

Limites - Exercices

Décembre 2019

I. Limites de suites

Exercice 1

Dans chaque as on donne la limites des suites (u_n) et (v_n) . Déterminer si possible $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$

$$(a) \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{cases}$$

Exercice 2

A l'aide des tableaux "opérations sur les limites" déterminer la limite éventuelle des suites suivantes:

$$(a) u_n = n^2 + n$$

$$(d) u_n = \frac{3}{2-n^2}$$

$$(f) u_n = \frac{3}{0,5^n}$$

$$(b) u_n = n^2 - n$$

$$(c) u_n = \frac{2}{n+2}$$

$$(e) u_n = \frac{3n^2-3n}{3-3n^3}$$

$$(g) u_n = \frac{n^2+n}{1-n^2}$$

Exercice 3

A l'aide de comparaisons, déterminer la limite éventuelle des suites suivantes:

$$(a) v_n = (-1)^n + n$$

$$(b) w_n = \frac{\frac{1}{n}}{(-1)^{n+n}}$$

$$(c) u_n = n - \cos(n)$$

Exercice 4

On définit (u_n) par : $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= 2u_n - n + 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

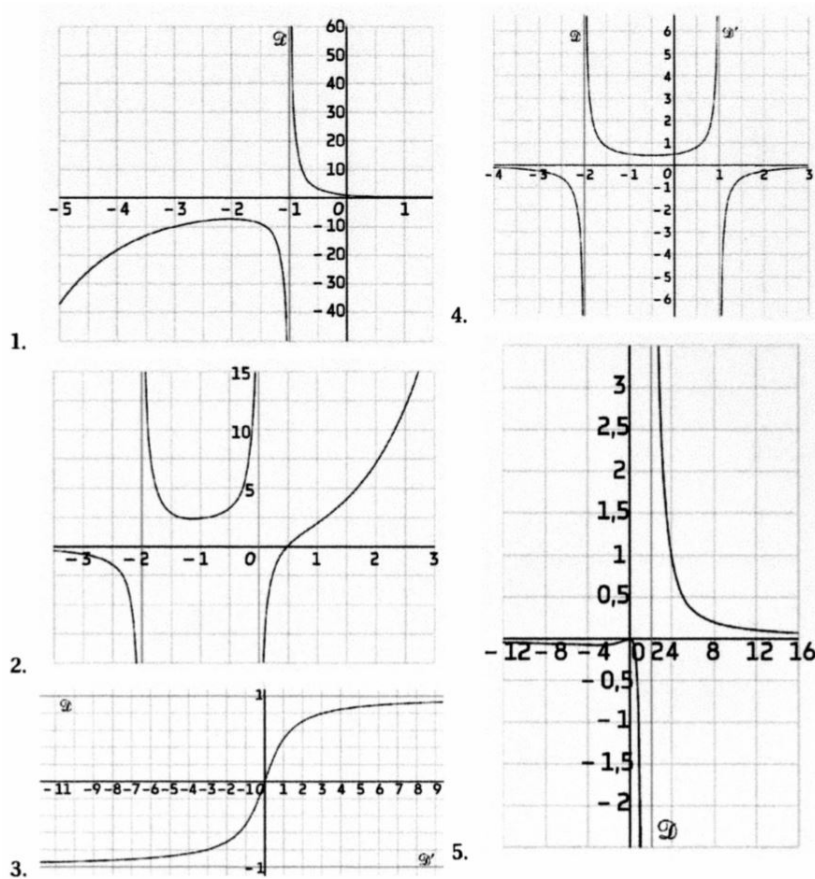
(a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \geq n$.

(b) Quelle est la limite de (u_n) ?

II. Limites de fonctions

Exercice 5

On donne la représentation graphique d'une fonction f ainsi que les éventuelles asymptotes. Déterminer dans chaque cas le domaine de définition de f et les limites aux bornes de l'ensemble de définition.



Exercice 6

Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \times g)(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f}{g}(x)$

(a) $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2} \\ g(x) = \frac{x}{x^2} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+x} \\ g(x) = \frac{1}{1-x} \end{cases}$

Exercice 7

Étudier la limite à droite et à gauche de a pour chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \frac{x^3}{1-2x}$; $a = \frac{1}{2}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$; $a = 1$

(c) $f(x) = \frac{4x-5}{1-x}$; $a = 1$

Exercice 8

Déterminer dans chaque cas la limite de f à l'endroit indiqué et préciser l'asymptote s'il y a lieu.

(a) $f_1(x) = x^3 - 5x^2\sqrt{x} - 2x^2 + 12$; en $+\infty$

(d) $f_4(x) = x^6 - 4x^2 + 3$; en $-\infty$

(b) $f_2(x) = \frac{x^2-3x}{3x^2-3x+4}$; en $-\infty$

(e) $f_5(x) = 7x^2 + 4x - \frac{32}{(x-1)^2}$; en 1

(c) $f_3(x) = \frac{x^2-6}{x^2+x-2}$; en -2

(f) $f_6(x) = \frac{\cos(x)+x}{x^3+2}$; en $-\infty$

Exercice 9

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x) = \frac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

- (a) Déterminer les domaines de définitions de f et de g .
- (b) Peut-on calculer les limites de $f(x)$ et de $g(x)$ quand x tend vers 1 ? Justifier.
On pose $N(x) = x^3 - 3x + 2$ et $D(x) = x^2 - 4x + 3$
- (c) Calculer $N(1)$ et $D(1)$
- (d) Déterminer les réels a, b, c tels que $N(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$
- (e) Factoriser $D(x)$
- (f) Simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x \neq 1$ et en déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1.
- (g) En utilisant le conjugué du numérateur, simplifier l'expression de $g(x)$ pour $x \neq 1$ et en déduire la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$

- (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- (b) A quelle F.I la limite de f en $+\infty$ conduit-elle ?
- (c) Démontrer que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$
- (d) Déterminer la limite de f en $+\infty$

Exercice 11

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{ax+b}{2x-1}$ où a et b sont deux réels. g est représentée par la courbe C dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- (a) Déterminer a et b tels que $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
- (b) Déterminer les asymptotes à C .