

UE 111 Fondements Mathématiques - TD 1 : Ensembles finis

1. Autour du triangle de Pascal.

- (1) Pour les cas $n = 1, 2, 3$: rappeler du cours la liste des parties de l'ensemble $[1, \dots, n]$, puis faire une liste pour le cas $n = 4$. Dans chacune des listes, rajouter un trait entre deux parties A et B si $[A \subset B \text{ et } \text{card}(B) = \text{card}(A) + 1]$. Graphiquement, le schéma pour $n = 2$ rassemblera à un *carré*, et pour $n = 3$ à un *cube*. Trouver des bonnes représentations graphiques pour le cas $n = 4$ (la figure géométrique s'appelle un *tesseract*; pour n quelconque on parle d'un *hypercube*).
- (2) Justifier de deux manières différentes l'égalité

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$$

- a) en utilisant la formule du binôme de Newton,
- b) par un argument de dénombrement ensembliste.

Ecrire les cas particuliers de cette formule pour $n = 1, 2, 3, 4$, et expliquer le lien avec le triangle de Pascal.

- (3) On se propose de démontrer la proposition (P) suivante :
(P) *Il y a autant de parties de $[1, \dots, n]$ ayant un nombre **pair** d'éléments qu'il y en a ayant un nombre **impair** d'éléments.*
 - a) En utilisant les listes du point (1), montrer que (P) est vraie pour $n = 1, 2, 3, 4$.
 - b) Soit n impair. Trouver un argument simple prouvant (P).
 - c) Soit n pair. Se ramener alors au cas $n - 1$ pour prouver (P).
 - d) En admettant (P), justifier de deux manières différentes l'égalité

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Expliquer le lien avec le triangle de Pascal.

2. Un autre triangle de Pascal.

- (1) Ecrire le triangle de Pascal jusqu'à la 9-ième ligne.
Ecrire la formule de Newton exprimant $(a + b)^8$.
- (2) Recopier ce triangle en remplaçant le coefficient $\binom{n}{k}$ par 0 s'il est pair, et par 1 s'il est impair. Expliquer, en utilisant les règles de calcul du type "pair + pair = pair", comment construire ce triangle de proche en proche, sans utiliser la partie (1). Rajouter les 10-ième à 17-ième lignes de ce triangle.
- (3) Pour quels n , la $(n + 1)$ -ième ligne du triangle de la partie précédente ne contient-elle que des coefficients 1 ? Le coefficient $\binom{64}{25}$, est-il pair ou impair ? Montrer que, si a et b sont des entiers, alors $(a + b)^{64} - a^{64} - b^{64}$ est toujours pair.

3. Les pyramides de Pascal. Pour $k = 1, 2, 3, 4$, calculer $(a + b + c)^k$. Essayer de trouver un lien entre ces calculs et le triangle de Pascal.

4. Propriétés des opérations sur les ensembles. Dans cet exercice, illustrer toutes les formules ensemblistes par des diagrammes de Venn. (Cela ne constitue pas une preuve, mais peut aider à fixer les idées.) Soit A, B, C des parties de M .

1. Prouver la *loi de distributivité* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. On définit la différence symétrique de A et de B par

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Montrer que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, puis les propriétés :

commutativité : $A \Delta B = B \Delta A$

associativité : $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

neutre : $A \Delta \emptyset = A$

inverse : $A \Delta A = \emptyset$.

(Remarque : on résumera plus tard ces 4 propriétés en disant que $\mathcal{P}(M)$ muni de la loi Δ est un groupe commutatif.)

5. Inclusion, exclusion. Soit M un ensemble fini et $A_1, A_2, A_3 \subset M$. Illustrer par un diagramme de Venn, et montrer que

$$\begin{aligned} \text{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \text{card}(A_3) \\ &\quad - (\text{card}(A_1 \cap A_2) + \text{card}(A_1 \cap A_3) + \text{card}(A_2 \cap A_3)) \\ &\quad + \text{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Enoncer une formule similaire exprimant $\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$, puis conjecturer une formule générale exprimant $\text{card}(\cup_{i=1}^k A_i)$ pour k quelconque. Essayer de justifier cette formule (on ne demande pas une preuve formelle).

