25}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite (w_n) est croissante.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n - u_n^2 - 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(a) Compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4
u_n					

(b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 4

Pour les suites suivantes, calculer les termes u_1 et u_2 :

(a) $\begin{cases} u_0 &= 5 \\ u_{n+1} &= \frac{2u_n}{u_n+1} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u_0 &= -1 \\ u_{n+1} &= (u_n + 1)^2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n-1}{u_n} \end{cases}$

Exercice 5

Étudier le sens de variation de chaque suite.

(a) $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$

(c) $u_n = (n-5)^2, n \geq 5$

(b) $u_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

(d) $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= u_n - n \end{cases}$

Exercice 6

- (a) Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2n + 1$. Montrer que cette suite est croissante.
- (b) Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{3n}{2^n}$. Quel est le sens de variation de cette suite ?
- (c) Soit la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{3n+1}{2n+2}$. Quel est le sens de variation de cette suite ?

II. Raisonnement par récurrence

Exercice 7

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= 1 + \frac{1}{1+u_n} \end{cases}$. Montrer par récurrence que : $\forall x \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= u_n + 2n + 2 \end{cases}$. Montrer par récurrence que : $\forall x \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + n$

Exercice 9

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n + 2 \end{cases}$.

- (a) Quelle est la nature de (u_n) ? Donner l'expression du terme général de cette suite en fonction de n .
- (b) La suite (v_n) est définie par : $\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= v_n + u_n \end{cases}$. Montrer par récurrence que : $\forall x \in \mathbb{N}, v_n = 1 + n^2$

III. Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 10

- Soit la suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, de raison $r = -2$ et de premier terme $u_0 = 15$.
 - (a) Écrire u_{n+1} en fonction de u_n .
 - (b) Écrire u_n en fonction de n .
 - (c) Calculer u_1 et u_{10} .
 - (d) Calculer la somme $S_{10} = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$
- Soit la suite géométrique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{81}$.
 - (a) Écrire u_{n+1} en fonction de u_n .
 - (b) Écrire u_n en fonction de n .
 - (c) Calculer u_1 et u_{10} .
 - (d) Calculer la somme $S_{10} = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$

Exercice 11

Soit la suite géométrique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$, de raison q et de premier terme v_0 telle que $v_2 = -18$ et $v_4 = -162$. Déterminer q et v_0 .

Exercice 12

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+1} &= \frac{u_n}{1+2u_n} \end{cases}$ et $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n} + 1$.

- (a) Calculer u_1 et u_2 .
- (b) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique. Donner l'expression de son terme général en fonction de n .
- (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- (d) Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
- (e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \leq 1$.

Exercice 13

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2}$ et $v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$

- (a) Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.
- (b) Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique.
- (c) Démontrer que $u_n = \frac{1}{2}(w_n + t_n)$

Exercice 14

Une entreprise décide de verser à ses employés une prime annuelle de 500. Il est prévu que chaque année la prime augmente de 2% par rapport à l'année précédente. On note (u_n) la suite des primes avec $u_1 = 500$.

- (a) Calculer u_2 et u_3 .
- (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire la nature de la suite (u_n) .
- (c) Un employé compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime. Calculer la prime qu'il touchera la 20^{ème} année (c'est-à-dire u_{20}).
- (d) Calculer la somme totale S des primes touchées sur les 20 années (c'est-à-dire $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$).

Exercice 15

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$ (a et b réels non nuls tels que $a \neq 1$).
On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a

IV. Autres exercices

Exercice 16

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} \end{cases}$$

- (a) Calculer les valeurs exactes, en fractions irréductibles, de u_1 et u_2 .
- (b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .

On considère la suite (v_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 3$

- (c) Montrer que $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$
- (d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $-1 \leq v_n \leq 0$
- (e) Montrer que $v_{n+1} - v_n = -v_n(\frac{1}{2}v_n + 1)$
- (f) En déduire le sens de variation de (v_n) .

Exercice 17

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}$$

- (a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq n + 3$
- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$
- (c) En déduire le sens de variation de (u_n) .

Exercice 18

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par :
$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= \frac{2u_n + v_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 &= 10 \\ v_{n+1} &= \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$
- (b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_n - u_n$. Montrer qu'on a $w_n = 8(\frac{5}{12})^n$
- (c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

Exercice 19

Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= 3u_n - 2n + 3 \end{cases}$$

- (a) Calculer u_1 et u_2
- (b) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$
- (c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
- (d) Soit la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - n + 1$. Montrer que cette suite est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
- (e) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n + n - 1$