6. Partitions. Rappelons du cours qu'une *partition d'un ensemble M en k parties* est la donnée de k parties non-vides $A_1, \dots, A_k$ telles que M soit la réunion disjointe $A_1 \cup \dots \cup A_k$. Supposons que M est de cardinal n .

1. Pour $n = 1, 2, 3, 4$: écrire *toutes* les partitions possibles de M .
2. Pour n quelconque, combien de partitions de M en deux parties existe-t-il ?
3. Pour n quelconque, combien de partitions de M en $(n - 1)$ parties existe-t-il ?
4. Soit B_n le nombre de partitions d'un ensemble M de cardinal n . En utilisant la partie 1., montrer que $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$ et $B_4 = 15$.
5. (difficile) Montrer que, pour n quelconque (et on posant $B_0 = 1$, par convention),

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

(Indication : pour chaque partie Y de M , on pourra considérer toutes les partitions qui font intervenir $A = Y^c$. L'ensemble de toutes les partitions de M admet donc lui-même une partition, et pour compter sa cardinalité il suffit de sommer.) Utiliser ceci pour montrer que $B_5 = 52$ et $B_6 = 203$.

UE 111 Fondements Mathématiques - TD 2 : Ensembles et applications

1. Produit cartésien. Dans le plan $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, représenter les parties suivantes (en prenant $n = 2, 3, 4$), calculer leur cardinal, et en déduire que

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \sum_{i=1}^{n-1} i.$$

- (1) $A_1 = [[1, \dots, n]] \times [[1, \dots, n]]$
- (2) $A_2 = \{(i, j) \in A_1 \mid i = j\}$
- (3) $A_3 = \{(i, j) \in A_1 \mid i + j = n + 1\}$
- (4) $A_4 = \{(i, j) \in A_1 \mid i < j\}$, $A'_4 = \{(i, j) \in A_1 \mid i > j\}$,
- (5) $A_5 = \{(i, j) \in A_1 \mid i + j < n + 1\}$, $A'_5 = \{(i, j) \in A_1 \mid i + j > n + 1\}$,
- (6) pour $i = 1, \dots, n$ fixé : $B_i = \{(i, j) \in A_1 \mid i > j\}$.

(Indication : observer que certaines de ces parties sont des réunion disjointes de certaines autres parmi ces parties.)

2. Mots. Notre *alphabet* est un ensemble A de 26 éléments (lettres), dont 6 voyelles. Un *mot de longueur k* est un k -uplet d'éléments de A .

1. Combien de mots de longueur 3 peut-on former ?
Combien parmi eux n'ont pas de lettre double ?
Combien parmi eux ne comportent pas de voyelle ? – et une seule voyelle ?
2. Combien de mots de longueur 26 peut-on former ? Combien parmi eux n'ont pas de lettre double ? Puis même question pour la longueur 27.
3. Combien de *palindromes* de longueur n y a-t-il ? (exemples pour $n = 5$: RADAR, KAYAK.)

3. Applications injectives, surjectives, bijectives. Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ un ensemble de cardinal n et $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ de cardinal m . Dans les cas suivants, faire une liste complète de toutes les applications $f : A \rightarrow B$; pour chacune d'entre elles, noter le cardinal de l'image $\text{im}(f)$, et noter si elle est injective, surjective, bijective :

- (1) $n = 3$ et $m = 2$,
- (2) $n = 2$ et $m = 3$,
- (3) $n = 3$ et $m = 3$.

Dans le cas général de n et de m ,

1. combien d'applications *injectives* y a-t-il ?
2. combien d'applications *bijectives* y a-t-il ?
3. si $m = 2$, combien d'applications *surjectives* y a-t-il ?
4. si $n = m + 1$, combien d'applications *surjectives* y a-t-il ?

4. Composée d'applications. Soit $M = \{1, 2\}$. Donner la liste explicite de toutes les applications $f : M \rightarrow M$. (On pourra les noter f_1, f_2, f_3, f_4 , cf. cours.) Dresser la table des composées $g \circ f$ avec g et f parcourant $S = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. En utilisant cette table, répondre aux questions suivantes :

- quelles sont les $f \in S$ telles que : $\forall g \in S : f \circ g = g \circ f$?
- quelles sont les $f \in S$ telles que : $\forall g \in S : f \circ g = f$?
- quelles sont les $f \in S$ telles que : $\forall g \in S : g \circ f = f$?
- quelles sont les $f \in S$ telles que : $\exists g \in S : g \circ f = \text{id}_M$?
- quelles sont les $f \in S$ telles que $f \circ f = f$?
- quelles sont les $f \in S$ telles que $f \circ f = \text{id}_M$?
- quelles sont les $f \in S$ qui sont injectives ? surjectives ? bijectives ?
- extraire la table des composées des applications *bijectives* de M dans M (table de $\mathfrak{S}_2$).

5. Injectif, surjectif, et inverses à droite ou à gauche. Soit A, B des ensembles (qu'on pourra supposer finis), et $f : A \rightarrow B$ une application. Montrer :

1. s'il existe une application $g : B \rightarrow A$ telle que $f \circ g = \text{id}_B$, alors f est surjective ;
2. si f est surjective, alors il existe une application $g : B \rightarrow A$ telle que $f \circ g = \text{id}_B$;
3. s'il existe une application $g : B \rightarrow A$ telle que $g \circ f = \text{id}_A$, alors f est injective ;
4. si f est injective, alors il existe une application $g : B \rightarrow A$ telle que $g \circ f = \text{id}_A$;

Indications. Les preuves de 1. et de 3. sont directes à partir des définitions. Pour prouver 4., soit $y \in B$; définir alors $g(y)$ en distinguant les deux cas : y appartient à l'image de f , ou non. Pour prouver 2., soit $y \in B$; justifier que l'ensemble $f^{-1}(y)$ est non-vidé ; on peut alors choisir "arbitrairement" un élément $x \in f^{-1}(y)$ et poser $g(y) := x$; montrer que l'application g ainsi définie convient.

6. Composée et injectivité et surjectivité. Soit $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ des applications. Les affirmations suivantes, sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse !

1. si f est constante, alors $g \circ f$ est constante,
2. si g est constante, alors $g \circ f$ est constante,
3. si $g \circ f$ est constante, alors g ou f est constante,
4. si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective,
5. si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective,
6. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective,
7. si $g \circ f$ est surjective, alors f est surjective,
8. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective,
9. si $g \circ f$ est injective, alors g est injective.

Montrer aussi : si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective, et alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

7. Image directe et image réciproque d'une partie. Soit $f : A \rightarrow B$ une application.

(1) Montrer que, pour toutes parties $U, V \in \mathcal{P}(A)$,

1. $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$,
2. $f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$, donner un contre-exemple montrant qu'il n'y a pas égalité.
3. Soit de plus $g : B \rightarrow C$ une application, alors $(g \circ f)(U) = g(f(U))$.

(2) Montrer que, pour toutes parties $W, V \in \mathcal{P}(B)$,

1. $f^{-1}(W \cup V) = f^{-1}(W) \cup f^{-1}(V)$,
2. $f^{-1}(W \cap V) = f^{-1}(W) \cap f^{-1}(V)$,
3. Soit de plus $g : B \rightarrow C$ une application, alors $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$.

UE 111 Fondements Mathématiques - TD 3 : Permutations, relations

1. Permutations. Pour une application $f : M \rightarrow M$, on note souvent $f^2 := f \circ f$. De même, on note $f^3 = f \circ f \circ f$, $f^4 = f^3 \circ f$, etc.

(Attention : c'est la composée de f avec elle-même, et non le "produit de f avec f " – ne pas confondre avec la notation similaire pour des fonctions réelles $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, où on note parfois f^2 la fonction $x \mapsto f(x) \cdot f(x) = (f(x))^2$!).

- (1) Soit M un ensemble et $f : M \rightarrow M$ une application telle que $f^2 = \text{id}_M$.
 - Montrer que f est bijective, et que $f^{-1} = f$.
 - Soit $x \in M$. Montrer qu'exactement deux cas sont possibles :
 - a) soit, $f(x) = x$,
 - b) soit, il existe $y \neq x$ tel que $f(y) = x$ et $f(x) = y$.
- (2) Soit M un ensemble et $f : M \rightarrow M$ une application telle que $f^3 = \text{id}_M$.
 - Montrer que f est bijective, et que $f^{-1} = f^2$.
 - Soit $x \in M$. Montrer qu'exactement deux cas sont possibles :
 - a) soit, $f(x) = x$,
 - b) soit, il existe $y, z \in M$ tels que :

$$y \neq x, z \neq x, y \neq z \text{ et } f(x) = y \text{ et } f(y) = z \text{ et } f(z) = x.$$
- (3) Soit M un ensemble et $f : M \rightarrow M$ une application telle que $f^4 = \text{id}_M$.
 - Montrer que f est bijective, et que $f^{-1} = f^3$.
 - Soit $x \in M$. Montrer qu'exactement trois cas sont possibles selon le nombre d'éléments de l'ensemble $\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x)\}$: décrire ces cas !

Définitions. Soit $M = [1, \dots, n]$ et $a, b \in M$, $a \neq b$. Une transposition est une application $f : M \rightarrow M$ qui échange a et b et fixe tous les autres éléments de M :

$$f(a) = b, \quad f(b) = a, \quad \forall x \in M (x \neq a, x \neq b) : f(x) = x.$$

On utilise alors la notation $f = \tau_{ab}$ ou $f = (ab)$. Un 3-cycle est une application $f : M \rightarrow M$ telle que : il existe 3 éléments $a, b, c \in M$, deux à deux distincts, tels que

$$f(a) = b, \quad f(b) = c, \quad f(c) = a, \quad \forall x \in M (x \neq a, x \neq b, x \neq c) : f(x) = x.$$

On utilise alors la notation $f = (abc)$. De manière analogue, on peut définir des k -cycles pour tout $k = 2, 3, \dots, n$.

2. Calculs de permutations. Avec les notations précédentes, montrer que les k -cycles sont des permutations, i.e., des bijections $f : [1, \dots, n] \rightarrow [1, \dots, n]$. Montrer que

$$(12) \circ (23) = (123).$$

De manière analogue, calculer les composées

$$\begin{aligned} (12) \circ (23), \quad (23) \circ (12), \quad (12) \circ (34), \quad (34) \circ (12), \\ (123) \circ (234), \quad (234) \circ (123), \quad (123) \circ (12), \quad (12) \circ (123). \end{aligned}$$

3. La table de $\mathfrak{S}_3$. Soit $M = \{1, 2, 3\}$ et $\mathfrak{S}_3$ l'ensemble des applications bijectives de M dans M . Donner la liste des éléments de $\mathfrak{S}_3$. Avec les notations des exercices précédents, remplir la table suivante :

$\circ$	id_M	(123)	(132)	(12)	(23)	(13)
id_M						
(123)						
(132)						
(12)						
(23)						
(13)						

- Vérifier que chaque élément apparaît exactement une fois en chaque ligne et colonne. Expliquer ce fait !
- Colorier dans la table les éléments f tels que $f^3 = \text{id}_M$ en vert, et les autres en rouge. Comparer avec la table de $\mathfrak{S}_2$: qu'observez-vous ?
- Pour chaque élément f , noter aussi le plus petit entier k strictement plus grand que 0 tel que $f^k = \text{id}_M$ (on l'appelle l'ordre de f). Qu'observez-vous ?
- Observer que la table n'est pas symétrique par rapport à la diagonale. Pourquoi est-ce ainsi ?

4. Relations : exemples. Pour les relations R suivantes, étudier quelles propriétés (symétrique, réflexive,...) sont vérifiées ; s'il s'agit d'une relation d'équivalence ou non (si oui, décrire les classes d'équivalence) ; s'il s'agit d'une relation d'ordre (dans ce cas, décrire les intervalles), ou non :

1. $M_1 = M_2 = \mathbb{Z}$ et xRy ssi $x - y$ est paire ;
2. $M_1 = M_2 = \mathbb{Z}$, et xRy ssi $x - y$ est un multiple de 3 ;
3. $M_1 = M_2 = \mathbb{N}$, et xRy ssi x divise y (i.e., il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $y = mx$) ;
4. $M_1 = M_2 = \mathbb{R}^2$, et $(x_1, x_2)R(y_1, y_2)$ ssi $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$;
5. $M_1 = M_2 = A$; soit $f : A \rightarrow B$ une application, et xRy ssi $f(x) = f(y)$;
6. $M_1 = M_2 = \mathbb{R}^2$, et $(x_1, x_2)R(y_1, y_2)$ ssi $|x_1 - y_1| \leq 1$ et $|x_2 - y_2| \leq 1$.
7. $M_1 = M_2 = [[1, \dots, 100]]$, xRy ssi $xy = 100$.

5. Diagramme de Hasse d'une relation d'ordre. Soit M un ensemble fini muni d'un ordre partiel $\leq$. On représente les éléments de M par des points, liés par un trait si $x < y$ (pour simplifier, on ne dessine pas le trait entre x et z s'il existe y avec $x < y$ et $y < z$), et alors y est placé plus haut que x . Dessiner ces *diagrammes de Hasse* pour les exemples suivants :

1. $M = [[1, \dots, 4]]$ muni de $x \leq y$ (au sens usuel de nombres naturels),
2. $M = \mathcal{P}([1, \dots, n])$, muni de l'ordre partiel $A \leq B$ ssi $A \subset B$, pour $n = 2, 3, 4$ (indication : revoir le TD 1 !).
3. M l'ensemble des entiers naturels qui divisent 60, et $a \leq b$ ssi a divise b .
4. On admettra que le groupe $\mathfrak{S}_3$ (TD 3, ex.5) a *exactement 6 sous-groupes*. Décrire ces sous-groupes (indication : il y en a 3 qui ont 2 éléments chacun). Soit alors M l'ensemble de ces sous-groupes muni de l'ordre partiel $A \leq B$ ssi $A \subset B$.

UE 111 Fondements Mathématiques - TD 4 : Les entiers naturels

1. Preuves par récurrence. Prouver par récurrence :

1. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
2. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$; donner une illustration géométrique.
3. $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
4. $1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;
5. $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + (3n + 1) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$
6. calculer la somme $\sum_{k=0}^n (a + kd)$ (où $a, d \in \mathbb{R}$) ;
7. calculer a_n défini par : $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 6n$;
8. si $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, alors $(1 + x)^n \geq 1 + nx$;
9. En utilisant que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, démontrer que $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, puis (par récurrence) la formule du binôme de Newton.

2. Propriétés de $\mathbb{N}$.

1. Démontrer par récurrence, en partant des axiomes de Peano (cf. cours), la règle de simplification : soit $p, q, n \in \mathbb{N}$. Alors : si $p + n = q + n$, alors $p = q$.
2. Démontrer par récurrence, en partant des axiomes de Peano, que l'addition dans $\mathbb{N}$ est *commutative* : pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$.
3. Démontrer par récurrence le *principe de bon ordre* suivant :
(BO) *toute partie non-vide A de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément* ; i.e.,
Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Alors : $(A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in A : \forall x \in A : x \geq a)$
Indication : Ecrire la contraposée de cette propriété ; pour la prouver, $A = \emptyset$ signifie : $\forall n \in \mathbb{N} : n \notin A$, ou encore : $P(n) : \forall k \leq n : k \notin A$. Puis démontrer $P(n)$ par récurrence.
4. En admettant certaines propriétés des nombres réels $\mathbb{R}$, montrer que la propriété (BO) est bien en défaut quand on remplace $\mathbb{N}$ par $\mathbb{R}$.

3. Nombres premiers. Un *nombre premier* est un entier naturel $p > 1$ qui n'est divisible que par 1 et lui-même, i.e., si $p = ab$ avec $a, b \in \mathbb{N}$, alors $a = 1$ ou $b = 1$.

1. Écrire la liste des 10 plus petits nombres premiers $p_1 < p_2 < \dots < p_{10}$.
2. Factoriser 120 en nombres premiers.
3. Montrer que tout nombre naturel $n > 1$ est produit de nombres premiers.
4. Montrer que le nombre $n := p_1 \cdots p_{10} + 1$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, \dots, p_{10}$. Conclure qu'il existe au moins un autre nombre premier, plus grand que p_{10} .
5. Utiliser l'idée de la partie précédente pour montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers. (Remarque : il s'agit d'une *preuve par l'absurde* – peut-être la plus célèbre dans l'histoire des maths, due à Euclide.)

4. À propos de l'hôtel de Hilbert.

1. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ injective, mais non surjective.
2. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ surjective, mais non injective.
3. Soit $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est paire}\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est impaire}\}$.
Montrer que $\mathbb{N}$ est la réunion disjointe de A et de B .
Conclure que $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$.
Montrer que $f : A \rightarrow B, k \mapsto k+1$ est bijective et conclure que $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.
Montrer que $g : \mathbb{N} \rightarrow A, m \mapsto 2m$ est bijective et conclure que $\text{card}(A) = \text{card}(\mathbb{N})$.
Conclure que $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{N}) + \text{card}(\mathbb{N})$. Est-ce absurde, ou pas ?
4. Montrer, comme au point 3., que $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{N}) + \text{card}(\mathbb{N}) + \text{card}(\mathbb{N})$, etc.

On peut faire encore mieux : voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Hôtel_de_Hilbert.

5. Ensembles dénombrables.

1. Montrer que l'ensemble $M_1 \subset \mathbb{N}$ des nombres impairs ainsi que l'ensemble M_0 des nombres pairs sont dénombrables.
2. Construire une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.
3. Soit $K_1, K_2 \subset M$ deux ensembles dénombrables tels que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Montrer que $K = K_1 \cup K_2$ est dénombrable.
4. Soit $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$f((x, y)) = \frac{(x + y + 1)(x + y)}{2} + y.$$

Faire un schéma graphique. Montrer que f est bijective, et conclure que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. En déduire aussi : si K_1, K_2 sont deux ensembles dénombrables, alors $K_1 \times K_2$ est dénombrable. Conclure que $\mathbb{N}^3, \mathbb{N}^4, \dots, \mathbb{N}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, est dénombrable.

6. Les réels ne sont pas dénombrables.

Admettons qu'un nombre réel $r \in \mathbb{R}$ a une écriture décimale

$$r = n_0, n_1 n_2 n_3 \dots,$$

où $n_0 \in \mathbb{Z}$ et $n_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ si $i > 0$; cette écriture n'est pas toujours unique (une suite finale de 9999... peut se simplifier). Etudier et comprendre la preuve classique de Cantor que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, et que vous trouvez par exemple à l'adresse, https://fr.wikipedia.org/wiki/Argument_de_la_diagonale_de_Cantor#La_non-dénombrabilité_des_réels.

7. Le théorème de Cantor-Bernstein pour les ensembles finis.

Soit A et B des ensembles finis. Montrer : *s'il existe des applications injectives $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$, alors il existe aussi une application bijective $h : A \rightarrow B$.*

Pour comprendre l'enjeu de ce résultat, qui se généralise aux ensembles infinis, lire https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Cantor-Bernstein#Explication_intuitive.

UE 111 Fondements Mathématiques - TD 5 : Nombres et calcul

1. Sur la construction de $\mathbb{Z}$. En utilisant les propriétés de $\mathbb{N}$ vues en cours, montrer :

1. la relation R suivante définie sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est une relation d'équivalence :

$$(a, b)R(a', b') \quad \text{ssi} \quad a + b' = a' + b,$$

2. si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, alors des trois choses l'une :
soit $(a, b)R(0, 0)$, soit $(a, b)R(m, 0)$, soit $(a, b)R(0, m)$, avec un (unique) $m \in \mathbb{N}^*$;
3. pour $(u, v), (x, y) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$(u, v) + (x, y) := (u + x, v + y).$$

Montrer : si $(a, b)R(a', b')$ et $(c, d)R(c', d')$, alors aussi

$$((a, b) + (c, d))R((a', b') + (c', d')),$$

4. pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on a $((a, b) + (b, a))R(0, 0)$.

Remarque. Ces propriétés justifient d'identifier $\mathbb{Z}$ avec les *classes d'équivalence* de $\mathbb{N}^2$ par rapport à R ; cf. cours.

2. Anneaux. Rappeller du cours la définition d'un *anneau commutatif* $(\mathbb{A}, +, \cdot)$.

1. Soit M un ensemble non-vidé, et $\mathbb{A} = \{f \mid f : M \rightarrow \mathbb{K}\}$ l'ensemble des fonctions f sur M à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{A}$, muni de la somme et du produit de fonctions "point par point",

$$\forall x \in M : \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x),$$

est un anneau commutatif. Quel est le neutre 0 dans $\mathbb{A}$?

2. Soit $\mathbb{A}$ comme ci-dessus. Montrer : si $\text{card}(M) > 1$, alors il existe $(f, g) \in \mathbb{A}^2$, non-nuls, telles que $f \cdot g = 0$. (Un tel couple s'appelle un *diviseur de zéro*.)
3. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}$ est *intègre*, i.e., $mn = 0$ dans $\mathbb{Z}$ implique que $m = 0$ ou $n = 0$. (Utiliser la relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$, et distinguer des cas.)
4. Montrer que tout corps $\mathbb{K}$ est intègre.
5. Si vous connaissez déjà le produit de matrices : montrer que le produit de matrices n'est pas intègre.

3. Pair et impair. Justifier les règles de calcul suivantes, pour des entiers relatifs :

"pair + pair = pair", "pair + impair = impair", "impair + impair = pair" ;
"pair $\times$ pair = pair", "pair $\times$ impair = impair", "impair $\times$ impair = impair".

Ensuite, remplacer "pair" par le symbole $\bar{0}$ et "impair" par $\bar{1}$, et montrer que l'ensemble $\mathbb{A} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, muni d'addition et multiplication comme ci-dessus, est un corps.

4. Il n'existe pas de racine de 2 dans $\mathbb{Q}$. Montrer qu'il n'existe pas de nombre rationnel $c = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tel que $c^2 = 2$. (Indications. On pourra raisonner par l'absurde : si $c = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ vérifie $c^2 = 2$, alors $a^2 = 2b^2$. En écrivant $a = 2^n c$ et $b = 2^m d$ avec c, d impairs, arriver à une contradiction.)

5. Le corps $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. On admettra qu'il existe une racine positive de 2 dans $\mathbb{R}$, qu'on notera $\sqrt{2}$. Pour $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$, posons $r = a + b\sqrt{2}, r' = a' + b'\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Montrer

1. $r = 0$ si et seulement $a = b = 0$;
2. $r + r'$ et $r - r'$ et $r \cdot r'$ sont encore de la forme $c + d\sqrt{2}$, $c, d \in \mathbb{Q}$, et si $r' \neq 0$, il en est de même pour $\frac{r}{r'}$.

En déduire que l'ensemble

$$\mathbb{K} := \mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{r = a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R},$$

muni de l'addition et de la multiplication de nombres réels, est un corps.

6. Sommes doubles. Soit $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Justifier que les sommes suivantes coïncident :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{(i,j) \in [[1,n]]^2} a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2: i+j=k} a_{ij}$$

Représenter dans le plan le schéma utilisé pour calculer ces sommes ; puis calculer

1. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i + j),$
2. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j),$
3. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j),$
4. $\sum_{i,j=1,\dots,n} ij,$
5. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij,$
6. $\sum_{i+j=n} ij.$

UE 111 Fondements Mathématiques - TD 6 : Ensembles, logique

1. Implication logique : exemples. Rappeler du cours la définition de l'implication logique $A \Rightarrow B$ ("si A , alors B ") par les valeurs de vérité, puis dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si $2 > 3$, alors 4 est un nombre premier.
2. Si $3^2 + 4^2 = 5^2$, alors $4^2 + 5^2 = 6^2$.
3. Si $4^2 + 5^2 = 6^2$, alors $3^2 + 4^2 = 5^2$.
4. Si $3^2 + 4^2 = 5^2$, alors $33^2 + 44^2 = 55^2$.
5. Si $(10)^{\frac{21}{10}} > (\frac{21}{20})^{100}$, alors $(10)^{\frac{42}{10}} > (\frac{21}{20})^{200}$.
6. Si $i^2 = -1$, alors $i^4 = 1$.
7. Si $(j^3 = 1 \text{ et } j \neq 1)$, alors $j^2 + j + 1 = 0$.
8. Si $2 = 0$, alors $(3 = 1 \text{ et } 4 = 0 \text{ et } 5 = 1)$.
9. Si un nombre ω est infiniment grand (plus grand que tout nombre naturel), alors $\frac{1}{\omega}$ est un nombre infiniment petit (non-nul et plus petit que $\frac{1}{n}$ pour tout nombre naturel n).

2. Calcul des propositions. En utilisant la table de vérité des connecteurs logiques (cf. cours), montrer : quelles que soient les propositions α, β , pour chaque item les propositions ont même valeur de vérité et sont donc équivalentes :

- (1) $\neg(\neg\alpha)$ et α (double négation)
- (2) $\neg(\alpha \vee \beta)$ et $(\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$; idem avec $\vee$ et $\wedge$ échangés ;
- (3) $\alpha \Rightarrow \beta$ et $(\neg\beta) \Rightarrow (\neg\alpha)$ (contraposition)
- (4) $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ et $\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ (associativité) ; idem pour $\wedge$; idem commutativité ;
- (5) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$ et $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ (distributivité) ;
- (6) $\alpha \Leftrightarrow \beta$ et $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$ (double implication), et $\neg(\alpha \oplus \beta)$
- (7) $\neg(\alpha \Rightarrow \beta)$ et $\alpha \wedge \neg\beta$

3. Le connecteur NAND. En électronique numérique, le connecteur suivant (NAND = NOT AND) joue un rôle important, en tant qu' "atome" d'un circuit intégré : $\alpha \text{ NAND } \beta$ est définie comme $\neg(\alpha \wedge \beta)$. Ecrire la table de vérité de ce connecteur, puis montrer qu'on peut retrouver les autres connecteurs à partir de NAND de la façon suivante :

1. $\neg\alpha$ équivaut à $\alpha \text{ NAND } \alpha$
2. $\alpha \wedge \beta$ équivaut à $(\alpha \text{ NAND } \beta) \text{ NAND } (\alpha \text{ NAND } \beta)$
3. $\alpha \vee \beta$ équivaut à $(\alpha \text{ NAND } \alpha) \text{ NAND } (\beta \text{ NAND } \beta)$
4. $\alpha \Rightarrow \beta$ équivaut à $\alpha \text{ NAND } (\beta \text{ NAND } \beta)$
5. $\alpha \Leftrightarrow \beta$ équivaut à $(\alpha \text{ NAND } \beta) \text{ NAND } ((\alpha \text{ NAND } \alpha) \text{ NAND } (\beta \text{ NAND } \beta))$

4. Calcul des prédicats. Ecrire la négation logique des formules suivantes :

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : (|a_n - \ell| < \varepsilon)$$

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in I : (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

(Pour la manipulation formelle, il n'est pas nécessaire de savoir ce qu'est a_n, ℓ, I ou f . Mair, pour fixer les idées, disons que a_n et ℓ sont des nombres réels, I un intervalle réel, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction : quelle serait alors l'interprétation des formules (1) et (2) ?)

5. Calcul des prédicats. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie. En utilisant les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, exprimer les affirmations suivantes :

1. La fonction f est croissante.
2. La fonction f n'est pas croissante.
3. La fonction f est décroissante.
4. L'ensemble A possède un plus grand élément.
5. L'ensemble A ne possède pas de plus grand élément.
6. L'ensemble A est majoré.
7. L'ensemble A n'est pas majoré.

6. Calcul des prédicats.

Les propositions " $\forall x (A(x) \text{ ou } B(x))$ " et $(\forall x A(x)) \text{ ou } (\forall x B(x))$ sont-elles équivalentes ?

Les propositions " $\forall x (A(x) \text{ et } B(x))$ " et $(\forall x A(x)) \text{ et } (\forall x B(x))$ sont-elles équivalentes ?

Les propositions " $\exists x (A(x) \text{ ou } B(x))$ " et $(\exists x A(x)) \text{ ou } (\exists x B(x))$ sont-elles équivalentes ?

Les propositions " $\exists x (A(x) \text{ et } B(x))$ " et $(\exists x A(x)) \text{ et } (\exists x B(x))$ sont-elles équivalentes ?

7. Le paradoxe de Russell, et le paradoxe du menteur.

1. Analyser la proposition suivante : *Je mens en ce moment.* Est-elle vraie ou fausse ?
2. Soit $M = \{1, \{1\}, \{\{1\}\}\}$.

Quel est le cardinal de M ?

Donner la liste des couples $(x, y) \in M^2$ tels que $x \in y$, puis des couples tels que $x \notin y$. Existe-t-il un élément $x \in M$ tel que $x \in x$?

3. Soit Ω l' "ensemble de tous les ensembles", i.e., les éléments de Ω sont tous les ensembles qui existent. On considère la partie suivante

$$M := \{x \in \Omega \mid x \notin x\}.$$

La proposition suivante : $M \in M$, est-elle vraie ou fausse ?

Pour plus d'informations, vous pouvez consulter la page https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Russell.